物理学における座標変換－その意味と役割についての解説

Transformation of Coordinate System in Physics

合田　一夫

Kazuo GODA

The learning points in transformation of coordinate system in physics are presented. I hope this notes assist students to learn physics.

キーワード：変換，座標，物理

Keywords：Transformation,　Coordinate System，Physics

座標の変換は，物理学において重要であり，特に，力学，電磁気学，相対論，量子力学で必要となる。また，いくつかの解釈，いろいろな応用があり，学ぶ上で注意が必要である。前号の紀要で一部触れた物理学における座標変換の意味と意義についてさらに詳しく述べる。

〇座標変換による物理量や法則の変換

座標の変換は観測の立場を変えること。観測者は物差しと時計を持っている。空間と時間の枠（座標軸）を設定し，座標を求める。この設定を座標系という。二人の観測者が，互いに移動していたり，向きが異なる場合，対象物はどのように見えるかが，対象物の特質と関係することがある。物理学において，互いの座標系の変換（座標変換）により種々の物理量や法則がどのように変換されるかが重要となる。

たとえば，ニュートンの運動方程式を満たす座標系を慣性系といい，慣性系とこれに対し一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で移動する座標系とで粒子の運動を考える。粒子の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$とすると

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t$$

で，ガリレイ変換という。ニュートンの運動方程式は，最初の座標系で

$$F=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

もう一方の座標系で，$F=F'$であり

$$F'=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}.$$

両者は，プライムの有無を除いて同じ形になっている。後者の座標系も慣性系で，互いに等速移動する二つの慣性系の座標変換で物体の運動を表す力学法則の形が変わらないという原理が成り立つ。[原理（数学においては公理ともいう）：論理の展開の出発点になる言明。直接は証明できない。原理が正しいかは，それから導かれた結果が実験で検証されるか否かで決まる。]

物体の運動を表す古典力学の法則の形は，座標系の平行移動，回転，ガリレイ変換に対して変わらない。

物理の法則の多くは(微分)方程式で表され，広い意味の座標変換に対し方程式の形が変わらないことを共変といい，変換に対する共変性は物理学の理論の原理に用いられる。

本文では，座標変換から種々の物理量や物理法則の特質が現れることを学ぶ。

1．座標変換による位置または位置ベクトルの変換

物体の位置は物理量の一つで，対象物の位置座標は座標系の変換により変換される。

座標変換における位置の変換の意味に二通りあり，注意が必要である。

ｉ．座標系（座標軸）を変換し，対象物はそのまま。

z軸を回転軸とした回転の場合，座標軸を角度 θだけ回転する場合を考える。

対象物の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\\&=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z\boldsymbol{k}'\\\boldsymbol{i}'&=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta\\\boldsymbol{j}'&=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta\\\boldsymbol{k}'&=\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$は，直交座標系の基底で，線形独立な単位ベクトルである。

座標は，

$$\begin{aligned}x'&=x\cos\theta+y\sin\theta\\y'&=-x\sin\theta+y\cos\theta\\z'&=z\end{aligned}$$

明星大学理工学部総合理工学科物理学系　教授　原子物理学，放射線物理学

と変換される。

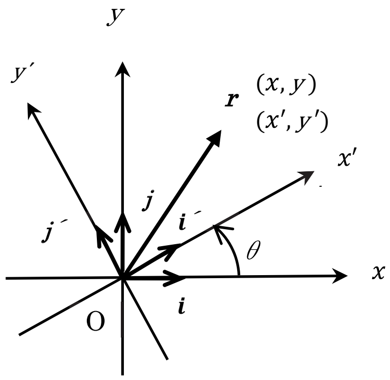

図　1

ⅱ.

ⅱ. 座標系（座標軸）はそのまま，対象物（の座標(位置ベクトル $\boldsymbol{r}$)) を移す。(座標を移すことを，点を写すともいう)。

回転の場合，角度 αだけ移すとし，

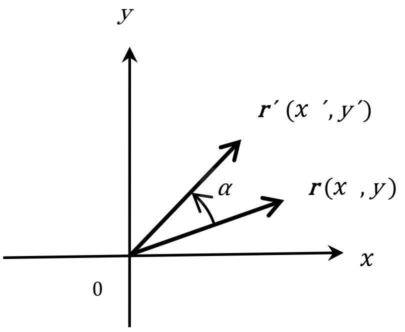

図　2

座標は,

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha$$
$$y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha$$
$$z' = z$$

と変換される。

ⅰとⅱは，$\theta = -\alpha$ とすると同等となる。

2. 座標変換による関数 ψの変換

粒子の位置座標x（場についての場合は場所を表すパラメーター）に対する物理量 ψ が決まる場合のように，座標変換に対する関数 $\psi(x)$の変換について，前述の二通りの座標変換に対応して二通りある。

ⅰ　座標系を移動

対象物を固定し，座標系をx軸の方向に ξだけ移動する場合

$$x' = x - \xi$$
$$\psi'(x') = \psi(x) = \psi(x' + \xi)$$

注意)　x'をxとあらためて置くと

$$\psi'(x) = \psi(x + \xi)$$

例えば　$\psi(x) = x^2$ の場合

$$\psi'(x) = (x + \xi)^2$$

となる。これは，$\psi(x)$のxを$x + \xi$と置くことで，座標系を固定し，対象物をx軸の方向に$-\xi$だけ移動すること，あるいはグラフを移動することと同等になる。（次のⅱを参照）この場合のxは，新しい座標系での対象物の位置座標を表す。

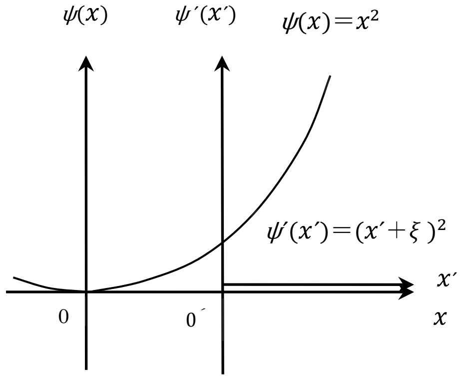

図　3

ⅱ　対象物を移動

対象物をx軸の方向に ξだけ移動する場合

$$\psi'(x) = \psi(x - \xi)$$

となる。これは，$\psi(x)$のxを$x - \xi$と置くことで，座標系を固定し，対象物をx軸の方向に$+\xi$だけ移動すること，あるいはグラフを移動することと同等になる。

例　$\psi(x) = x^2$ の場合

$\psi'(x)$ は，$\psi(x)$ の x を $x - \xi$ と置き

$$\psi(x - \xi) = \psi'(x) = (x - \xi)^2$$

となる。

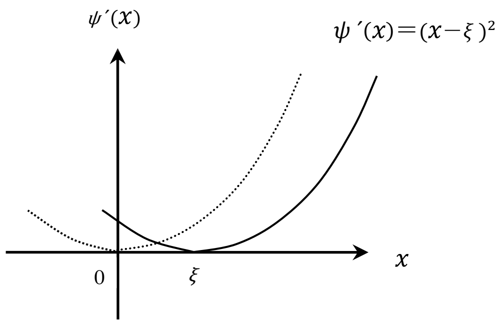

図　4

このように，座標変換による関数の変換を対象物の移動とし，例えば対象物をx軸の方向に ξ だけ平行移動する場合，関数 $\psi(x)$ のx を $x - \xi$ と置く。

一般の座標変換

一般の座標変換は，回転と平行移動の組み合わせである。

２次元の場合

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta - \xi_1$$

$$y'=-x\ \sin\theta+y\ \cos\theta-\xi_2\,.$$

（ⅰの方式の場合)

しかし，その他の変換もある（反転や拡大など)。

座標軸の変換(ⅰ)と対象物の移動(ⅱ)は前述のように同等であるが，どちらかの場合によるか注意が必要である。座標変換に伴う関数の変換を，対象物の移動とする場合も多い。

・ⅱの方式の場合の座標変換

平行移動　関数において，x を$x-\xi$と置く変換（x軸方向への対象物の平行移動)。

空間反転　関数において，$\boldsymbol{r}$ を $-\boldsymbol{r}$と置く変換。対象物を原点に対称の位置に移動。

時間反転　関数において，t を $-t$ と置く変換。実際には実現できないが，フィルムを逆に写したときの現象に相当。現象の可逆性と関係。

〇対称性と保存則

関数や法則を表す方程式の形が座標変換（広い意味での座標変換）により変わらないとき，関数や法則はその変換に対し不変(対称)であるという。

座標変換に対する不変性（対称性）に対応して物理量の保存則が導かれる。

これは，古典力学でも示すことができるが，量子力学においては次のように説明される。

・対称性

量子力学は，状態を波動関数，物理量を演算子で表す。

物理量を表す演算子 A に対して

$$A\psi(t)=a\psi(t)$$

の関係があるとき，a を固有値といい、物理量 A の観測値はa となる。(量子力学の公理)

物理量 A の演算子は，座標変換による関数の変換の演算子となる場合があり，座標変換に伴う波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$の変換を，演算子 Aを用いて，

$$\psi'(\boldsymbol{r})=A\psi(\boldsymbol{r})$$

とする。(ⅱの場合）また，

$$\psi=A^{-1}\psi'.$$

これに系のハミルトニアン Hを作用し

$$H\psi=H\,A^{-1}\psi'$$

これを座標変換した新しい座標系では

$$A\,H\psi=A\,H\,A^{-1}\psi'$$

より，ハミルトニアンは $A\,H\,A^{-1}$ となる。新しい座標系でも系のハミルトニアンの形は変わらず，

$$H=A\,H\,A^{-1}$$

であり，

$$H\,A=A\,H$$

$$H\,A-A\,H\equiv[H,A\,]=0$$

となる。このように系が変換に対し対称性を持つときは，変換 Aに対し，$[H,A\,]=0$　となる。

・保存則

系のミルトニアンを Hとし，

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$$

の関係がある。

時刻 t の微小経過$\varDelta\,t$に対しては，$\psi(t)$ は，上式を用い，

$$\psi(t+\varDelta\,t)=\psi(t)+\varDelta\,t\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\,t}$$

$$=\psi(t)-\frac{i}{\hbar}\varDelta\,t\cdot H\psi(t)$$

となる。$[H\,,\ A\,]=0$　のとき，

$$A\psi(t+\varDelta\,t)=A\,[\psi(t)-\frac{i}{\hbar}\varDelta\,t\cdot H\psi(t)\,]$$

$$=A\psi(t)-\frac{i}{\hbar}\varDelta\,t\cdot A\,H\psi(t)$$

$$=A\psi(t)-\frac{i}{\hbar}\varDelta\,t\cdot H\,A\,\psi(t)$$

$$=a\,\{\psi(t)-\frac{i}{\hbar}\varDelta\,t\cdot H\psi(t)\}=a\psi(t+\varDelta\,t)$$

となり，Aの固有値は保存される。すなわち$[H\,,\ A\,]=0$ のとき，物理量 Aは保存される。

このように変換 Aに対し系に対称性がある場合，Aの固有値は保存される。

たとえば，系の位置のずらしに対するハミルトニアンの不変性から運動量の保存則が導かれる。

運動量の演算子($\boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla$) は，波動関数の座標をずらす座標変換の演算子と関係する。座標系をx軸の方向に微小距離$\varDelta\xi$だけ移動する場合

$$x'=x-\varDelta\xi$$

これは対象物を$-\varDelta\xi$ だけ動かす場合と同等で，系の状態 ψは，この変換によりx を$x+\varDelta\xi$ と置いて（ⅱの場合)，

$$\psi'(x)=\psi(x+\varDelta\xi)=\psi(x)+\varDelta\xi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$$

$$=(1+\frac{i}{\hbar}\varDelta\xi\cdot p_x\,)\,\psi(x)\quad(\ p_x=-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ )$$

となる。[座標系をx軸の方向に距離 ξだけ移動させる場合の変換の演算子は　$e^{i\xi p_x/\hbar}$ となる。]

ハミルトニアン Hの期待値(エネルギー値)は，

$$\langle\psi',\ H\psi'\rangle$$

$$=\langle(1+\frac{i}{\hbar}\varDelta\xi\cdot p_x\,)\,\psi,\ H(1+\frac{i}{\hbar}\varDelta\xi\cdot p_x)\,\psi\rangle$$

$$=\langle\psi,H\psi\,\rangle+\frac{i}{\hbar}\varDelta\xi\,\langle\psi,[H\,,\ p_x\,]\ \psi\rangle$$

となり，任意の ψ に対しこの変換におけるハミルトニアンの期待値が不変であるから，

$$[H\,,\ p_x]=0$$

が成り立ち，同様にして，

$$[H\,,\ \boldsymbol{p}]=0$$

となり，運動量$\boldsymbol{p}$は保存される。このように，運動量保存則は系を空間的にずらしても系のエネルギー値は変わら

ないという空間の等質性と関係している。

○座標変換（回転）に対する位置およびベクトルの変換の行列の利用

ⅰの方式の場合

座標変換の回転における位置やベクトルの変換は行列を利用できる。座標変換における座標軸の回転は，直交座標系における回転の行列 R が変換の前と後の基底(基本ベクトル)により定まり，次のように表される。

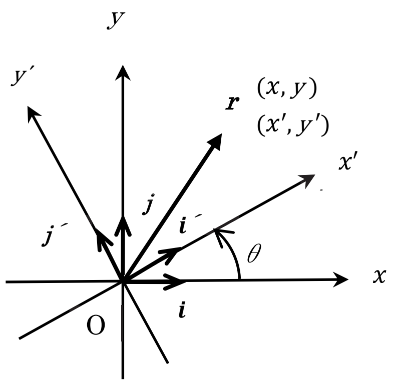

図　5

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$$= R \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$：直交座標系の基底

$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$：回転後の直交座標系の基底

すなわち，R は基底の変換を表す。直交座標系における回転の R は直交行列（$R^{-1}=R^{\mathrm{T}}$, R^{T}は R の転置行列）となる。

また、粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$について考える。ベクトルの成分は基底により変わるが，ベクトル自身は座標系に依らず

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$$
$$= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は物体の O からの位置を示す物理量の一種で，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分は，座標系の回転（基底 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の変換）に対し，同じ R により

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変換される。

これらの関係は，位置ベクトルだけでなく任意のベクトルに対して成り立つ。ベクトル $\boldsymbol{V}$の成分は，座標系の回転（基底 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の変換）に対し

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

と変換される。

ⅱの方式の場合（$\alpha = -\theta$ と同等）

$$\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

また

$$\boldsymbol{r} = R^{-1}\boldsymbol{r}' = R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}'$$

であり，点 P での物理量である $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r} = R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}'$と置き換えて，新しい座標系での $\boldsymbol{r}'$に変換できる。

ベクトル $\boldsymbol{V}$の成分は

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と変換される。

・**線形変換**（ⅱの方式の場合）

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

は，行列 A により数の組みが写されること（変換）を表し，線形変換という。

二次元の座標変換においては，2 つの位置座標を持つ点

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が点

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

に写されること（変換）を表し，A は基底を決めることにより定まる。

x 軸方向への平行移動は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \xi \\ y \end{pmatrix}$$

となり，線形変換とならない。すなわち，この場合変換を行列で表すことはできない。

また，点の座標を

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と位置ベクトルで表すと，

$$A\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$$

から，A は，点の位置を $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}'$に移すことを表し，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$の変換を表す行列といわれる。

また，このように対象物の位置を表す数や点が移動する

規則を写像ともいう。

演算子

行列 A でベクトルや図形を移すことができる。また，$\boldsymbol{r}$ を図形を表わす変数とすると，A は，図形を変形する演算子とも考えられる。演算子は，ベクトルや，関数に作用し，一定の規則により変形（変換）する働きをもつものをいう。

このように，座標変換は，図形の変形とも関係している。

固有ベクトル

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ (λは定数)を満たす場合は，$\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq 0$) は固有ベクトルと呼ばれ，この変換 A で向きが変わらないベクトルのこと。λを固有値という。

・行列の対角化（ｉの方式の場合）

行列 S の固有ベクトルを用い，行列 S を対角化できる場合がある。S が対称行列の場合($S^{\mathrm{T}} = S$．S^{T} は S の転置行列) は，この固有ベクトルを列ベクトルとして並べて得られる行列 P [この場合，P は直交行列（$PP^{\mathrm{T}} = I$ または $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ を満たす行列。I は単位行列，P^{-1} は P の逆行列。）となる。] を用いて，行列 S が対角化される。

すなわち

$$S' = P^{\mathrm{T}} S P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる（行列の対角化）。λ_1，λ_2 は S の固有値。すなわち，行列の対角化 $S' = R^{\mathrm{T}} S R$ は，座標変換すなわち基底の変換 R を行った場合の写像の働きをする S の表現行列が S' に変わることを示す。

このように，対称行列 S は，直交行列により S'に対角化される。座標変換における座標軸の回転を表す行列は直交行列で，行列の対角化に用いられる Pは座標系の回転と関係している。すなわち，Sは，座標の回転 $\boldsymbol{r} = R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}'$の Rを用いて対角化でき，Sと $\boldsymbol{r}$ を含む関係式において，

$$R\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$$
$$\boldsymbol{r} = R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}'$$

と置き換えて，新しい座標系での S'と $\boldsymbol{r}'$との関係式で表すことができる。

これは，二次形式の標準形を求める，あるいは連成振動の基準座標（基準振動）を求めるのに利用される。

・二次形式の標準形

二次形式

$$(x, y)\, S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a$$

S: 対称行列

において

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} S \boldsymbol{r} = a.$$

これに座標回転の変換 $\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r}$ を行うと $\boldsymbol{r} = R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}'$より

$$(R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}')^{\mathrm{T}} S (R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{r}'^{\mathrm{T}} R S R^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}'$$

すなわち，

$$(x', y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a$$

と標準形になる。

〇応力とテンソル

弾性体は，外から力を加えられたとき変形する。このとき内部で働いている力について考える。内部では隣り合う部分が，互いに力を及ぼし合っている。

例として，図 6 のように，一様な棒の両端に外力 $\boldsymbol{F}$を加える。ある任意の面を考え，物体をその面について分割したと仮想すると（図 7），二つの部分は互いに他方から力を受け，力の大きさは互いに等しく反対向きである（内力，作用反作用の法則）。

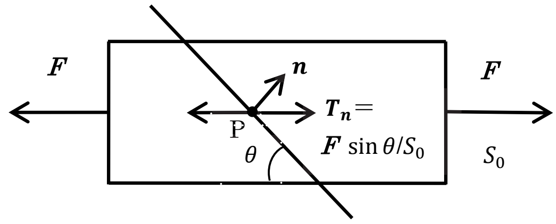

図 6　物体（断面積S_0）を外力 $\boldsymbol{F}$ で引っぱる場合

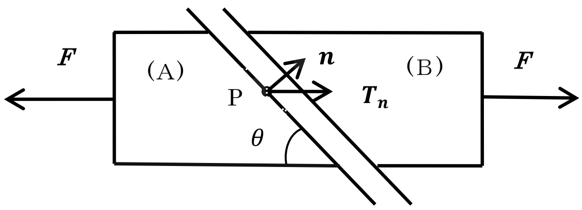

図　7

棒の内部の点 P においてこの点を含む面が他方の物体 B から受ける単位面積当たりの力を考える。この力の大きさはこの面の向きにより変わり（ $\boldsymbol{F}/S$,　$S = S_0 \,/\sin\theta$，S_0：棒の両端の面積），応力［単位： N/m²］という。また，応力の面に垂直な成分を法線応力（$\boldsymbol{F}\sin^2\theta / S_0$），平行な成分を接線応力(またはずれ応力，$\boldsymbol{F}\sin\theta\cos\theta / S_0$ ）という。弾性体の物性について考えるとき，この応力がひずみと関係し大切な量となる。

・応力の表し方

一般に，1 点 P での応力とは，応力が場所により変わり，P を通る面を小さくとったものである（面積 ΔS ）。また，面の向きにより大きさや方向が変わり，面の外向き法線単位ベクトルを$\boldsymbol{n}$とし，応力を $\boldsymbol{T_n}$ と表す。この面に働く力を$\Delta\boldsymbol{F}$ とすると，応力は

$$\boldsymbol{T_n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta S}$$

となる。

点 P での応力を表すには，この点に関するいろいろな面についての情報が必要となる。P での応力を表すのに，点

P の周りに微小立方体を考える。(最後に極限を取る。)点 P を通る直交軸をとり, それぞれの軸に垂直な面を持つ微小立方体をとる。

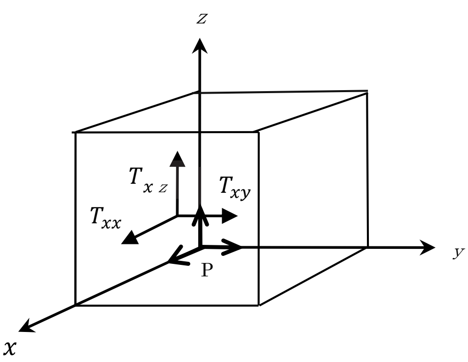

図　8

x軸に垂直な面の，正の側の物体から負の側の物体が受ける応力を

$$\boldsymbol{T}_x = T_{xx}\boldsymbol{i} + T_{xy}\boldsymbol{j} + T_{xz}\boldsymbol{k}$$

$$= (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz})$$

と表す。

同様に y 軸，z 軸に垂直な面の応力をそれぞれ

$$\boldsymbol{T}_y = (T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}),$$

$$\boldsymbol{T}_z = (T_{zx}, T_{zy}, T_{zz})$$

とすると，これらは，まとめて

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}_x \\ \boldsymbol{T}_y \\ \boldsymbol{T}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{b}：基底),\ T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

と表すことができ，Tは応力テンソルと呼ばれる。モーメントの釣り合いから対称行列（$T_{ij} = T_{ji}$）となる。任意の面に関する応力$\boldsymbol{T}_n$ はこれらから解析的に得られる。

静水圧の場合 Tは面の向きに関係なく

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_x = -p\,\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{P}_y = -p\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{P}_z = -p\,\boldsymbol{k}$$

となる。

・任意の面に関する $\boldsymbol{T_n}$

任意の面に関する$\boldsymbol{T_n}$を知るには，微小体積の（体積要素 dV）がそれぞれの面を通して周りから受ける力(外力)のつり合いを考える。

図のように，微小四面体 PABC を考える。

考える面の外向き法線ベクトルを$\boldsymbol{n}\,(l,\ m,\ n\ )$とする。

$$\boldsymbol{n} = l\ \boldsymbol{i} + m\ \boldsymbol{j} + n\ \boldsymbol{k}$$

$$(\ l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma\ )$$

$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$：直交座標系の基底

△ABC の面積を△Sとすると，

$$\triangle\mathrm{PBC} = l\triangle S,\quad \triangle\mathrm{PCA} = m\triangle S,\quad \triangle\mathrm{PAB} = n\triangle S$$

点 P (x, y, z) でのこの面についての応力$\boldsymbol{T_n}$ は，この点とその近傍でつくる微小四面体の領域（体積要素 dV）がそれぞれの面を通して周りから受ける力のつり合いから，x方向について

$$T_{nx}\ \triangle\mathrm{S} - T_{xx}\ l\triangle\mathrm{S} - T_{xy}m\triangle\mathrm{S} - T_{xz}n\triangle\mathrm{S} = 0$$

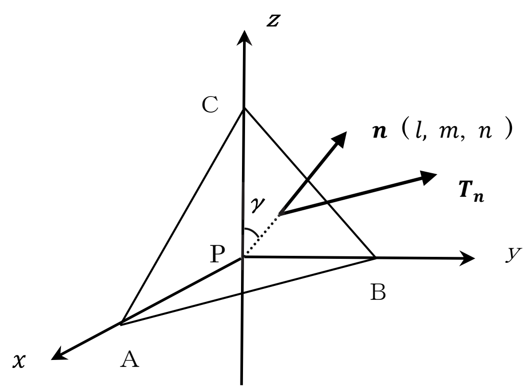

図　9

より

$$T_{nx} = T_{xx}\ l + T_{xy}\ m + T_{xz}\ n\ .$$

y, z 方向についても同様にして

$$T_{ny} = T_{yx}\ l + T_{yy}\,m + T_{yz}\,n$$
$$T_{nz} = T_{zx}\ l + T_{zy}\,m + T_{zz}\,n$$

したがって

$$\boldsymbol{T_n} = T_{nx}\boldsymbol{i} + T_{ny}\,\boldsymbol{j} + T_{nz}\,\boldsymbol{k}$$

となり，また，

$$\begin{pmatrix} T_{nx} \\ T_{ny} \\ T_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T_n} = T\ \boldsymbol{n}$$

と表される。

これは，法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする面に対する応力 $\boldsymbol{T_n}$を表す。T は，応力テンソルで，弾性体の場合対称行列である。この関係から，任意の面に関する応力を表わすことができ，応力は，テンソルを用いて表される。

○ベクトルとテンソル

スカラー，ベクトル，テンソルは，座標変換に対して，それらの量がどのように変換されるかに注目して定義されている。

空間座標の変換は一般に回転と平行移動で表される。座標の回転は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表される。ベクトルの成分は，平行移動では変わらず，回転 R と平行移動に対し，

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

と変換される。これをベクトルの変換則という。逆に，これをベクトルの定義としている。

テンソル T は多成分をもち（３次元では3^n個，n 階テンソル)，これらの成分は，空間座標の変換（回転）に対し，Rに関係した変換をする。また，その成分は複数のベクトルの成分の積に対応した変換（ 2 階の場合，$T_{ij}= a_i b_j$ → $T_{ij}'= a_i' b_j'$に対応）をする。(テンソルの定義）また，テンソルは, $\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{b}$ のようにベクトルを別のベクトルに変える演算子の役目をする。

テンソルを $n\times n$ の行列で表したとき，演算は行列の定義（約束）による。

ベクトルは，行ベクトル(a_x, a_y, a_z) ，または列ベクトル $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ で表される。両者は，物理の上では同じものだが，行列・テンソル演算においては，テンソルは行ベクトルの右から，列ベクトルの左から演算することと約束されている。

テンソルは、座標変換 R（回転）により

$$T' = R\,TR^{\mathrm{T}}$$

と変換される。

・**主軸変換**（ｉの方式の場合）

応力は $\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}$：基底)で表され，弾性体の場合，Tは対称行列である。その成分は，座標の取り方により変わり，直交座標軸の変換（回転)により対角形に変換される。このときの座標軸を主軸という。

座標軸の θだけの回転の Rにより，$\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{b}$ は,

$$T' = R\,TR^{\mathrm{T}} \quad (対角行列),\ \boldsymbol{b}' = R\boldsymbol{b}$$

から

$$\boldsymbol{T}' = T'\boldsymbol{b}'$$

となり，回転した別の基底で表すことができる。すなわち，

$$\boldsymbol{b}' = R\boldsymbol{b} = R\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} T_1' & 0 & 0 \\ 0 & T_2' & 0 \\ 0 & 0 & T_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{k}' \end{pmatrix}$$

であり，

$$\boldsymbol{T}' = T_1'\boldsymbol{i}' + T_2'\boldsymbol{j}' + T_3'\boldsymbol{k}'$$

$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$：主軸の基底

と表すことができる。これを主軸変換という。

図 6 の場合，棒の方向にx軸を取るとT'は

$$\begin{pmatrix} T_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

○慣性モーメント

剛体の軸のまわりの回転を考える。$\boldsymbol{\omega}$を，大きさが

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

で，向きが回転軸に平行で，回転にたいし右ねじの進む方向を持つベクトルとし，角速度という。(一般に，ベクトルは位置については言わない) 剛体を微小体に分け質点の集まりと考え，回転軸上に原点 O をとり，ある時刻において，質点の位置ベクトルを r，速度を $\boldsymbol{v}$とすると，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

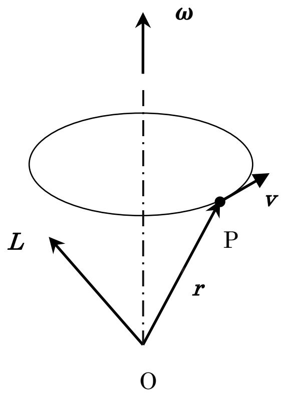

図 10

点 O のまわりの質点の角運動量Lは,

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}.$$

直交座標系の成分は

$$\boldsymbol{L} = L_x\boldsymbol{i} + L_y\boldsymbol{j} + L_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r} = r_x\boldsymbol{i} + r_y\boldsymbol{j} + r_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{i}$ ，$\boldsymbol{j}$ ，$\boldsymbol{k}$：直交座標系の基底

点 O のまわりの剛体の全角運動量は，微小体の質量を ｄmとして

$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}m = \int \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\ \mathrm{d}m$$

$$=\int\left((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}\,m.$$

成分で表すと

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}.$$

ただし,

$$I_{xx}=\int(y^2+z^2)\,dm\ ,\quad I_{yz}=I_{zy}=-\int yz\ dm,$$
$$I_{yy}=\int(z^2+x^2)\,dm\ ,\quad I_{zx}=I_{xz}=-\int zx\ dm,$$
$$I_{zz}=\int(x^2+y^2)\,dm\ ,\quad I_{xy}=I_{yx}=-\int xy\ dm,$$

で,

$$\boldsymbol{L}=I\,\boldsymbol{\omega}$$

となる。$\boldsymbol{L}$ と$\boldsymbol{\omega}$は一般に異なるベクトルで，これらを関係づけるのが Iで, I はテンソルとなり対称行列となる。I を慣性モーメントテンソルという。

座標軸として主軸変換し，慣性の主軸を取ると,

$$\boldsymbol{L}'=I'\,\boldsymbol{\omega}'$$

$$I'=\begin{pmatrix}I_1'&0&0\\0&I_2'&0\\0&0&I_3'\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}'=(\ \omega_1',\ \omega_2',\ \omega_3'\ )$$

すなわち,

$$\boldsymbol{L}'=I_1'\ \omega_1'\ \boldsymbol{i}'+I_2'\ \omega_2'\ \boldsymbol{j}'+I_3'\ \omega_3'\ \boldsymbol{k}'$$

$\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$：慣性主軸の基底

と表すことができる。$\boldsymbol{L}$と$\boldsymbol{\omega}$ の向きは一般に異なり，一致するのは $I_1'=I_2'=I_3'$, または，$\boldsymbol{\omega}$の向きが慣性主軸のどれか一つに平行になっている場合である。

〇慣性力

見かけの力ともいわれる。ニュートンの運動方程式を満たす座標系を慣性系といい, 慣性系Kに対し加速度をもって動く系をK′とする。

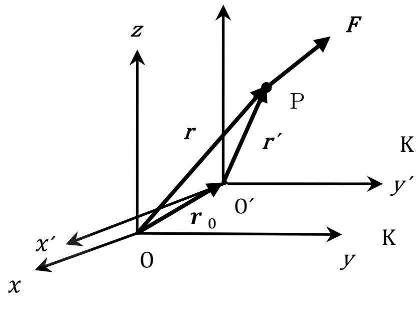

図 11 並進加速系

質量 m の粒子の運動を考え，粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0$$

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=F$$

K′系で表すと

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}^2(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0)}{\mathrm{d}t^2}$$

より

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$$

となる。K′系は慣性系ではなくニュートンの運動の法則は成り立たないが，運動の法則の形にすると F のほかに $-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}$ が右辺に加わり，K′系の観測者には実際の力Fにさらにこの力が働いているように見え, これを慣性力という。慣性力は加速度系に座標変換したときに現れる見かけの力で，反作用が存在しなく、作用反作用の法則を満たさない。

・コリオリ力

慣性系の座標を$(x\ ,y)$とし, z 軸を回転軸とし, $x\ ,y$ 面上を一定の角速度 ω（$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$）で回転する座標系（二次元回転座標系) $(x'\ ,\ y'\ )$を考える。（ｉの場合）

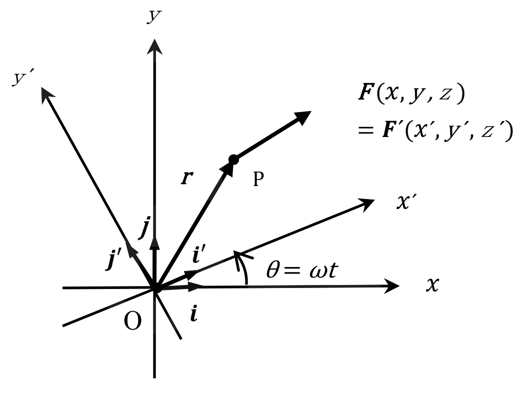

図 12 回転座標系

この座標系での質量 m の粒子の運動を考える。粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。慣性系での運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}\tag{1}$$

粒子に働く力 $\boldsymbol{F}$ はどちらの座標系でも変わらず,

$$\boldsymbol{F}=F_x\,\boldsymbol{i}+F_y\,\boldsymbol{j}+F_z\,\boldsymbol{k}$$
$$=F_x'\boldsymbol{i}'+F_y'\boldsymbol{j}'+F_z\,\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{F}'$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$：慣性系の直交座標系の基底

$\boldsymbol{i}'$,$\boldsymbol{j}'$,$\boldsymbol{k}'$：回転座標系の直交座標系の基底

の関係がある。また,

$$F_x'=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta$$
$$F_y'=F_x\sin\theta+F_y\cos\theta\tag{2}$$
$$(\ \theta=\omega t\ )$$

$$F_z' = F_z$$

の関係がある。

粒子の位置座標は

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$
$$z = z'.$$

これと慣性系での運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x\ ,\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y\ ,\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z$$

から，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} - 2m\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\omega - mx'\omega^2$$
$$= F_x\cos\theta + F_y\sin\theta$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} + 2m\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\omega - my'\omega^2$$
$$= -F_x\sin\theta + F_y\cos\theta$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} = F_z'$$

となる。式 (2) を考慮し，方向と大きさを表す(位置は言わない)角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}\,(0,0,\omega)$ を用いて，

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}' + 2m\,(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}) + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{\omega}$$

粒子の位置ベクトル： $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$

となる。回転座標系では運動方程式は成り立たないが，運動法則の形にすると，実際の力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$ の他に

$$2m(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}) + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{\omega}$$

の力が働いているように見え，慣性力となる。前の項をコリオリ力といい，回転座標系で $\boldsymbol{v}'$ の速度をもつ物体に対する慣性力である。後の項を遠心力という。

さらに一般の三次元回転座標系の場合を考えると，回転軸上の一点を慣性系の原点とし，原点を同じにした軸の周りを回転する一定の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}\,(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ の座標系でも，粒子の運動に対して

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}' + 2m\,(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\omega}) + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{\omega}$$

の関係が成り立つ。

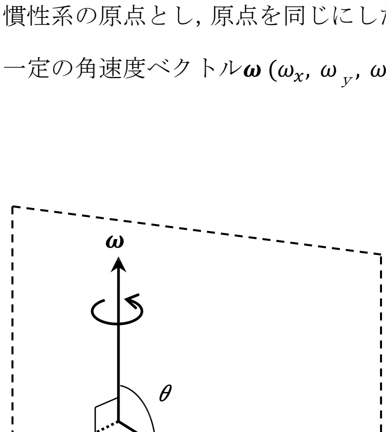

図 13　コリオリカ

○相対性理論

特殊相対性理論

特殊相対性理論は，

・物理法則はすべての慣性系に対して同じ形になる。[相対性原理]

・光の速度は光源の運動にかかわらず一定である。[光速度不変の原理]

を原理として，理論を展開したものである。

2 つの慣性系を S, S′ (S′系 は S 系に対して x 軸方向に一定の速度 v で移動)とする。ある物理的現象が起きたことを時刻（時計）と場所（物差し）で示し，事象という。事象を点 P（世界点)で表し，S 系で P (x, y, z, t) ，S′系で P (x', y', z', t') と表す。(ｉの方式)

上述の原理から光速は常に一定の値 c となる。このため，図 14 の O と O′が一致したとき $t = t' = 0$ で光が原点から放射され P に達したとすると，

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2\,t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0.$$

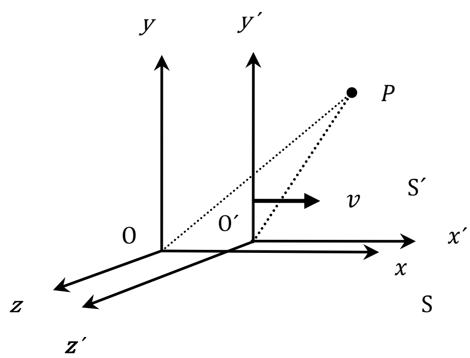

図 14

このため S 系と S′系との時空の関係は，

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ y' = y\ ,\ \ z' = z\ ,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

または，v を $-v$ と置いて，座標のプライムを付け替えて

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ y = y'\ ,\ \ z = z'\ ,\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

となり，ローレンツ変換とよばれる。また，

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$
$$= c^2\,t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

とすると，s あるいは s^2 は，S 系と S′系どちらの座標系でも同じ値となり，ローレンツ変換に対する不変量である。また，ローレンツ変換は s^2 を不変に保つ変換ともいえる。

粒子の運動に対する世界点の変化(世界線という)に沿っての s の微小変化 dsの二乗は両座標系において

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$
$$= c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2$$

となり，ds と dτもローレンツ変換に対し不変となる。このため，dsを世界線の長さという。dτは，粒子が静止している座標系での時間間隔で固有時という。光に対しては d$s^2 = 0$ ，粒子の運動に対しては d$s^2 > 0$ となる。

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\ \mathrm{d}t$$

相対性理論では慣性系での時空中の二点間の微小距離 dsを

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$
$$= (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2$$

と定義する。（添え字については，$A^0 = A_0$，$A^1 = -A_1$，$A^2 = -A_2$，$A^3 = -A_3$と定義する。$\sum_\mu A_\mu A^\mu = = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$）

物理では物理的変化量をごく小さい領域での変化を考え，微分で表すことが多い。(微分形) それから積分を用いて広い領域での変化を求める。また，座標(x, y, z) は位置ベクトルの成分として原点に関係するが，微分形（$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$)は，原点に関係しないベクトルとなる。位置ベクトルは束縛ベクトルとよばれ，特別なベクトルである。相対性理論では速度や運動量などの物理量は時空での 4 成分を持ち，S 系から S′系への座標変換に対しローレンツ変換されるベクトル（4 元ベクトルという）として扱う。

物体の速度については，S 系に対しx軸方向に速度 V で物体が動くとき，S′系での速度V'は， ローレンツ変換から

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

また，

$$V = \frac{\mathrm{d}x}{dt}$$

より

$$V' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

となる。

・相対論的運動方程式

特殊相対性理論では法則の形は，ローレンツ変換に対して同じ形にならなければならない。ニュートンの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

はこの要請を満たさない。

注意）ローレンツ変換は，座標系の変換である S 系と S′系の変換に伴い相対性理論において適用される同一の世界点の時空座標の変換である。

非相対論的近似 $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$ では

$$x' = x - vt,\ t' = t$$

と，ガリレイ変換になる。

相対性原理を満たす相対論的運動方程式は，次のようである。

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{d\tau} = f^\mu\ \ (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

p^μ は 4 元運動量と言い，

$$(p^0, p^1, p^2, p^3)$$
$$= \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)$$

である。4 元力f^μは

$$(f^0, f^1, f^2, f^3)$$
$$= \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \frac{F_x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)$$

また，$\mu = 0$ の場合の式は，

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{C}\right)^2}}$$

と関係している。この式は，種々の形態を持つエネルギーは質量を持ち，また，質量はいろいろなエネルギーに転化されることを示す。

・電磁場のローレンツ変換

次のマクスウェル方程式

$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x},t)$ 電場のガウスの法則

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0$ 磁場のガウスの法則

$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$ ファラデ－の法則

$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$ アンペール-マクスウェルの法則

は，ローレンツ変換に対して同じ形になり，これは次のことを用いて示される：

マクスウェル方程式で物理量や座標に ′ を付けた S′系での方程式において，偏微分の変数変換の公式 による

$$F = F(x,t),\ x = x(x', t'),\ t = t(x', t')$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

また、ローレンツ変換から

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{v}{c^2}$$

これらから

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}\ .$$

さらに，S 系と S′系での電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ についての次の関係

$$E_x' = E_x,\ E_y' = \frac{(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\ E_z' = \frac{(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$B_x' = B_x,\ B_y' = \frac{\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ B_z' = \frac{\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

を用いる。これらにより，マクスウェル方程式の ′ の付かない S 系での方程式が導かれ，方程式の形が変わらないことが示される。

上式は，x軸方向にvで進む座標系に対するものであるが，一般に，非相対論的近似 $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$ では，

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\ .$$

また，S 系で速度 $\boldsymbol{V}$で運動している荷電粒子の電磁場中での荷電粒子の運動方程式は，

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})$$

S′系で

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'^2} = q\,(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{B}')$$

となる。

一般相対性理論

一般相対性理論は，慣性系以外の任意の座標変換に対する法則の変換性を論じたものである。マクスウェル方程式は電磁気力に関する法則であり，一般相対性理論は，重力に関して展開したものである。すなわち，

・どのような座標系（慣性系や加速度系を含む）でも物理法則は同じ形で表される。［一般相対性原理］

・慣性力 (加速度系で現れる見かけの力)と重力とは本質的には区別できない。

・適当な加速度系を取れば重力の影響をなくすことができ，重力が働かない場合は特殊相対論が成り立つ。

を原理として，理論を展開したものである。

ニュートンの万有引力

$$F = -\,G\frac{Mm}{r^2}$$

G：万有引力定数

は，特殊相対論により光速より早く伝わるものはないことから，離れた物体間で働く力は場を介在して伝わると考え，場によって記述される。(近接作用)　すなわち，片方の物体によりその周りに力の場ができ，もう一方の物体をその位置に置いたとき場により力を受ける。この力の場をポテンシャル（位置エネルギーと関係）$\Phi(\boldsymbol{r})$で表し，

$$\boldsymbol{F} = -m\nabla\Phi(\boldsymbol{r})\ ,\ \nabla \equiv \boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -G\frac{M}{r}.$$

また，この万有引力(重力)の場は次の方程式を満たす。

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r})$$

アインシュタインは，これに対応した相対性理論での重力の場の方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

を導き，これをアインシュタインの重力方程式という。左辺が時空の歪み，右辺はそれを生じる物質に関する量である。 g_{ij}を計量テンソルと言う。R_{ij}はリッチテンソル，Rはスカラー曲率，T_{ij}はエネルギー運動量テンソルである。物体はこの式で決まる時空の歪みに沿って運動する。

ローレンツ変換に対する不変量 $\mathrm{d}s$は，非慣性系をこれにより現れる慣性力が重力を打ち消すようにとり，この非慣性系に座標変換した場合やはり不変で，

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

となる。

近接した二点間の距離 $\mathrm{d}s$ は，斜交軸に変換する場合，

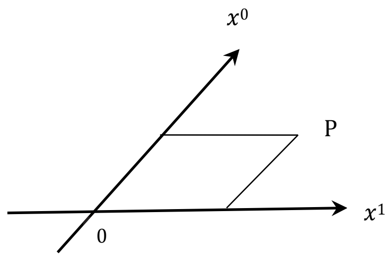

図 15 斜交軸

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

と表される。g_{ij}は斜交軸の角度に依存する。このように，g_{ij}は座標系の変換に対して変わる。曲線座標にも一般化し，計量テンソルは曲面の形状を定め，時空の歪みを扱う一般相対性理論で用いられる。時空の歪みは，次元を１つあげた時空での曲線座標で表すことができる。たとえば，２次元の球面は 3 次元の球座標で表される。アインシュタインの重力方程式を解いて得られる g_{ij}から時空の歪みが求められる。

計量テンソルは重力場を表す。すなわち，一般相対性理

論は，加速度系での慣性力と重力を結び付け，一般の座標変換によって物理法則を求め，重力場を時空の歪みと結び付けたものである。

〇ゲージ変換

電子などの荷電粒子と電磁場との相互作用について，シュレーディンガー方程式（時間を含む）

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

において系のハミルトニアン H は，

$$H = \frac{1}{2m}(p-qA)^2 + q\Phi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - qA)^2 + q\Phi \quad (1)$$

H：エネルギー演算子

となる。$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\Phi}$ を電磁ポテンシャルといい，

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi\ ,\ \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}. \quad (2)$$

波動関数 ψ は

$$\psi' = e^{iu/\hbar}\psi \quad (3)$$

と変換しても，観測量と関係した $|\psi'|^2$ は $|\psi|^2$ と変わらない。また，電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\Phi}$ を

$$qA' = qA + \nabla u\ ,\ q\Phi' = q\Phi - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

と変換しても(2)から得られる電場と磁場は変わらない。$\psi \to \psi'$，$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$，$\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Phi}'$ とすることをゲージ変換という。さらに，この変換で方程式は

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - qA')^2 + q\Phi'\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

となり，ゲージ変換に対し方程式の形は変わらない。

電磁ポテンシャルと波動関数は任意性があり，お互いに(3)･(4)のような関係がある。ゲージ変換に対し相互作用を表す方程式の形が変わらないというゲージ変換の理論は粒子と場との相互作用を決める理論に使われる。