Orbit disjoint cyclic diffrence packing の構成に関する計算機実験

An experimental and computational result on a construction of orbit disjoint difference packing

植田 早貴
UEDA, Saki
東京理科大学大学院理工学研究科

宮本 暢子
MIYAMOTO, Nobuko
東京理科大学理工学部

篠原 聡
SHINOHARA, Satoshi
明星大学情報学部

要旨

光直交符号は光ファイバーを用いた符号分割多元接続通信を可能とする符号である。その中でも複数の符号長を有するような符号は可変長光直交符号と呼ばれ，異なる通信速度の要求される通信系において応用される。一方，cyclic difference packing (CDP) は数学的な興味対象として広く研究されており，光直交符号をはじめとする種々の符号系列の構成に応用されている。本論文では，可変長光直交符号を得るのに利用できる orbit-disjoint と呼ばれる性質を満たす CDP の集まりを有限射影空間の直線から構成することを目指し，次元の小さな射影空間で具体的に CDP の集まりを計算機により生成し，検証した。

1 はじめに

$\mathbb{Z}_n$ を n を法とした剰余環とし，$\mathbb{Z}_n^*$ を $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ とする。$\mathbb{Z}_n$ の任意の部分集合 D に対し，その要素間の差のリストとして，多重集合 $\Delta(D)$ を次のように定義する。ここで多重集合とは要素の重複を許す集合のことをいう。

$$\Delta(D) \triangleq \{a - b \pmod{n} \colon a, b \in D \text{ and } a \neq b\}$$

さらに，$\mathbb{Z}_n$ の t 個の部分集合を要素とする任意の族 $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, \ldots, D_{t-1}\}$, $D_i \subset \mathbb{Z}_n$ に対し，$\mathcal{D}$ の差のリストとして多重集合 $\Delta(\mathcal{D})$ を次のように定義する。

$$\Delta(\mathcal{D}) \triangleq \bigcup_{i=0}^{t-1} \Delta(D_i)$$

t を $\mathcal{D}$ の**サイズ**と呼ぶ。以下では，$\mathcal{D}$ の t 個の部分集合それぞれの要素数が一定，すなわち $|D_i| = w$, $i = 0, 1, \ldots, t-1$ であるとする。

Definition 1 (cyclic difference packing)**.** $\Delta(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}_n^*$ の要素を高々 λ 回ずつ含むとき，$\mathcal{D}$ を *cyclic*

difference packing (CDP) といい，(n, w, λ)-CDP と書く。CDP の各要素を**基礎ブロック**と呼ぶ。

$\mathbb{Z}_n$ の部分集合 D と任意の $x \in \mathbb{Z}_n$ に対し $D + x = \{d + x : d \in D\}$ とする。$\mathbb{Z}_n$ の部分集合の族 $\mathcal{D}$ の *development* を $\mathrm{Dev}(\mathcal{D}) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \{D + x : x \in \mathbb{Z}_n\}$ と定義する。

Definition 2 (orbit-disjoint CDP)**.** $\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ を 2 つの $(n, w, 1)$-CDP とする。$\mathrm{Dev}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{Dev}(\mathcal{D}') = \emptyset$ であるとき，$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ は *orbit-disjoint* であるという。

$\mathcal{D}$ を $(n, w, 1)$-CDP とする。このとき，$\mathcal{D}$ の差のリスト $\Delta(\mathcal{D})$ に含まれない $\mathbb{Z}_n$ の要素がある。これらからなる $\mathbb{Z}_n$ の部分集合，すなわち $\mathbb{Z}_n \setminus \Delta(\mathcal{D})$ を *difference leave* と呼び，$\mathrm{DL}(\mathcal{D})$ と書く。任意の cyclic difference packing $\mathcal{D}$ に対して，$0 \in \mathrm{DL}(\mathcal{D})$ である。$\mathrm{DL}(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}_n$ の位数 g の部分群であるとき，$\mathcal{D}$ は *g-regular* であるという。g-regular な $(n, w, 1)$-CDP は *cyclically relative difference family* とも呼ばれ，$(n, g, w, 1)$-CRDF と表記される。特に $g = 1$ のとき，すなわち $\mathrm{DL}(\mathcal{D}) = \{0\}$ のとき，*cyclic difference family* となる。

Bao et al. [1] により，互いに orbit-disjoint な regular $(n, 3, 1)$-CDP の集まりから，多重長（可変長）光直交符号 (multilength optical orthogonal code; MLOOC と略される） が構成できることが示された。光直交符号は元々は固定長の $(0, 1)$-列の集まりとして定義され，光ファイバーを介した符号分割多元接続通信を実現する符号である [3]。光直交符号には，例えば可変重み [7] や 2 次元 [8] といった性質を持つ，様々なバリエーションが現在では存在する。MLOOC は，様々な伝送レートが要求されるような通信系，例えば，テキストチャットや音声，動画像通信が混在するような系を効率よく実現するために，複数の符号長を有するような光直交符号として提案され，研究されている。

Definition 3 （（固定長の）光直交符号)**.** w 個の整数を要素としてもつ $\mathbb{Z}_n$ の部分集合の族 $\mathcal{C}$ が次の条件を満たすとき，光直交符号（Optical Orthogonal Codes）と呼ばれ，(n, w, λ)-OOC と書く。

自己相関特性　任意の $X \in \mathcal{C}, s \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ に対して，

$$| X \cap (X + s) | \leq \lambda$$

相互相関特性　任意の $X, Y \in \mathcal{C}, X \neq Y$ と 任意の $s \in \mathbb{Z}_n$ に対して，

$$| X \cap (Y + s) | \leq \lambda$$

$\mathcal{C}$ の要素は**符号語**となり，二進数列として表現することもできる。すなわち，X を符号語としたとき，$x \in X$ に対して x 番目に 1 を置き，それ以外の位置には 0 をおくことで対応する二進数列が得られる。$\mathcal{C}$ の要素数，すなわち符号語数を**サイズ**と呼ぶことにする。定義から，サイズ t の $(n, w, 1)$-CDP と符号語数 t の $(n, w, 1)$-OOC が同値であることは明らかである。

Definition 4 (多重長の光直交符号)**.** 異なる k 個 $(k \geq 2)$ の正整数 $n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}$ の集合 $N = \{n_0, n_1, \ldots n_{k-1}\}$ と，多重集合 $M = \{m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}\}$ に対し，$\mathcal{C}_i$ をサイズ m_i の (n_i, w, λ)-OOC とする。これらの符号の和集合

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{C}_i$$

を新たな符号 $\mathcal{C}$ として考える。符号長の異なる任意の 2 つの符号語 $X \in \mathcal{C}_i$, $Y \in \mathcal{C}_j$, $i \neq j$ について，その相関 *inter-cross-correlation* に関する次の 2 つの条件を満たすとき，$\mathcal{C}$ を多重長光直交符号

(multi-length optical orthognal code: MLOOC) と呼び，$(M, L, w, \lambda; \lambda_e)$-MLOOC と書く。

$$|(X \oplus_j \tau) \cap Y| \leq \lambda_e \text{ for any } \tau \in \mathbb{Z}_{n_i}, \tag{1}$$
$$|X \cap (Y \oplus_i \tau)| \leq \lambda_e \text{ for any } \tau \in \mathbb{Z}_{n_j} \tag{2}$$

ここで，$\oplus_i$ は $\mathbb{Z}_{n_i}$ 上の加法を表し，$X \oplus_i \tau = \{x \oplus_i \tau : x \in X\}$ とする。

本論文では，射影直線によって構成される CDP をもとに同型写像によって得られる CDP を生成し，それらの集まりが互いに orbit-disjoint となるかを確認した。2 節では，MLOOC への応用を見据え，主に Luo ら [5] による結果を概説する。3 節では，射影直線による CDP と，それらを複数構成する方法を提案する。4 節において，3 節で提案した手法により生成された CDP の集まりが，互いに orbit-disjoint になっていることを計算機実験によって確かめた結果をまとめた。さらに, orbit-disjoint な CDP の系列の存在を予想として示した。

2 Orbit-disjoint Cyclic Difference Packing の必要性

2 つの剰余環 $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n'}$ それぞれの部分集合 $D \subset \mathbb{Z}_n$ と $D' \subset \mathbb{Z}_{n'}$ と，任意の要素 $\tau \in \mathbb{Z}_n$ に対して，

$$\Gamma_{(D,D')}(\tau) = |(D \oplus_n \tau) \cap D'|$$

と表される関数 $\Gamma_{(D,D')}$ を *external difference function* と呼ぶ。ここで，$\oplus_n$ は n を法とする加法演算を表し，D' は $\mathbb{Z}_n$ 上の (多重) 部分集合 であるとみなす。任意の $\tau \in \mathbb{Z}_n$ と $\tau' \in \mathbb{Z}_{n'}$ に対して，D と D' が次の 2 つの不等式

$$\Gamma_{(D,D')}(\tau) \leq \lambda \tag{3}$$
$$\Gamma_{(D',D)}(\tau') \leq \lambda \tag{4}$$

を満たすとき，D と D' は λ-*compatible* であるという。

$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ をそれぞれ $(n, w, 1)$-CDP と $(n', w, 1)$-CDP とする。任意の $D \in \mathcal{D}$ と 任意の $D' \in \mathcal{D}'$ のペアがどれも λ-compatible であるとき，$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}'$ もまた λ-compatible であるという。

Definition 5 (λ-CCDP set system)**.** $\mathcal{D}_i$ をサイズ m_i の $(n_i, w, 1)$-CDP とし，$\mathcal{F} = \{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{k-1}\}$ とする。$\mathcal{F}$ のどの 2 つの要素も互いに λ-compatible であるとき，$\mathcal{F}$ を $(N, M, w, 1; \lambda)$-*CCDP set system* という。ここで，$N = \{n_i \colon 0 \leq i \leq k-1\}$, $M = \{m_i \colon 0 \leq i \leq k-1\}$ である。N と M は多重集合でも良い。

N の k 個の要素が全て異なるとき，$(N, M, w, 1; \lambda)$-CCDP set system が，k 種類の長さを持つ MLOOC と同値であることがわかる。さらに Luo ら [5] によって，λ-CCDP set system の構成法の一つとして，$\lambda = 2$ に対し，サイズが等しい k 個の g-regular cyclic difference packing と，$k-1$ 個の cyclic difference matrix を用いる方法も示された。

Theorem 6 ([5], 2-compatible CCDP set system の構成)**.** w, t, g を，$w \geq 3$ かつ $n = w(w-1)t + g$ を満たす正の整数とする。また，$j \in I_{k-1} = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ に対して，$r_j > 1$ を $(r_j, w, 1)$-CDM が存在するような $k-1$ 個の互いに異なる整数とする。k 個の pairwise 2-compatible g-regular $(n, w, 1)$-CDP が存在するとき,

$$N = \{n, nr_1, nr_2, \ldots, nr_{k-1}\},\ M = \{t, tr_1, tr_2, \ldots, tr_{k-1}\}$$

をもつ $(N, M, w, 1; 2)$-CCDP set system が存在する。各 $i \in I_{k-1}$ に対して，$(nr_i, w, 1)$-CDP は gr_i-regular である。さらに，$x \equiv y \equiv z \pmod g$ を満たす任意の triple $\{x, y, z\}$ を含まないようなブロックをもつ $(nr_j, w, 1)$-CDP が存在するとする。この $(nr_j, w, 1)$-CDP に対する 各 j を要素としてもつ集合を $\Pi \subset I_{k-1}$ とする。Π に対して，$(\{gr_j : j \in \Pi\}, \{s_j : j \in \Pi\}, w, 1; 2)$-CCDP set system が存在するならば，

$$\widehat{M} = \{t, tr_i, tr_j + s_j : i \in I_{k-1} \backslash \Pi \text{ and } j \in \Pi\}$$

をもつ $(N, \widehat{M}, w, 1; 2)$-CCDP set system が存在する。

k 個の互いに orbit-disjoint な g-regular $(n, w, 1)$-CDP の存在と，k 個の互いに $(w-1)$-compatible な g-regular $(n, w, 1)$-CDP の存在とが同値であることは，定義から容易に示される。以上より，orbit-disjoint g-regular $(n, w, 1)$-CDP は，MLOOC の構成にも利用できることがわかる。

3 Orbit-disjoint CDP の生成

q を素数べきとし，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の d 次元有限射影空間を $\mathrm{PG}(d, q)$ と表すことにする。$\mathrm{PG}(d, q)$ の点は，$\mathbb{F}_q$ 上の $d+1$ 次元線形空間の 1 次元部分空間と対応付けられ，さらに $\mathbb{F}_{q^{d+1}}$ の原始元 α を用いて $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ と表現できる。ここで n は $\mathrm{PG}(d, q)$ の点の個数であり，$n = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ である。α^n は射影空間上で $\alpha^0 = 1$ と同一の点を表す。よって写像 $\sigma : \alpha^i \mapsto \alpha^{i+1}$ は，位数 n の巡回写像となり，射影空間の点と $\mathbb{Z}_n$ とを同一視できる。また，σ により射影空間において直線は直線に写される。

$\mathrm{PG}(d, q)$ の任意の 2 直線は高々 1 点で交わる。このことから，写像 σ のもとで，直線の長さが n の orbit から代表元として一つずつ直線を選ぶと，それらを要素とする $(n, w, 1)$-CDP が得られる。ここで，w は直線上の点の個数，すなわち $w = q + 1$ である。

Theorem 7 ([3]). 任意の素数べき q と任意の正の整数 d に対して，サイズが $\left\lfloor \frac{q^d-1}{q^2-1} \right\rfloor$ の $\left(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, q+1, 1\right)$-CDP が存在する。

d が偶数のとき，$\mathrm{PG}(d, q)$ の直線は $\frac{q^d-1}{q^2-1}$ 個の full orbit に分割されることが知られている。また d が奇数のときは，1 つの short orbit と $\left\lfloor \frac{q^d-1}{q^2-1} \right\rfloor$ 個の full orbit からなることも知られている。

Example 8 ($\mathrm{PG}(5, 2)$ で生成される $(63, 3, 1)$-CDP). $\mathbb{F}_2$ 上の原始既約多項式 $x^6 + x + 1$ を用いて拡大された $\mathbb{F}_{2^6}$ の原始元を α とする。$\mathrm{PG}(5, 2)$ の点は α^i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ と表せる。ここで，$n = \frac{2^6-1}{2-1} = 63$ である。点 α^i を α の指数 i で表すことにすると，次の直線の集合 $\mathcal{F}$ は $\left\lfloor \frac{2^5-1}{2^2-1} \right\rfloor = \lfloor \frac{31}{3} \rfloor = 10$ 個の full orbit の代表元である。

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = &\{\{0, 1, 6\}, \{0, 2, 12\}, \{0, 3, 32\}, \{0, 4, 24\}, \{0, 7, 26\}, \{0, 8, 48\}, \{0, 9, 45\}, \{0, 11, 25\},\\ &\{0, 13, 35\}, \{0, 16, 33\}\}\end{aligned}$$

よって，$\mathcal{F}$ はサイズ 10 の $(63, 3, 1)$-CDP となる。なお，直線 $\{0, 21, 42\}$ は short orbit を生成する。

異なる原始既約多項式を用いると，構成される $\mathrm{PG}(d, q)$ の直線の表現が変わる。すなわち，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ をそれぞれ原始元 α と β により点が表現される射影空間とすると，任意の直線 $\ell = \{\alpha^i\} \in \mathcal{P}$ と $\ell' = \{\beta^i\} \in \mathcal{P}'$ に対し，$\{i : \alpha^i \in \ell\}$ と $\{i : \beta^i \in \ell'\}$ は必ずしも等しくはならず，またその orbit も同一

になるとは限らない。一方，同じ orbit が現れる可能性もある。以上より，異なる原始既約多項式により異なる CDP が生成でき，さらにそれらが orbit-disjoint となるようにできることが予想される。実際，本論文で示される範囲では，ある場合には全ての原始既約多項式について互いに orbit-disjoint な CDP が得られ，そうでない場合にも各 CDP から適切に orbit を除外することで互いに orbit-disjoint な CDP の集まりを得ることができることが確認できた。

次の定理は，原始既約多項式の数に関するものであり，よく知られている。例えば，[6] などで参照できる。

Theorem 9 (原始既約多項式の数)**.** 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上 $d+1$ 次原始既約多項式の総数は

$$\frac{\varphi(q^{d+1}-1)}{d+1}$$

である。ここで，$\varphi(m)$ はオイラー関数であり，m と互いに素な m 以下の自然数 (1 を含む) の総数を表し，m の素因数分解が $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ ならば，$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$ と求められる。

4 計算機による CDP の生成とそれらから得られる orbit-disjoint CDP

表 1 は，射影空間 PG$(d,2)$ の次元 d について，$d = 3,\ldots,10$ として実際に計算機により検証した結果である。それぞれの次元 d に対して，まず $d+1$ 次の原始既約多項式を全て用いて CDP を生成した。この CDP の数が表の 2 列目に示されている。得られた CDP の集まりに対して，どの 2 つの CDP も互いに orbit-disjoint になるように取った結果をその個数で示したのが表の 3 列目である。4 列目には，参考に各 CDP のサイズも示してある。

表 1　互いに orbit-disjoint な optimal CDP の最大数

PG$(d,2)$	原始既約多項式の数 (CDP の数)	互いに orbit-disjoint な CDP の個数の最大値	各 CDP のサイズ
PG$(3,2)$	2	2	2
PG$(4,2)$	6	6	5
PG$(5,2)$	6	2	10
PG$(6,2)$	18	18	21
PG$(7,2)$	16	2	42
PG$(8,2)$	48	2	85
PG$(9,2)$	60	6	170
PG$(10,2)$	176	176	341

表 1 から，まず次のことが予想できる。

Conjecture 10. $d+1 > 3$ を奇素数とする。このとき，それぞれのサイズが $\frac{2^d-1}{3}$ の互いに orbit-disjoint な $\frac{\varphi(2^{d+1}-1)}{d+1}$ 個の $(2^{d+1}-1, 3, 1)$-CDP からなる集まりが存在する。なお，$3 \le d \le 10$ のとき，すなわち $d = 4, 6, 10$ のとき，この予想は正しい。

$d=3$ のとき，$d+1$ は合成数となるが，得られる CDP は 2 個であり，互いに orbit-disjoint となった。それ以外の場合，すなわち $d+1>4$ が合成数の場合，異なる原始既約多項式を用いて構成された CDP の全てが互いに orbit-disjoint となっているわけではない。例えば，$d=5$ のとき，6 次の原始既約多項式は Theorem 9 より 6 個あるといえるので 6 個の CDP を生成できるが，互いに orbit-disjoint となっていない。どの 2 つも互いに orbit-disjoint となるようにすると最大 2 個までしか CDP を集めることができない。そこで生成された CDP それぞれから必要最小限の orbit を取り除くことで，原始既約多項式の個数と同じだけの CDP を保持し，CDP の和集合全体として基礎ブロックの個数が大きくなるようにした。その結果を $d<10$ についてまとめたのが以下に列挙する定理である。

Theorem 11. (PG(5,2) から構成した (63,3,1)-CDP)
6 個の互いに orbit-disjoint な $(63,3,1)$-CDP が存在する。ただし，各 CDP のサイズは 9 である。

Proof. 次の $\mathcal{F}_0,\ldots,\mathcal{F}_9$ はそれぞれ $(63,3,1)$-CDP であり，それぞれサイズが 10 である。

$\mathcal{F}_0=\{\{0,1,6\},\{0,2,12\},\{0,4,24\},\{0,8,48\},\{0,16,33\},\{0,32,3\},\{0,7,26\},\{0,14,52\},\{0,28,41\},\{0,9,45\}\}$,

$\mathcal{F}_1=\{0,3,13\},\{0,6,26\},\{0,12,52\},\{0,24,41\},\{0,48,19\},\{0,33,38\},\{\{0,1,56\},\{0,2,49\},\{0,4,35\},\{0,9,27\}\}$,

$\mathcal{F}_2=\{\{0,1,58\},\{0,2,53\},\{0,4,43\},\{0,8,23\},\{0,16,46\},\{0,32,29\},\{0,7,44\},\{0,14,25\},\{0,28,50\},\{0,9,27\}\}$,

$\mathcal{F}_3=\{\{0,1,25\},\{0,2,50\},\{0,4,37\},\{0,8,11\},\{0,16,22\},\{0,32,44\},\{0,5,40\},\{0,10,17\},\{0,20,34\},\{0,9,27\}\}$,

$\mathcal{F}_4=\{0,3,53\},\{0,6,43\},\{0,12,23\},\{0,24,46\},\{0,48,29\},\{0,33,58\},\{\{0,1,8\},\{0,2,16\},\{0,4,32\},\{0,9,45\}\}$,

$\mathcal{F}_5=\{\{0,1,39\},\{0,2,15\},\{0,4,30\},\{0,8,60\},\{0,16,57\},\{0,32,51\},\{0,5,28\},\{0,10,56\},\{0,20,49\},\{0,9,45\}\}$.

$\mathcal{F}_0,\ldots,\mathcal{F}_9$ のそれぞれの最後の要素（基礎ブロック）を取り除くと，どの 2 つの CDP についても互いに orbit-disjoint となる。 □

Theorem 12. (PG(7,2) から構成した (255,3,1)-CDP)
16 個の互いに orbit-disjoint な $(255,3,1)$-CDP が存在する。ただし，各 CDP のサイズは 36 である。

Proof. 集合 A に対して，$kA=\{ka:a\in A\}$ とする。次の $\mathcal{F}_0,\ldots,\mathcal{F}_{15}$ はそれぞれサイズが 42 の $(255,3,1)$-CDP である。それぞれ最後の 6 つの基礎ブロックを取り除くと，どの 2 つの CDP も互いに orbit-disjoint となる。

$$\mathcal{F}_0=\bigcup_{i=0}^{7}\left\{2^i\{0,1,141\},2^i\{0,5,92\},2^i\{0,7,79\},2^i\{0,19,173\}\right\}\cup\{2^i\{0,13,208\}:i=0,\ldots,3\}\cup\{2^i\{0,3,48\}:i=0,\ldots,3\}\cup\{2^i\{0,17,68\}:i=0,1\},$$

$$\mathcal{F}_1=\bigcup_{i=0}^{7}\left\{2^i\{0,1,122\},2^i\{0,5,117\},2^i\{0,9,116\},2^i\{0,25,78\}\right\}\cup\{2^i\{0,15,118\}:i=0,\ldots,3\}\cup\{2^i\{0,3,48\}:i=0,\ldots,3\}\cup\{2^i\{0,17,204\}:i=0,1\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,134\}, 2^i\{0,5,143\}, 2^i\{0,9,148\}, 2^i\{0,25,202\}\right\} \cup \{2^i\{0,15,152\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,3,210\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_3 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,115\}, 2^i\{0,5,168\}, 2^i\{0,7,183\}, 2^i\{0,19,101\}\right\} \cup \{2^i\{0,13,60\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,3,210\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_4 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,25\}, 2^i\{0,5,138\}, 2^i\{0,13,99\}, 2^i\{0,19,92\}\right\} \cup \{2^i\{0,7,112\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,9,120\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_5 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,157\}, 2^i\{0,3,53\}, 2^i\{0,5,173\}, 2^i\{0,7,104\}\right\} \cup \{2^i\{0,23,113\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,9,120\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_6 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,99\}, 2^i\{0,3,205\}, 2^i\{0,5,87\}, 2^i\{0,7,158\}\right\} \cup \{2^i\{0,23,165\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,9,144\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_7 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,231\}, 2^i\{0,5,122\}, 2^i\{0,13,169\}, 2^i\{0,19,182\}\right\} \cup \{2^i\{0,7,150\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,9,144\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_8 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,233\}, 2^i\{0,3,152\}, 2^i\{0,5,224\}, 2^i\{0,13,198\}\right\} \cup \{2^i\{0,37,82\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,15,84\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_9 = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,243\}, 2^i\{0,5,189\}, 2^i\{0,7,173\}, 2^i\{0,19,54\}\right\} \cup \{2^i\{0,11,90\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,15,84\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_{10} = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,13\}, 2^i\{0,5,71\}, 2^i\{0,7,89\}, 2^i\{0,19,220\}\right\} \cup \{2^i\{0,11,176\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,15,186\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_{11} = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,23\}, 2^i\{0,3,106\}, 2^i\{0,5,36\}, 2^i\{0,13,70\}\right\} \cup \{2^i\{0,37,210\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,15,186\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_{12} = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,3,38\}, 2^i\{0,5,219\}, 2^i\{0,7,161\}, 2^i\{0,11,197\}\right\} \cup \{2^i\{0,1,240\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,27,105\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_{13} = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,59\}, 2^i\{0,3,208\}, 2^i\{0,5,194\}, 2^i\{0,7,91\}\right\} \cup \{2^i\{0,15,101\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,27,105\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_{14} = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,1,197\}, 2^i\{0,3,50\}, 2^i\{0,5,66\}, 2^i\{0,7,171\}\right\} \cup \{2^i\{0,15,169\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,27,177\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,68\} : i = 0,1\},$$

$$\mathcal{F}_{15} = \bigcup_{i=0}^{7} \left\{2^i\{0,3,220\}, 2^i\{0,5,41\}, 2^i\{0,7,101\}, 2^i\{0,11,69\}\right\} \cup \{2^i\{0,1,16\} : i = 0,\ldots,3\}$$
$$\cup \{2^i\{0,27,177\} : i = 0,\ldots,3\} \cup \{2^i\{0,17,204\} : i = 0,1\}.$$

□

$d = 8, 9$ についても同様に示せるが，ここでは省略する。

Theorem 13. (PG(8,2) から構成した (511,3,1)-CDP)
48 個の互いに orbit-disjoint な $(511, 3, 1)$-CDP が存在する。ただし，各 CDP のサイズは 81 である。

Theorem 14. (PG(9,2) から構成した (1023,3,1)-CDP)
60 個の互いに orbit-disjoint な $(1023, 3, 1)$-CDP が存在する。ただし，各 CDP のサイズは 140 である。

どのような orbit が他の CDP と共有されるのか，その系統的な特徴についてはまだ明確にはなっていない。例えば，射影空間で CDP を構成する際に本研究ではフロベニウス写像を用いて基礎ブロックを生成しているが，その写像のサイクルの長さにより分類できるようにも思われた。しかしながら，例えば $d = 9$ のときには $d < 9$ の場合と異なる挙動がみられた。

参考文献

[1] J. Bao, L. Ji, Y. Li, and C. Wang, "Orbit-disjoint $(n, 3, 1)$-CDPs and their applications to multilength OOCs," *Finite Fields Appl.* 35, pp.139–158, 2015.

[2] J. Bao, L. Ji, Y. Li, and C. Wang, "Some series of optimal multilength OOCs of weight four," *Discrete Math.* 338(12), pp.2549–2561, 2015.

[3] F. R. K. Chung, J. A. Salehi, and V. K. Wei, "Optical Orthogonal codes: design, analysis, and applications," *IEEE Trans. Inform. Theory* 35(3), pp.595–604, 1989.

[4] W. C. Kwong and G. C. Yang, "Design of multilength optical orthogonal codes for optical CDMA multimedia networks," *IEEE Trans. Inform. Theory* 50(8), 2002.

[5] X. Luo, J. Yin, and F. Yue, "Multilength optical orthogonal codes: new upper bounds and optimal constructions," *IEEE Trans. Inform. Theory* 61(6), pp.3305–3315, 2015.

[6] 高橋磐郎, 組合せ理論とその応用, 岩波全書 (1979)

[7] G. C. Yang, "Variable-weight optical orthogonal codes for CDMA networks with multiple performance requirements, " *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 1, pp. 47–55, 1996.

[8] G. C. Yang and W. C. Kwong, "Performance comparison of multiwavelength CDMA and WDMA+CDMA for fiber-optic networks, " *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, no. 11, pp. 1426–1434, 1997.

[9] J. Yin, "Some combinatorial constructions for optical orthogonal codes," *Discrete Math.* 185, pp.201–219, 1998.