

# ロジスティック写像の多倍長計算による 軌道と真とみなせる軌道

A chaotic orbit of the logistic map calculated in  
multiple precision and the orbit that can be  
considered true

矢吹道郎

土屋 尚

YABUKI, Michiro

TSUCHIYA, Takashi

明星大学情報学部

明星大学名誉教授

## 要旨

2進の多倍長ライブラリである MPFR を用い、真の軌道とみなすことのできる軌道を与えるステップ数と、仮数部のビット数との関係を明らかにする。その結果をもとに、仮数部のビット数が少なく、大きな誤差を持った軌道であっても、ロジスティック写像の分岐図におけるバンド領域、すなわち、カオスのアトラクタの領域においては、必ず真の軌道と同じバンドに留まる事を示す。これにより、Oteo と Ros が示した、倍精度による計算結果の誤差は必ずバンド幅の最大値となる理由を明らかにする。

## 1 はじめに

カオス理論において最も詳しく研究されている系と言えば、1次元非線形差分方程式の中でも最も単純であり、2次の非線形項しか持たないロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (1)$$

であろう。 $x_n$  は系の状態変数であり、単位区間内の値を取る。 $a$  は外部から制御できるパラメータで、通常  $0 < a \leq 4$  の範囲が与えられる。 $n$  は繰り返しの回数を数える整数変数である。この系は  $a$  の変化に応じて、そのみかけの単純さからは想像できない複雑な振舞を見せる。

カオスの特徴は初期条件の微小な違いに対する鋭敏な依存性である。式 (1) は、コンピュータで扱うのも簡単であるため、依存性を議論する際に非常によく使われる。しかし、コンピュータで計算されるロジスティック写像のカオス軌道は、対応する初期条件に対する数学的な真の軌道とは違わざるを得ない。従って、コンピュータにより算出された軌道は、いずれは真の軌道から大きく離れてしまう。

本論文では、2進の多倍長計算ライブラリである MPFR(Multiple-Precision Floating-Point Reliable Library)[3] を用いて、コンピュータにより計算されるロ

ジスティック写像の軌道、すなわちある有限精度による計算結果の軌道の正確さをより高い精度による軌道から離れるまでのステップ数で表す。この方法により、必要なステップ数まで真とみなせる軌道を描く仮数部ビット数を得る。次に、真とみなせる軌道から離れた軌道であっても、ロジスティック写像のバンドカオス領域においては、必ず真とみなせる軌道と同じバンドに留まる事を示す。これにより Oteo と Ros が示した、倍精度による計算結果の誤差は必ずバンド幅の最大値となる理由が明らかとなる。

## 2 多倍長計算ツールとしての MPFR

ロジスティック写像の真に近い軌道を求めるには、多倍長計算を行う必要がある。多倍長計算を行うものとしては、MPFUN[1]、Mathematica や古くは Unix の bc などがある。近年では、多倍長計算ライブラリとして、現在 GPL(General Public License) で配布されている、GMP(GNU Multiple Precision Arithmetic Library) [2]、及び、GMP をベースとした MPFR(Multiple Precision Binary Floating-Point Reliable Library)[3] がある。これら 2 進の多倍長計算ライブラリは、仮数部のビット数を指定することにより計算精度を指定する。

MPFR は GMP を拡張したライブラリで、GMP とは、ポータビリティを向上させたこと (結果がそのマシンのワードサイズに依存しない)、精度を変数ごとに正確にかつ自由に設定できること、IEEE754-1985[4] に準拠した 4 つの丸めモードを持つこと、計算速度の向上を図っていること、等の違いがある。

## 3 真とみなせるロジスティック写像の軌道

多倍長計算による計算の結果を議論するには、その結果がロジスティック写像の真の軌道の値に対してどの程度の正確さを持つのかの指標を持つ必要、すなわち、計算がいかなるステップ数まで正しい軌道を示すのか予め知る必要がある。ここでは MPFR を用いて、大きな仮数部の bit 長を持つ変数によるロジスティック写像の計算結果を基準として、より小さな仮数部を持つ変数による計算結果と比較する。

ここで仮数部に  $m$  bit を用いた場合の  $n$  ステップのロジスティック写像の結果を  $x_{n(m)}$  とし、基準精度を  $r$  bit として、 $m$  bit による結果が絶対許容誤差  $d$  以上離れた時のステップ数  $n_{max}$  を正確さの指標とすることにする。

以下に  $n_{max}$  が各条件によりどのように変化するかを示す。

### 3.1 $n_{max}$ の表式依存性

ロジスティック写像の数学的な表現は式 (1) である。一般に計算機による計算では、2 項の演算の結果はその順序に影響されないが、3 項以上の演算では順序により結果が異なる。このため、すべての計算順序を考慮すると、プログラム上でのロジスティック写像は、次の 6 つ異なる表式として表現可能となり、それぞれ計算結果が異なってくる。(ここではプログラムの表現に合わせて、積の演算子を \* と表記する。)

$$x_{n+1} = (a * x_n) * (1.0 - x_n) \quad (L1)$$

$$x_{n+1} = a * (x_n * (1.0 - x_n)) \quad (L2)$$

$$x_{n+1} = (a - a * x_n) * x_n \quad (L3)$$

$$x_{n+1} = a * (x_n - x_n * x_n) \quad (L4)$$

$$x_{n+1} = a * x_n - (a * x_n) * x_n \quad (L5)$$

$$x_{n+1} = a * x_n - a * (x_n * x_n) \quad (L6)$$

6つの式の違いを調べるために、基準精度  $r = 5000$ 、初期値  $x_0 = 0.1$ 、絶対誤差  $d = 0.0001$ 、 $a = 4.0$  とし、 $m = 53$ (仮数部 53bit、すなわち倍精度) とすると、すべての表式で  $n_{max} = 37$  が得られた。また、 $m = 1000$  とすると、表式 (L1)(L2)(L3) で  $n_{max} = 985$ 、表式 (L4)(L5)(L6) で  $n_{max} = 988$ 、 $m = 2000$  とすると、表式 (L1)(L2)(L3) で  $n_{max} = 1984$ 、表式 (L4)(L5)(L6) で  $n_{max} = 1993$  となった。よって、ここでは  $n_{max}$  の値の表式による違いについては議論しない。

### 3.2 $n_{max}$ の初期値依存性

正確さの初期値依存性を見るために、表式 (L1)、 $r = 5000$ 、 $m = 1000$ 、 $d = 0.0001$ 、 $a = 4.0$  とし、初期値  $0.033 \leq x_0 \leq 0.990$ 、刻み  $0.033$  とすると、 $983 \leq n_{max} \leq 991$  が得られた。 $n_{max}$  の値の違いは、約 1000 ステップに対して 8 ステップ程度の違いである。

### 3.3 $n_{max}$ の $a$ 依存性

表式 (L1)、 $r = 10000$ 、 $m = 1000$  および  $m = 1500$ 、 $d = 0.0001$ 、 $x_0 = 0.1$ 、とし、 $3.60 \leq a \leq 4.00$  とした場合の結果を図 1 に示す。横軸は仮数部の bit 数で、縦軸は  $n_{max}$  である。図 1 における  $a = 3.74$  付近と  $a = 3.85$  付近でのピークは窓の部分にあたり、周期軌道におちいるため値が正確であり続けている。また、fully developed chaos と言われる  $a = 4.0$  において、 $n_{max}$  は最小となっている。すなわち  $a = 4.0$  において最も早く真の軌道との差が現れることになる。

ここでは  $m = 1000$  の場合と  $m = 1500$  の場合を示したが、他の  $m$  においても、 $n_{max}$  は  $a = 4.0$  の時に最小となることは変わらない。図 1 は初期値  $x_0 = 0.1$  について示したが、1000 の異なる初期値の軌道についても  $n_{max}$  は  $a = 4.0$  の時に最小となることは変わらない事は確かである。

### 3.4 $n_{max}$ の許容誤差 $d$ 依存性

これまで絶対許容誤差として  $d = 0.0001$  を用いてきた。当然のことながら、この条件により  $n_{max}$  は異なってくる。

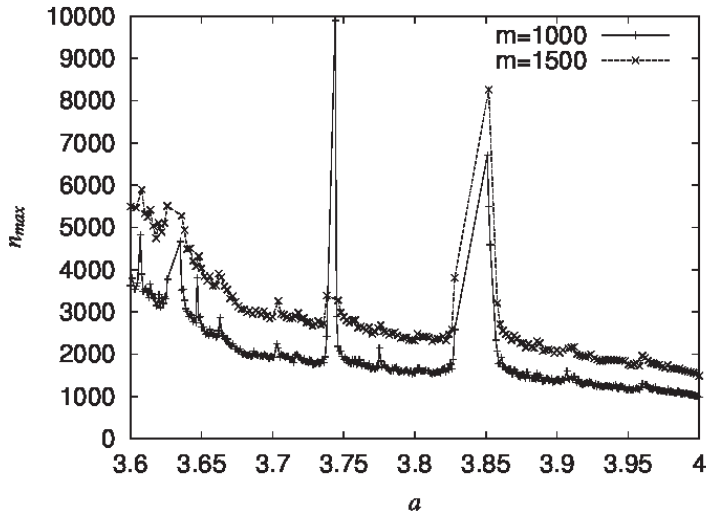


図1  $n_{max}$  の  $a$  依存性

表式 (L1)、 $r = 5000$ 、 $m = 1000$ 、 $a = 4.0$ 、 $x_0 = 0.1$  とし、 $d = 0.1$ 、 $d = 0.01$ 、 $d = 0.001$ 、 $d = 0.0001$  と変化させた場合、 $n_{max}$  は、それぞれ 990,985,985,980 であった。許容誤差を 3 桁変化させても  $n_{max}$  の変化は 10 ステップ程度であり少ない。すなわち、真の値から一旦離れ始めると急速に離れて行くという事実と合致している。

### 3.5 仮数部 bit 数 $m$ と $n_{max}$ の関係

前項までに  $n_{max}$  が様々なパラメータによってどの程度変化するかを見て来た。どれもステップ数に大きな違いはない事を示した。ここでは、 $d = 0.0001$ 、 $a = 4.0$  とし、仮数部の bit 数に対する  $n_{max}$  の変化を調べる。

基準精度  $r = 10000$  とし、初期値を  $x_0 = 0.011n (1 \leq n \leq 90)$ 、仮数部 bit 数  $m$  に対しての  $n_{max}$  の内の最小値をプロットした結果を図 2 に示す。ここでは  $100 \leq m \leq 9000$  の範囲で実験を行っている。図から分かるようにほぼ線形の結果となっている。最小二乗法を用いると、直線は

$$n_{max} = 0.999990m - 22.42 \quad (2)$$

と表される。 $m = 9000$  とすれば、 $n_{max} = 8977$  となる。すなわち、 $m$  bit の仮数部を用いれば、 $m - 23$  ステップは  $d = 0.0001$  の範囲で正しい軌道を取ると考える事ができる。

$r = 10000$  の 9000 ステップまでの軌道は  $r = 20000$  の軌道と差がなかった事から、9000 ステップまでの範囲で、真の軌道とみなせる事を確認した。

図 3 に  $d = 0.0001$  とし、 $a$  をパラメータとして  $n_{max}$  を示す。 $a = 4.0$  の場合が最

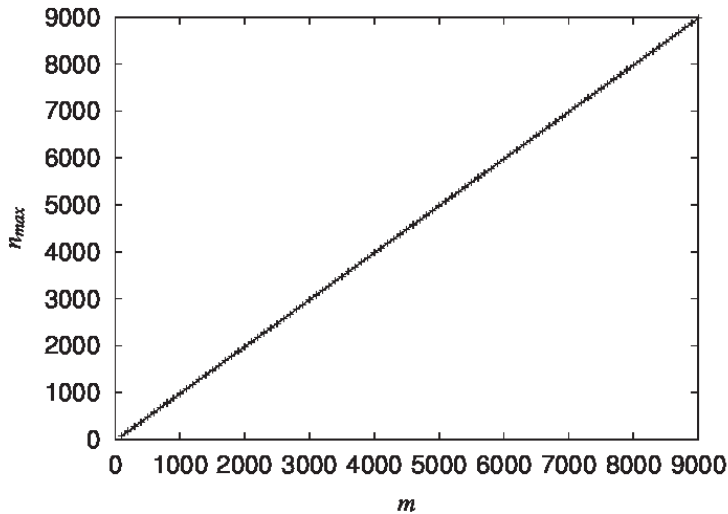


図2 仮数部ビット  $m$  数と信頼できるステップ数の関係 ( $100 \leq m \leq 9000$ )

も傾きが小さい事から、最も差が早く生じることが分かる。すなわち式 (2) は、他の  $a$  の値に対しても、問題がないことになる。

#### 4 真とみなせる軌道と分岐図

分岐図 (Bifurcation Diagram) は 1000~2000 ステップの結果を用いて描かれる事が多い。前節で示した指標を用いるならば、倍精度 ( $m = 53$ ) による計算では、最悪の場合  $53 - 23 = 30$  ステップで真の軌道から離れるため、真の軌道とは大きく離れた結果を用いて分岐図を描いていることになる。真の軌道に近い値 (例えば  $m = 10000$  による計算) を用いて分岐図を描いても、倍精度による計算結果で得られる分岐図と肉眼では見分けはつかない。

一方、真の軌道との差を議論することにより、さらに詳細な性質を理解する試みが Oteo と Ros によって行われている [5]。彼らは、MPFUN[1] というパッケージを用いて 10 進で 400 桁の精度を持つ変数を用い、1200 ステップ程度の計算結果について議論している。10 進 400 桁の精度を持つ変数は約 1300bit 程度の仮数部が必要になるので、我々の結果の  $1300 - 23 = 1277$  ステップに相当する。

Oteo と Ros は、分岐図におけるバンド (カオス的アトラクタ) の幅の最大値と、倍精度による計算結果の真の値からの差が一致することを示している。しかし、その理由は明らかにしていない。

以下で、この理由を明らかにする。分岐図が 2 つのバンドに分かれる領域である  $3.607 \leq a \leq 3.627$  の範囲における分岐図を初期値  $x_0 = 0.1015625$  として DP の

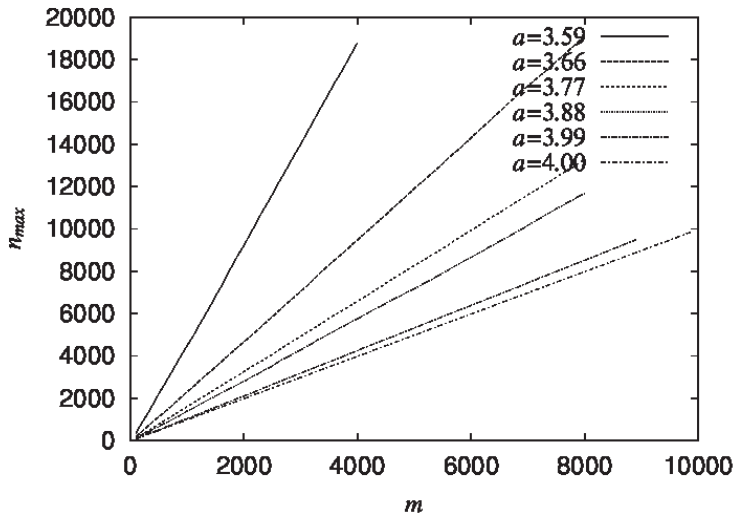


図3 仮数部ビット数  $m$  と信頼できるステップ数  $n_{max}$  の関係の  $a$  依存性 ( $100 \leq m \leq 9000$ ,  $d = 0.0001$ )

精度で計算した結果が図4と図5である。(0.1015625という値は、後の計算で仮数部5bitの計算と比較するため、仮数部が5bitでも正確に表される値として採用している。) 図4と図5では、最初の100000ステップを捨てて、100000ステップ～100060ステップまでの結果をを描いている。図4は奇数番目のステップのみをプロットしたもので、図5は偶数番目のステップのみをプロットしたものである。偶数ステップが上のバンドを、奇数ステップが下のバンドを形成していることが分かる。100000ステップ程度まで十分正確な軌道が保証される計算として  $m = 101000$  を取り、 $a = 3.625$ 、 $x_0 = 0.1015625$  の場合の軌道と倍精度 ( $m = 53$ ) の軌道を100001ステップから100060ステップまで示したのが、図6と図7である。(  $a = 3.625$  の値も5bitの仮数部で表現できる値として選んでいる。)

図6と図7をみると、真の軌道 ( $m = 101000$  による軌道) から大きく離れている倍精度  $m = 53$  による計算の100000ステップ以降であっても、真の軌道と同じバンドにあることが分かる。ここでは2バンドの領域での結果を示したが、4バンドの領域であっても同じである。ここには示さないが、倍精度 ( $m = 53$ ) の計算を1000000ステップ行っても、軌道がそれぞれのバンドから離れないことは確かである。すなわち、倍精度と真に近い軌道の差が最大となるのは、 $m = 101000$  と  $m = 53$  の軌道の値がそれぞれ最大幅のバンドの最大値と最小値を取る場合である。OteoとRosの結果である、「バンド幅の最大値と、倍精度による計算結果の真の値からの差が一致する」は、真の値から離れた軌道であっても、必ず真の軌道にあるバンドにある、という事実に他ならない。

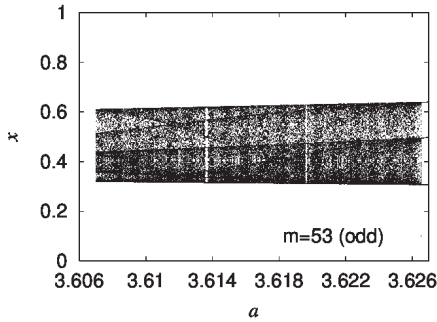


図4 2バンド領域の分岐図(奇数ステップ)( $m = 53$ (倍精度))

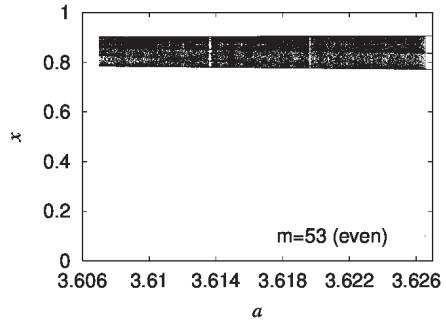


図5 2バンド領域の分岐図(偶数ステップ)( $m = 53$ (倍精度))

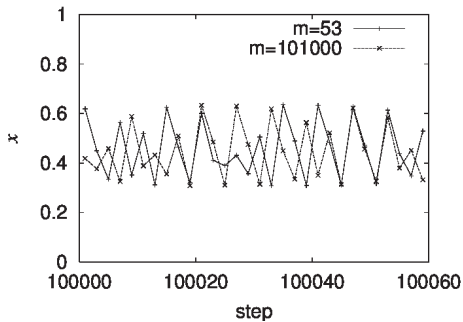


図6  $a = 3.625$ における  $m = 53$  と  $m = 101000$  の奇数ステップの軌道(100001~100059 ステップ)、 $x_0 = 0.1015625$

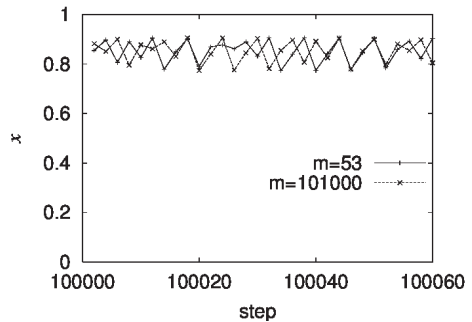


図7  $a = 3.625$ における  $m = 53$  と  $m = 101000$  の偶数ステップの軌道(100002~100060 ステップ)、 $x_0 = 0.1015625$

仮数部が5bit と言うような低精度の計算であっても上記の事実は変わらない。図8と図9に  $m = 5$  と  $m = 101000$  の結果を示す。

すなわち、ロジスティック写像のカオス軌道の計算においては、有限精度による計算の誤差が生じて、本来あるべきバンドからは逃れられない、ことになる。

上記のより Oteo と Ros[5] で述べている、倍精度計算による最大誤差はその  $a$  におけるバンドの最大幅になることは当然と言える。

## 5 おわりに

本論文では、2進の多倍長計算ライブラリである MPFR を用いて、ロジスティック写像のコンピュータによる有限精度の浮動小数計算による軌道の結果を検討した。表式、初期値、パラメータ  $a$ 、許容誤差を考慮した上で、(仮数部 bit 数-23) ステップまでは真とみなすことのできる軌道を取る事を示した。この結果を用いて、Oteo と

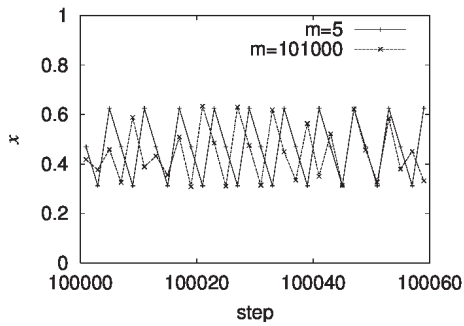


図8  $a = 3.625$  における  $m = 5$  と  $m = 101000$  の奇数ステップの軌道(100001~100059 ステップ)、 $x_0 = 0.1015625$

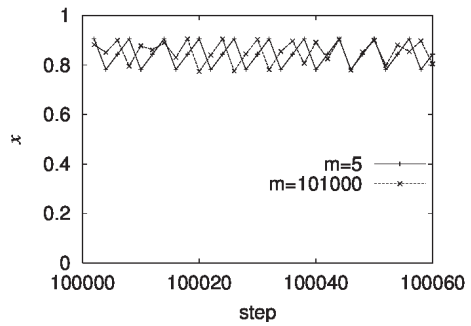


図9  $a = 3.625$  における  $m = 5$  と  $m = 101000$  の偶数ステップの軌道(100002~100060 ステップ)、 $x_0 = 0.1015625$

Ros が示した、倍精度による計算結果の誤差は必ずバンド幅の最大値となる事の理由を明らかにした。さらに、バンド領域においては、仮数部 5bit を用いた大きな誤差を生じるであろう軌道であっても必ず真の軌道と同じバンドに留まる事を示した。

#### 参考文献

- [1] D. H. Bailey, ACM Trans. Math. Softw. 19, 288(1993).
- [2] Torbjörn Granlund, “GNU MP: The GNU Multiple Precision Arithmetic Library”, version 4.2.2 (2007), ‘<http://gmplib.org>’.
- [3] Laurent Fousse, Guillaume Hanrot, Vincent Lefèvre, Patrick Pélicier and Paul Zimmermann, “MPFR: A Multiple-Precision Binary Floating-Point Reliable Library With Correct Rounding”, ACM Transactions on Mathematical Software, volume 33, issue 2, article 13, 15 pages, (2007), ‘<http://doi.acm.org/10.1145/1236463.1236468>’.
- [4] Technical Report ANSI-IEEE Standard 754-1985, “IEEE standard for binary floating-point arithmetic”, American National Standards Institute, 1985
- [5] Oteo J. A. and Ros J. “Double precision errors in the logistic map: statistical study and dynamical interpretation.” Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys. 2007 Sep;76(3 Pt 2):036214. Epub 2007 Sep 26.