光直交符号の探索について

On a Result of a Search for Optical Orthogonal Codes

寺嶋 健一
TERASHIMA, Kenichi
東京理科大学大学院理工学研究科

宮本 暢子
MIYAMOTO, Nobuko
東京理科大学理工学部

篠原 聡
SHINOHARA, Satoshi
明星大学情報学部

要旨

光直交符号を構成する方法としては、組合せデザインや有限射影幾何を利用したものが知られている。本論文では、Alem-Karladani and Salehi [1] で提案された、光直交符号の探索方法に基づいて、符号長が $n \leq 50$ でハミング重みが $w = 2, 4, 5, 6$ であるような符号を計算機により求めた。これにより，先行研究の調査では存在が明らかではなかったパラメータの符号をいくつか求めることが出来た.

1 はじめに

光直交符号 (Optical Orthogonal Code: OOC) とは、次の 2 つの特性を満たす一定なハミング重み w を持つ長さ n の $(0,1)$-sequences の集まり $\mathcal{C}$ のことである。

- (auto-correlation property) 任意の符号語 $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{C}$ と任意の整数 $\tau \neq 0 \pmod n$ に対し、

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i \oplus \tau} \leq \lambda_a$$

- (cross-correlation property) 任意の異なる符号語 $x, y \in C$ と任意の整数 $\tau \neq 0 \pmod n$ に対し、

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_{i \oplus \tau} \leq \lambda_c$$

ここで $\oplus$ は n を法とする加法を表す。このような光直交符号を $(n, w, \lambda_a, \lambda_c)$-OOC と書き、特に $\lambda_a = \lambda_c = \lambda$ のときは (n, w, λ)-OOC と表す。

符号語の表記として 1 の位置を並べて表わすこともある。すなわち、符号語 $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ の集合論的表記として $X = \{k : x_k = 1\}$ と書くことができる。この集合論的表記を用いると、光直交符号の 2 つの条件は次のようにも書くことができる。

- (auto-correlation property) 任意の符号語 $X \in \mathcal{C}$ と任意の $a \neq b \pmod n$ なる整数 a と b に対し、

$$|(a \oplus X)| \cap |(b \oplus X)| \leq \lambda_a$$

- (cross-correlation property) 任意の異なる符号語 X,$Y \in \mathcal{C}$ と任意の整数 a と b に対し、

$$|(a \oplus X)| \cap |(b \oplus Y)| \leq \lambda_c$$

ここで、$a \oplus X$ は $\{a \oplus x; x \in X\}$ を表し、$|X|$ は集合 X の基数を表す。

光直交符号は主に、光ファイバーを介した通信において符号分割多元接続 (Code Division Multiple Access: CDMA) を実現するために用いられる。実用上、光直交符号の符号語はできるだけ多いことが望ましいとされる。そこで、可能な最大数の符号語を持つような光直交符号を *optimal* であるといい，optimal な光直交符号を構成することが一つの目標となる。$(n, w, \lambda_a, \lambda_c)$-OOC の符号語の最大数を $\Phi(n, w, \lambda_a, \lambda_c)$ と表すとき、$\lambda_a = \lambda_c = \lambda$ なる (n, w, λ)-OOC に対して、符号語数についての上限式が constant weight code に対する Johnson bound により以下のように導かれている。

$$\Phi(n, w, \lambda) \leq \lfloor \frac{1}{w} \lfloor \frac{n-1}{w-1} \lfloor \cdots \lfloor \frac{n-\lambda}{w-\lambda} \rfloor \cdots \rfloor \rfloor \rfloor \tag{1}$$

光直交符号を構成する方法としては、組合せデザインや有限射影幾何を利用したものが知られている。特に任意の符号長 n に対して符号重み $w = 3$ の場合は、optimal OOC の存在性およびその構成法が明らかになっているが、$w \geq 4$ の場合は、未解決な部分も多い。本論文では、Alem-Karladani and Salehi [1] で提案された OOC の探索方法に基づいて、$n \leq 50$ に対する $w = 2, 4, 5, 6$ の OOC の符号語を計算機により求める。

2　符号語の探索アルゴリズム

本節では Alem-Karladani and Salehi [1] の探索法について解説する.

$(n, w, \lambda_a, \lambda_c)$-OOC の符号語は $\binom{n}{w}$ 個の長さ n、重み w の $(0, 1)$-sequences からなる空間に存在すると考えることができる。光直交符号の巡回的な性質から符号語として先頭の要素が”1” のものを考えればよく、長さ n、重み w で先頭の要素が 1 である全ての $(0, 1)$-sequences を $S_{n,w}$ と表わすことにすると，$S_{n,w}$ は符号語の探索空間と言える。

Definition 1.

$$S_{n,w} \triangleq \left\{1x_1x_2 \cdots x_{n-1}; x_i \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^{n-1} x_i = w - 1\right\}$$

$S_{n,w}$ の集合論的表記は、固定要素として 0 を含み、要素数が w となる Z_n の全ての部分集合の集まりである。よって $S_{n,w}$ の元の個数は次のようになる。

$$|S_{n,w}| = \binom{n-1}{w-1}$$

Π_n を n より小さい n と互いに素な整数の集合とし，$\odot$ を n を法とする乗法の二項演算子とする。このとき、代数系 $(\Pi_n, \odot)$ は位数 $\phi(n)$ の乗法群をなす。ただし $\phi(n)$ は n と互いに素な $1 \leq m < n$ なる整数 m の個数を表すものとする。

Definition 2. G を群、S を集合とする。G の S への群作用とは、次の 2 つの性質を満たす写像 $f : G \times S \to S$ のことである。ここで、e は G の単位元である。

- $f(e, s) = s \ (\forall s \in S)$
- $f(g_1 g_2, s) = f(g_1, f(g_2, s)) \ (\forall g_1, g_2 \in G, \forall s \in S)$

Theorem 3 ([1])**.** 次の写像は乗法群 Π_n の $S_{n,w}$ への群作用である。

$$\begin{aligned} f &: \Pi_n \times S_{n,w} \to S_{n,w} \\ f(g, X) &= g \odot X \triangleq \{g \odot 0, g \odot k_1, \cdots, g \odot k_{w-1}\} \end{aligned}$$

ここで、$g \in \Pi_n$、$X = \{0, k_1, \cdots, k_{w-1}\} \in S_{n,w}$ である。

乗法群 Π_n の $S_{n,w}$ への群作用を用いて、$S_{n,w}$ 上の二項関係を次のように定義する。

Definition 4. $X, Y \in S_{n,w}$ に対して、$X = g \odot Y$ となる $g \in \Pi_n$ が存在するとき、X と Y は関係があるといい、$X \sim Y$ と表す。

この二項関係は $S_{n,w}$ 上の同値関係であり、$S_{n,w}$ を同値類へ分割することができる。このとき、同値類は $[X] = \{Y \in S_{n,w}; Y \sim X\}$ と定義され、X を同値類 $[X]$ の代表元、$S_{n,w}$ の全ての同値類の集合を商集合と呼び、$S_{n,w}/\Pi_n$ と表す。同値類 $[X]$ が $\phi(n)$ 個の要素をもつとき、*complete* であるといい、そうでないときは *incomplete* であるという。

Theorem 5 ([1])**.** n が素数のとき、商集合 $S_{n,w}/\Pi_n$ に含まれる同値類の総数は、

$$|S_{n,w}/\Pi_n| = \sum_{\substack{d|(n-1) \\ d|(w-1)}} \binom{\frac{n-1}{d}}{\frac{w-1}{d}} \frac{\phi(d)}{n-1}$$

である。

Definition 6. 次の式を満たす $g \in \Pi_n$ が存在するとき、$\mathbf{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$ は $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ の乗法的置換であるという。

$$y_k = x_{k \odot g} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

このとき、$\mathbf{y} = \mathbf{x} \odot g$ と表す。

Theorem 7 ([1])**.** X と Y が、それぞれ $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y} = \mathbf{x} \odot g$ の集合表記であるとき、$Y = g' \odot X$ である。ここで、g' は $g \in \Pi_n$ の逆元である。

同じ同値類に含まれる全ての符号語は同じ自己相関のパターンを持ち、符号語 $\mathbf{x}$ に対して、ある自己相関特性が成り立てば、同値類 $\{\mathbf{x} \odot g; g \in \Pi_n\}$ に含まれる全ての符号語に対しても同じ特性が成り立つ。以上より、符号を探索する際に、自己相関 λ_a を満たす代表元のみを残し、満たさない代表元は除去することにより探索する空間を狭めることができる。

次に、相互相関 λ_c を以下のように 2 つに分類する。同じ同値類に含まれる異なる符号語間の相互相関を**クラス内相互相関** *(intraclass cross correlation)* といい、異なる同値類に含まれる符号語間の相互相関を**クラス間相互相関** *(interclass cross correlation)* という。

Theorem 8 ([1]). 符号語 $\mathbf{y} = \mathbf{x} \odot r$ と $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot s$ 間の相互相関は符号語 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x} \odot s \odot r'$ 間の相互相関と同じパターンを持つ。ただし、このとき r' は Π_n における r の逆元とする。

同値類 $[X]$ に K 個の符号語が含まれているとする。このとき、$[X]$ クラス内相互相関は $\binom{K}{2}$ 通り考えなければならないが、Theorem 8 より代表元 X と、同値類 $[X]$ の X 以外の $K-1$ 個の符号語との相互相関を調べれば十分である。

Theorem 9 ([1]). 符号語 $\mathbf{u} = \mathbf{x} \odot r \in [X]$ と $\mathbf{v} = \mathbf{y} \odot s \in [Y]$ に対し、$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のクラス間相互相関は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y} \odot s \odot r'$ の相互相関と同一のパターンを持つ。ここで、r' は $r \in \Pi_n$ の逆元である。

ある 2 つの同値類 $[X]$ と $[Y]$ がそれぞれ K_1、K_2 個の符号語を持つとする。このとき、$[X]$ と $[Y]$ の符号語間には K_1K_2 個のクラス間相互相関があるが、Theorem 9 より、$\min\{K_1, K_2\}$ 通りの相関を調べればよい。

これらの結果を用いることにより、以下のような $(n, w, \lambda_a, \lambda_c)$-OOC の探索方法が考えられる。

(1) 長さ n、重み w となる符号語の集合 $S_{n,w}$ を考える。
(2) $S_{n,w}/\Pi_n$ を定める。
(3) 全ての同値類の代表元の自己相関を求め、条件を満たす同値類の符号語のみを探索対象とする。
(4) (3) で与えられた符号語に対し、クラス内相互相関およびクラス間相互相関を求める。
(5) (3) で与えられた自己相関 λ_a を満たす全ての符号語を頂点 V とし、(4) により求められる相互相関についての条件を満たす頂点間を辺で結んだグラフを考える。このグラフに対する最大クリーク問題の解が最適な $(n, w, \lambda_a, \lambda_c)$-OOC に対応する。

3 探索結果

存在性が知られていないパラメータをもつ $(n, w, 1)$-OOC に対しての探索結果を述べる。重み 2 の結果が表 3、重み 4 の結果が表 2、重み 5 の結果が表 3、重み 6 の結果が表 4 である。ここで、Φ は式 (1) で与えられる上限値であり、“-” は探索した結果条件を満たす符号語が存在しなかったことを示す。

重みが 2 であるような OOC について、$n \leq 50$ で存在が不明であったのは $n = 20, 32, 44, 50$ である。これらのすべての n において、表 3 のように、式 (1) による Φ の上限を達成するような符号が得られた。

重みが 4 のときは、表 2 で与えられる n が $n \leq 50$ の範囲でこれまで存在性が示されていなかった符号長である。探索結果により、表 2 の範囲では $n = 25$ のときのみ Φ の上限値を達成するような符号が得られないことが分かった。

重みが 5 のときは、探索結果から表 3 の $n = 22$ に対しては符号が存在せず、$41 \leq n \leq 50$ なる n に対して $n = 42$ の場合のみ符号語数が 1 であり、それ以外の場合には上限値に達することがわかった。

重みが 6 のときは、表 4 で示されるように、$n = 32, 33, 34$ のときに符号が存在しないことが分

n	Φ	符号語
20	9	$\{0,11\}$, $\{0,13\}$, $\{0,17\}$, $\{0,19\}$, $\{0,14\}$, $\{0,18\}$, $\{0,8\}$, $\{0,16\}$, $\{0,15\}$
32	15	$\{0,17\}$, $\{0,19\}$, $\{0,21\}$, $\{0,23\}$, $\{0,25\}$, $\{0,27\}$, $\{0,29\}$, $\{0,31\}$, $\{0,18\}$, $\{0,22\}$, $\{0,26\}$, $\{0,30\}$, $\{0,20\}$, $\{0,28\}$, $\{0,24\}$
44	21	$\{0,23\}$, $\{0,25\}$, $\{0,27\}$, $\{0,29\}$, $\{0,31\}$, $\{0,35\}$, $\{0,37\}$, $\{0,39\}$, $\{0,41\}$, $\{0,43\}$, $\{0,26\}$, $\{0,30\}$, $\{0,34\}$, $\{0,38\}$, $\{0,42\}$, $\{0,8\}$, $\{0,16\}$, $\{0,24\}$, $\{0,32\}$, $\{0,40\}$, $\{0,33\}$
50	24	$\{0,27\}$, $\{0,29\}$, $\{0,31\}$, $\{0,33\}$, $\{0,37\}$, $\{0,39\}$, $\{0,41\}$, $\{0,43\}$, $\{0,47\}$, $\{0,49\}$, $\{0,4\}$, $\{0,8\}$, $\{0,12\}$, $\{0,16\}$, $\{0,24\}$, $\{0,28\}$, $\{0,32\}$, $\{0,36\}$, $\{0,44\}$, $\{0,48\}$, $\{0,35\}$, $\{0,45\}$, $\{0,20\}$, $\{0,40\}$

表 1　$(n,2,1)$-OOC の探索結果

n	Φ	符号語
17	1	$\{0,1,3,7\}$
20	1	$\{0,1,3,7\}$
21	1	$\{0,1,3,7\}$
22	1	$\{0,1,3,7\}$
23	1	$\{0,1,3,7\}$
25	2	$\{0,1,3,7\}$
27	2	$\{0,1,3,11\}$, $\{0,5,12,18\}$
29	2	$\{0,1,3,11\}$, $\{0,7,12,16\}$
32	2	$\{0,1,3,8\}$, $\{0,6,15,28\}$
33	2	$\{0,1,3,11\}$, $\{0,7,19,24\}$
34	2	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,13,23\}$
35	2	$\{0,1,3,8\}$, $\{0,4,13,25\}$
36	2	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,15,24\}$
37	3	$\{0,1,3,24\}$, $\{0,4,9,15\}$, $\{0,7,17,25\}$
40	3	$\{0,1,3,9\}$, $\{0,4,11,25\}$, $\{0,5,17,27\}$
41	3	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,15,27\}$, $\{0,8,17,28\}$
44	3	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,13,28\}$, $\{0,9,19,33\}$
46	3	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,13,27\}$, $\{0,9,20,30\}$
47	3	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,13,22\}$, $\{0,10,21,33\}$
48	3	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,13,22\}$, $\{0,10,21,33\}$
49	4	$\{0,1,3,8\}$, $\{0,4,18,29\}$, $\{0,9,19,32\}$, $\{0,6,21,33\}$
50	4	$\{0,1,3,7\}$, $\{0,5,17,35\}$, $\{0,8,22,31\}$, $\{0,10,21,34\}$

表 2　$(n,4,1)$-OOC の探索結果

n	Φ	符号語
21	1	$\{0,1,4,14,16\}$
22	1	–
23	1	$\{0,1,3,8,14\}$
24	1	$\{0,1,3,9,20\}$
26	1	$\{0,1,3,7,12\}$
27	1	$\{0,1,3,7,12\}$
28	1	$\{0,1,3,7,12\}$
29	1	$\{0,1,3,7,12\}$
30	1	$\{0,1,3,7,12\}$
32	1	$\{0,1,3,7,12\}$
33	1	$\{0,1,3,7,12\}$
34	1	$\{0,1,3,7,12\}$
35	1	$\{0,1,3,7,12\}$
36	1	$\{0,1,3,7,12\}$
37	1	$\{0,1,3,7,12\}$
38	1	$\{0,1,3,7,12\}$
39	1	$\{0,1,3,7,12\}$
40	1	$\{0,1,3,7,12\}$
41	2	$\{0,1,4,11,29\},\{0,2,8,17,22\}$
42	2	$\{0,1,3,7,12\}$
43	2	$\{0,1,3,7,19\},\{0,5,13,22,33\}$
44	2	$\{0,1,3,28,40\},\{0,6,14,24,35\}$
45	2	$\{0,1,3,7,19\},\{0,5,14,22,35\}$
46	2	$\{0,1,3,8,17\},\{0,4,10,22,35\}$
47	2	$\{0,1,3,7,32\},\{0,5,14,24,35\}$
48	2	$\{0,1,3,7,15\},\{0,5,16,25,35\}$
49	2	$\{0,1,3,7,16\},\{0,5,17,25,35\}$
50	2	$\{0,1,3,7,18\},\{0,5,13,29,41\}$

表 3　$(n,5,1)$-OOC の探索結果

n	Φ	符号語
31	1	$\{0,1,3,8,12,18\}$
32	1	–
33	1	–
34	1	–
35	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
36	1	$\{0,1,3,8,23,27\}$
37	1	$\{0,1,3,7,16,26\}$
38	1	$\{0,1,3,7,17,30\}$
39	1	$\{0,1,3,7,12,22\}$
40	1	$\{0,1,3,7,17,28\}$
41	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
42	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
43	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
44	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
45	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
46	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
47	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
48	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
49	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$
50	1	$\{0,1,3,7,12,20\}$

表 4　$(n,6,1)$-OOC の探索結果

かった。

最後に、$(n,4,2,1)$-OOC の探索結果を述べる。表 5 が得られた結果である。このパラメータの OOC については、Momihara and Buratti [10] により，(1) 式で与えられる Johnson bound より tight な上限式が与えられており，表 5 中で * で示す $n = 10,20,26,28,34$ の OOC が $n < 40$ の範囲で求められている。表 5 の Φ の列には，Momihara and Buratti [10] より得られる符号語数の上限を示した。$n = 14,18,24,27,32,33$ においては，この上限値を達成するような符号が見つけられなかった．しかしながら，少なくとも今回探索した符号長の範囲においては，Φ の値が実際の符号語数に非常に良く適合しており，彼らの上限式の優秀さを裏付けていると言えるだろう。また，$n = 20$ のときの符号は Momihara and Buratti [10] でも与えられており，その符号語数は 2 であったが，今回の探索の結

果，符号長がより短い $n = 17$ でも符号が求められた。同様に，符号語数が 3 の符号の最小の符号長が $n = 25$ で与えられることも分かった。同じ符号語数を持つならば、符号長が短いほうが効率的な符号であると考えることもできる。探索的に符号を調査していく事により、この例のように、短い符号長を持つ符号が存在することが示される可能性もあると言えるだろう.

n	Φ	符号語
7	1	$\{0,1,2,4\}$
8	1	$\{0,1,2,4\}$
9	1	$\{0,1,2,4\}$
10*	1	$\{0,1,2,4\}$
11	1	$\{0,1,2,4\}$
12	1	$\{0,1,2,4\}$
13	1	$\{0,4,7,12\}$
14	2	$\{0,1,2,4\}$
15	1	$\{0,1,2,4\}$
16	2	$\{0,1,2,4\}$
17	2	$\{0,1,2,4\},\{0,2,8,10\}$
18	2	$\{0,1,2,4\}$
19	2	$\{0,1,4,5\},\{0,2,8,10\}$
20*	2	$\{0,1,2,11\},\{0,3,7,15\}$
21	2	$\{0,1,2,6\},\{0,8,11,18\}$
22	2	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\}$
23	2	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\}$
24	3	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\}$
25	3	$\{0,1,4,22\},\{0,2,10,12\},\{0,5,11,16\}$
26*	3	$\{0,1,2,14\},\{0,3,7,10\},\{0,5,11,20\}$
27	3	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\}$
28*	3	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,19\},\{0,6,13,21\}$
29	3	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,17\},\{0,6,14,20\}$
30	3	$\{0,1,2,4\},\{0,5,11,17\},\{0,7,14,22\}$
31	3	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,18\},\{0,6,15,22\}$
32	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\},\{0,7,15,24\}$
33	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,17\},\{0,6,14,20\}$
34*	4	$\{0,1,2,18\},\{0,3,7,30\},\{0,5,15,24\},\{0,6,12,20\}$
35	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,19\},\{0,6,12,23\},\{0,7,15,22\}$
36	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,12,27\},\{0,6,17,23\},\{0,8,16,26\}$
37	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,18\},\{0,6,17,23\},\{0,7,16,28\}$
38	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\},\{0,7,14,26\},\{0,8,17,25\}$
39	4	$\{0,1,2,4\},\{0,5,10,16\},\{0,7,19,26\},\{0,8,17,25\}$

表 5　$(n,4,2,1)$-OOC の探索結果

参考文献

[1] M.M. Alem-Karladani And J.A. Salehi, “Spectral Classification and Multiplicative Partitioning of Constant-Weight Sequences Based on Circulant Matrix Representation of Optical Orthogonal Codes”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.56, pp.4659-4667, 2010.

[2] X. An And K. Qiu, “Construction for Optimal Optical OrthogonaL Codes”, *IEEE 2002 Int. Conference on Communications, Circuits and Systems and West Sino Expositions*, pp.96-100, 2002.

[3] C.M. Bird and A.D. Keedwell, “Design and Applications of Optical Orthogonal codes - a Survey ”, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, vol.11, pp.21-44. 1994.

[4] S. Bitan and T. Etzion, “On Constructions for Optimal Optical Orthogonal Codes ”, *Springer-Verlag's Lecture Notes in Computer Science*, vol.781, pp.111-125, 1994.

[5] Y. Chang and J. Yin, “Further Results on Optimal Optical Orthogonal Codes with Weight 4 ”, *Discrete Math.*, vol.279, pp.135-151, 2004.

[6] F.R.K. Chung,J.A. Salehi,and V.K. Wei, “Optical Orthogonal Codes : Design, Analysis, and Applications ”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.35, pp.595-604, 1989.

[7] H. Chung and P.V. Kumar, “Optical Orthogonal Codes - New Bounds and an Optimal Construction ”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.36, pp.866-873, 1990.

[8] G. Ge and J. Yin, “Constructions for Optimal $(v, 4, 1)$ Optical Orthogonal Codes ”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.47, pp.2998-3004, 2001.

[9] S. Ma and Y. Chang, “Construction of Optimal Optical Orthogonal Codes with Weight Five ”, *J. Combin. Des.*, vol.13, pp.54-69, 2005.

[10] K. Momihara and M. Buratti, “Bounds and Constructions of Optimal $(n, 4, 2, 1)$ Optical Orthogonal Codes”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.55, pp.514-523, 2009.

[11] R. Omrani,O. Moreno,and P.V. Kumar, “Improved Johnson Bounds for Optical Orthogonal Codes With $\lambda > 1$ and Some Optimal Construction”, in *Pro. Int. Symposium on Information Theory*, pp.259-263, 2005.

[12] Y.X. Yang, “New Enumeration Results about the Optical Orthogonal Codes ”, *Inform. Process. Lett.*, vol.40, pp.85-87, 1991.