

B-spline曲線の生成と曲率半径に基づく 曲線形状の修正

B-spline Curve Generation and Modification based on Specified Radius-of-Curvature

倉賀野 哲造

KURAGANO, Tetsuzo

Abstract

A method to generate a quintic B-spline curve which passes through the given points is described. In this case, there are four more unknown control point positions than there are equations. To overcome this problem three methods are described. First, solve the underdetermined system as it stands. Secondly, decrease the number of unknown control point positions in an underdetermined system in order to convert it to a determined system. Third, a method to increase the number of equations is employed to change an underdetermined system to a determined system. In addition to this, another method to generate a quintic B-spline curve using given points with gradients in sequence is described. In this case, a linear system will be either overdetermined, determined or underdetermined. This depends on the number of given points with gradients in sequence. Additionally, a method to modify a quintic B-spline curve is described. The objective is to change an aesthetically displeasing curve to an aesthetically pleasing curve. Algebraic functions are used to determine an aesthetically pleasing radius-of-curvature distribution. This is accomplished by minimizing the difference between the quintic B-spline curve's radius-of-curvature and the specified radius-of-curvature using the least-squares method. Examples of curve generation are given.

1. はじめに

B-spline 曲線は CAD・CAM やコンピュータグラフィックスの分野において自由曲線の表現として広く使用されている。特に、3次の B-spline 曲線は広く使われている。曲線を平滑化するにはノットの位置において曲率の微分が連続であることが望ましいが、3次の B-spline 曲線では実現できない。そこで4次以上の B-spline 曲線を使う必要がある[1]。本研究では、多セグメントから構成される曲線の曲率半径を指定された曲率半径に基づいて修正することにより曲線の形状を修正し、平滑化された曲線を実現しようとしているため、5次の B-spline 曲線を使用する。本論文では、曲線設計で広く使われている手法である順序付けられた与点を通過する5次の B-spline 曲線を生成する方法とこの与点の全てに勾配が付与されている場合の5次の B-spline 曲線の生成方法について述べる。曲率や曲率半径の変化を予測しながら曲線を生成することは容易ではない。それゆえ、設計の意図に合致する曲率や曲率半径をもった曲線を得るためには、曲線を生成した

のち、形状を修正することが不可欠であると考える。そこで、曲線の形状修正のための目標とする曲率半径の指定の方法および指定した曲率半径に基づいて曲率半径を修正することによる曲線の形状を修正する方法について述べる。形状修正の際には、セグメント数を変更しないで制御点の位置を変更する。

曲線の生成に関しては数多くの研究がある。一連の研究は指定された点列を通過する曲線の生成、もしくは指定された点列の近辺を極力少ないで通過する曲線の生成を目的としたものである。前者は補間の問題であり、後者は近似の問題である。

補間による曲線の生成に関しては、通過点と接線方向を使用したクロソイド曲線の生成方法[2]、美しい曲線の生成を目的とした単位4元数曲線の研究[3]、さらに、弧長の区分において曲率が2次関数になるように G^3 連続な補間曲線の生成の研究[4]が報告されている。

近似による曲線の生成に関しては、B-spline 曲線に対してデータをフィッティングする研究[5]など数多くの研究がある。

指定された点列を使用しないで曲線を生成する研究としては、制御辺ベクトルのホドグラフを使って曲率の変化が単調な曲線を生成する研究[6]や、視覚言語を導入して曲線を生成する研究[7]がある。

これらの研究では、ある程度の滑らかな曲線を生成することができる。

第2章では、5次のB-spline 曲線とその導関数、曲率ベクトル、曲率、曲率半径について述べる。第3章では、順序付けられた与点を通過する5次のB-spline 曲線の生成とこの与点の全てに勾配が付与されている場合の5次のB-spline 曲線の生成について述べる。第4章では、曲線の形状修正をするための目標とする曲率半径の指定の方法と指定した曲率半径に基づいて制御点の位置を修正することにより、5次のB-spline 曲線の形状を修正する方法について述べる。

2. 5次のB-spline 曲線の表現

本章では、5次のB-spline 曲線とその導関数、曲率ベクトル、曲率、曲率半径について述べる。

B-spline 曲線はB-spline 曲面を設計する際に枠組みを決める曲線として、しばしば用いられる。B-spline 曲面は u と v の2変数からなるテンソル積表現であるため、曲面形状の複雑さにかかわらず u と v 方向にそれぞれ1つのノット列しか持つことができない。このため、B-spline 曲線を設計する際に、ノット間隔をどのように設定するのが適切であるのかは明らかではない。そのため、本研究においては、ノット間隔は一定にする。いいかえると、本研究で使用する5次のB-spline 曲線はユニフォームB-spline 曲線である。

$k-5$ セグメント($k \geq 6$)の5次のB-spline 曲線 $\mathbf{R}(t)$ は、 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{k-1}$ からなる k 個の制御点により構成され、式(1)のように表現される。

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} N_{i,6}(t) \cdot \mathbf{q}_i, \tag{1}$$

ここで、 $N_{i,6}(t)$ ($i=0,1,\dots,k-1$)はB-spline 曲線の基底関数であり、これらの関数はde Boor-Cox[8]の式により、ノット列 $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{k+5}$ に基づいて式(2)のように再帰的に定義される。

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & (t_i \leq t < t_{i+1}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{2}$$

$$N_{i,M}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+M-1}-t_i} N_{i,M-1}(t) + \frac{t_{i+M}-t}{t_{i+M}-t_{i+1}} N_{i+1,M-1}(t)$$

ここで、 $i=0,1,\dots,k+4$ 、そして $M=2,3,\dots,6$ であり、 i と M は再帰計算中に変化する値である。

もしノット列に多重ノットが存在する場合には、再帰計算の途中で式(2)の分母がゼロになる。この場合には、 $0/0=0$ [9]として計算を継続する。ノット列が $\{-5,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ で設

定されている 1 セグメントの 5 次の B-spline 曲線は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) = & \frac{1}{120} \left\{ (1-t)^5 \mathbf{q}_0 + (5t^5 - 20t^4 + 20t^3 + 20t^2 - 50t + 26) \mathbf{q}_1 \right. \\ & + (-10t^5 + 30t^4 - 60t^2 + 66) \mathbf{q}_2 \\ & + (10t^5 - 20t^4 - 20t^3 + 20t^2 + 50t + 26) \mathbf{q}_3 \\ & \left. + (-5t^5 + 5t^4 + 10t^3 + 10t^2 + 5t + 1) \mathbf{q}_4 + t^5 \mathbf{q}_5 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)で示された 5 次の B-spline 曲線 $\mathbf{R}(t)$ の 1 階の導関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = & \frac{1}{24} \left\{ -(1-t)^4 \mathbf{q}_0 + (5t^4 - 16t^3 + 12t^2 + 8t - 10) \mathbf{q}_1 \right. \\ & + (-10t^4 + 24t^3 - 24t) \mathbf{q}_2 + (10t^4 - 16t^3 - 12t^2 + 8t + 10) \mathbf{q}_3 \\ & \left. + (-5t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1) \mathbf{q}_4 + t^4 \mathbf{q}_5 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)で示された 5 次の B-spline 曲線 $\mathbf{R}(t)$ の 2 階の導関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{R}(t)}{dt^2} = & \frac{1}{6} \left\{ (1-t)^3 \mathbf{q}_0 + (5t^3 - 12t^2 + 6t + 2) \mathbf{q}_1 \right. \\ & + (-10t^3 + 18t^2 - 6) \mathbf{q}_2 + (10t^3 - 12t^2 - 6t + 2) \mathbf{q}_3 \\ & \left. + (-5t^3 + 3t^2 + 3t + 1) \mathbf{q}_4 + t^3 \mathbf{q}_5 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

5 次の B-spline 曲線 $\mathbf{R}(t)$ の 3 階の導関数は、本論文では直接使用しないので省略する。
式(3)で示された 5 次の B-spline 曲線 $\mathbf{R}(t)$ の 4 階の導関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{d^4\mathbf{R}(t)}{dt^4} = & (1-t) \mathbf{q}_0 + (5t - 4) \mathbf{q}_1 + (-10t + 6) \mathbf{q}_2 \\ & + (10t - 4) \mathbf{q}_3 + (-5t + 1) \mathbf{q}_4 + t \mathbf{q}_5 \end{aligned} \quad (6)$$

曲率ベクトルは次のように表される。

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{(\dot{\mathbf{R}}(t) \times \ddot{\mathbf{R}}(t)) \times \dot{\mathbf{R}}(t)}{(\dot{\mathbf{R}}(t))^4} \quad (7)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{R}}(t)$ は B-spline 曲線 $\mathbf{R}(t)$ の 1 階の導関数を表し、 $\ddot{\mathbf{R}}(t)$ は B-spline 曲線の 2 階の導関数を表している。

曲率は曲率ベクトルの大きさであるから次のように表現される。

$$\kappa(t) = |\boldsymbol{\kappa}(t)| \quad (8)$$

曲率半径は曲率の逆数であるため、曲率半径は次のように表現される。

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \quad (9)$$

3. 5 次の B-spline 曲線の生成

本章では、順序付けられた与点を通過する 5 次の B-spline 曲線の生成とこの与点の全てに勾配が付与されている場合の 5 次の B-spline 曲線の生成について述べる。

与点は曲線が通過する位置を示し、勾配はその位置における曲線の接線方向を示している。

3. 1 順序付けられた与点を通過する 5 次の B-spline 曲線の生成

本節では、順序付けられた与点を通過する 5 次の B-spline 曲線の生成法について述べる。

これ以降の数式の記述を簡素にするために表記を要約する。 i は順序付けられた与点の順序数であり、

m は順序付けられた与点の最後の順序数であり、同時に B-spline 曲線のセグメント数である。そして、 $m+1$ は与点の総数であり、 $m+5$ は制御点の総数である。 j は与点に対して付与した勾配の順序数であり、 n は付与した勾配の最後の順序数である。そして、 $n+1$ は付与した勾配の総数である。

与点の位置をノット列のノットに対応させて式(3)のパラメータをゼロに設定する。すると式(3)は次のように表現される。

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{120}(\mathbf{q}_i + 26\mathbf{q}_{i+1} + 66\mathbf{q}_{i+2} + 26\mathbf{q}_{i+3} + \mathbf{q}_{i+4}) \quad (i=0,1,2,3,\dots,m) \quad (10)$$

順序付けられた与点の位置ベクトルが式(10)の $\mathbf{R}_i (i=0,1,2,3,\dots,m)$ に対応付けられる。そして、 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 (i=0,1,2,3,\dots,m)$ は5次の B-spline 曲線の制御点である。

式(10)を使って5次の B-spline 曲線の制御点を求めようとするとき制御点の位置である未知数の数が式(10)により表現されている式の数よりも4つ多い。すなわち、制御点の位置を求めるために解く一連の方程式からなる系は劣決定系[10]になっている。これに対処するため3つの方法を考案した。以下に3つの方法を順に述べる。

第1の方法は、劣決定系のまま解く方法である。補助関数を設定し、一連の方程式からなる系を制約条件のもとで解き、無数にある厳密解の中からラグランジュの未定乗数法を使って選択する。選択した解の幾何学的な意味は明白ではない。

第2の方法は、未知である制御点を既知である制御点の線型結合で表現することにより未知数を減らし、劣決定系を決定系にする方法である。具体的には、5次の B-spline 曲線の両端において曲率がゼロであると考え、両端点における2階の導関数の値をゼロに設定することにより、未知の制御点を既知の制御点の線型結合で表現する。

与点の位置を B-spline 曲線のノット列のノットに対応させ、2階の導関数である式(5)のパラメータをゼロにすると、式(11)が得られる。

$$\frac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} = \frac{1}{6}(\mathbf{q}_i + 2\mathbf{q}_{i+1} - 6\mathbf{q}_{i+2} + 2\mathbf{q}_{i+3} + \mathbf{q}_{i+4}) \quad (i=0,1,2,3,\dots,m) \quad (11)$$

曲率は式(8)により表現され、曲率ベクトルは式(7)により表現されているため、曲線の両端点において曲率をゼロにした場合は、両端点において2階の導関数をゼロにすることになる。よって、式(11)の i を0と m に設定して、式(11)をゼロに設定する。すると、式(12)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_0 + 2\mathbf{q}_1 - 6\mathbf{q}_2 + 2\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 &= 0 \\ \mathbf{q}_m + 2\mathbf{q}_{m+1} - 6\mathbf{q}_{m+2} + 2\mathbf{q}_{m+3} + \mathbf{q}_{m+4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

曲線の両端点において、2階の導関数をゼロにしたのに従い、4階の導関数をゼロに設定する。4階の導関数である式(6)のパラメータをゼロにすると式(13)が得られる。

$$\frac{d^4\mathbf{R}_i}{dt^4} = \mathbf{q}_i - 4\mathbf{q}_{i+1} + 6\mathbf{q}_{i+2} - 4\mathbf{q}_{i+3} + \mathbf{q}_{i+4} \quad (i=0,1,2,3,\dots,m) \quad (13)$$

式(13)の i を0と m に設定して式(13)をゼロに設定する。すると式(14)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_0 - 4\mathbf{q}_1 + 6\mathbf{q}_2 - 4\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 &= 0 \\ \mathbf{q}_m - 4\mathbf{q}_{m+1} + 6\mathbf{q}_{m+2} - 4\mathbf{q}_{m+3} + \mathbf{q}_{m+4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(12)と式(14)より式(15)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= 2\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_1 &= 2\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_{m+3} &= 2\mathbf{q}_{m+2} - \mathbf{q}_{m+1} \\ \mathbf{q}_{m+4} &= \mathbf{q}_{m+2} - \mathbf{q}_m \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)より分かるように、未知である制御点 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{m+3}, \mathbf{q}_{m+4}$ は既知である制御点の線型結合で表される。

このようにして未知である制御点 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{m+3}, \mathbf{q}_{m+4}$ を既知にすることができる。つまり未知数の数を減少させたことになる。そして式の数未知数の数に等しくなる。すなわち、この解くべき一連の方程式からなる系は決定系になる。順序付けられた与点を通過する5次の B-spline 曲線と式(15)で示した制御点 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{m+3}, \mathbf{q}_{m+4}$ を図1に示す。

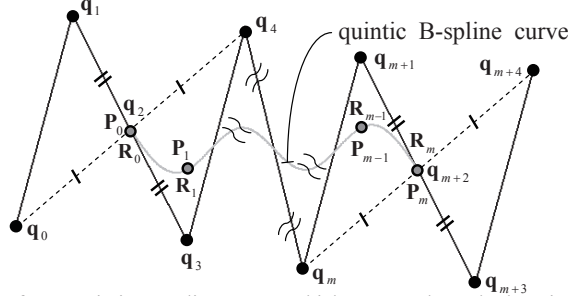


Fig.1 Illustration for a quintic B-spline curve which passes through the given points in sequence. $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{m-1}, \mathbf{P}_m$ are given points. $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m+3}, \mathbf{q}_{m+4}$ are control points of a quintic B-spline curve. $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{m-1}, \mathbf{R}_m$ are positional vectors of a quintic B-spline curve corresponding to the given points.

図1における $\mathbf{P}_i (i=0,1,2,3, \dots, m)$ は順序付けられた与点の位置ベクトルであり式(10)の $\mathbf{R}_i (i=0,1,2,3, \dots, m)$ に対応している。図1に示すように5次の B-spline 曲線の両端における \mathbf{P}_0 と \mathbf{P}_m は与点であり、曲線の制御点 \mathbf{q}_2 と \mathbf{q}_{m+2} と同じ位置になっている。このことは式(10)と式(15)により導くことができる。 \mathbf{P}_0 は \mathbf{q}_1 と \mathbf{q}_3 の中点であり、しかも \mathbf{q}_0 と \mathbf{q}_4 の中点である。もう一方の端点である \mathbf{P}_m は \mathbf{q}_{m+1} と \mathbf{q}_{m+3} の中点であり、しかも \mathbf{q}_m と \mathbf{q}_{m+4} の中点である。このことは式(15)より導くことができる。

第3の方法は順序付けられた与点に対して、勾配を付与することにより式の数を増加させ、劣決定系を決定系にする方法である。式の数増加のみが目的であれば、2階の導関数、3階の導関数、4階の導関数のいずれかを、もしくは取り混ぜて用いることも考えられるが、高階導関数になれば、幾何学的な意味が明確ではなくなるため、本研究では、勾配を表現する1階の導関数を用いる。未知数の数と式の数の差が4であるため、与点のうちの4点に対して勾配を付与し、曲線形状を視覚的、対話的に確認しながら、4点を選択し決定する。

与点の位置をノット列のノットに対応させ、式(4)のパラメータをゼロにすることにより式(16)が得られる。これを勾配として使用する。これは、与点の位置における曲線の接線方向である。

$$\frac{d\mathbf{R}_j}{dt} = \frac{1}{24}(-\mathbf{q}_j - 10\mathbf{q}_{j+1} + 10\mathbf{q}_{j+3} + \mathbf{q}_{j+4}) \quad (j=0,1,2,3, \dots, m) \quad (16)$$

式(16)に示す j は式(10)の i と対応している。 j は曲線の形状の変化を見ながら4箇所割り当てる。勾配を与えるのは一般的には曲線の始めの与点とその隣接点、そして終わりの与点とその隣接点とする。1階の導関数の大きさは2つの与点間の距離をデフォルト値とする[11]。1階の導関数の大きさのこれ以上の調整は曲線形状を見ながら対話的に決定する。順序付けられた与点と4箇所位置を指定して勾配を与えると解くべき一連の方程式からなる系は決定系になる。

順序付けられた与点を通過する5次の B-spline 曲線の例としてフィレット曲線を生成する。2つの凸形状曲線の間に生成する凹形状のフィレット曲線、凹形状曲線と凸形状曲線の間に生成する凸形状のフィレット曲線、そして凸形状からなる2つの曲線の間に生成する凸形状のフィレット曲線を5次の B-spline 曲線で実現し、曲線とその曲率プロット表示を図2に示す。

図2(a)と(b)においては式(16)の j はそれぞれ0,2,4,6とする。図2(c)においては式(16)の j はそれぞれ0,1,3,4としている。フィレット部を含む曲線を生成する場合には勾配の2箇所をフィレット部の始点と終点に設定し、他の2箇所を曲線の始点と終点に設定する。

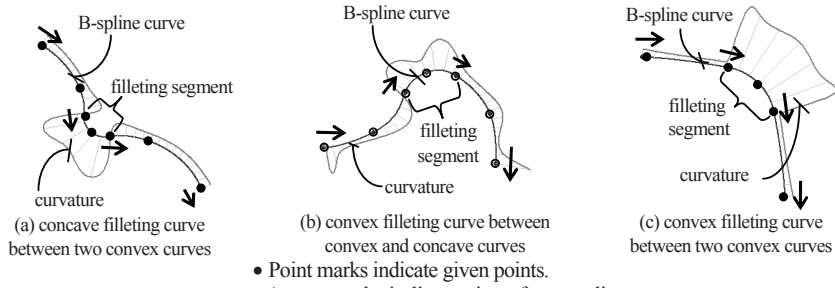


Fig.2 Examples of a quintic B-spline curve which passes through given points in sequence and four location specified gradients

3. 2 勾配が付与されている与点を使った5次のB-spline曲線の生成

本節では、勾配が付与されている順序付けられた与点を使った5次のB-spline曲線の生成について述べる。

式(10)の m と式(16)の n を同じにし、式(10)と式(16)を連立させることにより5次のB-spline曲線を生成する。この場合は式(10)の i は式(16)の j に対応する。もし勾配が付与された順序付けられた与点の数が4なら、式(10)で示されているB-spline曲線式の数は4で、式(16)で示されている1階の導関数からなる方程式の数は4である。解くべき一連の方程式からなる系として式の数は全部で8となる。5次のB-spline曲線の制御点の数は8である。つまり、この系は決定系である。すなわち、系の係数行列のランクが未知数の数に等しい。この系の解は厳密解となり、生成された5次のB-spline曲線は与点を通り、しかも与点における1階の導関数により決定される方向は付与された勾配に一致する。

勾配が付与されている与点の数が3の場合は与点を通る式の数は3であり、1階の導関数からなる方程式の数は3である。この場合、解くべき一連の方程式からなる系としては式の数が6で5次のB-spline曲線の制御点の数は7である。すなわち式の数が未知数の数より少ない。それゆえ、この系は劣決定系[10]である。劣決定系に対しては補助関数を設定して制約条件の下でラグランジュの未定乗数法を用い無数に存在する厳密解から選択する。生成された5次のB-spline曲線は勾配が付与された順序付けられた与点を通り、しかも、与点における1階の導関数により決定される方向は付与された勾配に一致する。

勾配が付与された与点の数が5の場合、式(10)で示された式の数が5である。1階の導関数からなる方程式の数は5である。この場合、解くべき一連の方程式からなる系としては式の数が全部で10で、5次のB-spline曲線の数は9である。すなわち、未知数の数より式の数の数が多くなっている。それゆえ、この系は優決定系[12]である。優決定系に対しては、系の全ての式の左辺と右辺の差を最小にすることにより解く。それゆえ、算出された5次のB-spline曲線の制御点は近似となる。よって生成された5次のB-spline曲線は勾配が付与された順序付けられた与点を通らない。しかも曲線の接線方向も付与された勾配とは異なる。勾配が付与された順序付けられた与点の数が5またはそれ以上の場合には、解くべき一連の方程式からなる系は優決定系となる。これらの系の場合には、式の数と未知数の差が大きくなり、生成された5次のB-spline曲線の与点に対するずれが大きくなる。

以上述べた事を表1に要約する。表1の中で、ハッチングの箇所は決定系を示している。

以上により勾配が付与された順序付けられた与点に基づいて、5次のB-spline曲線を生成することができる。

Table 1 Linear system condition

(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
2	6	underdetermined	exact	thru
3	7	underdetermined	exact	thru
4	8	determined	exact	thru
5	9	overdetermined	approximation	close
6	10	overdetermined	approximation	close
7	11	overdetermined	approximation	close
8	12	overdetermined	approximation	close

(I) number of given points with gradients
 (II) number of control points of a quintic B-spline curve
 (III) system condition (underdetermined, determined, overdetermined)
 (IV) solution status
 (V) pass through or close to given points with gradients

4. 指定された曲率半径分布に基づく曲線の形状修正

本章では、5次の B-spline 曲線の曲率半径分布を指定された曲率半径分布に沿うように修正することにより、B-spline 曲線の形状を修正する方法と、そのための目標とする曲率半径分布の指定方法について述べる。

曲率分布を指定してそれに基づいて曲線の形状修正も可能であるが、本論文では曲率半径に基づいて曲線の形状修正をする。

曲率半径は曲線の感性に基づく視覚的形状理解と一致するため形状の理解には適している。しかし、曲線形状が直線に近づいた場合、曲率半径は無限大になり、変曲点がある場合にはそこでの曲率の値はゼロになり、曲率半径は無限大になる。そこで、計算をする際には曲率半径の値を曲率の値に変更する。

5 次の B-spline 曲線の曲率半径の指定と形状修正の概念を図3を用いて述べる。

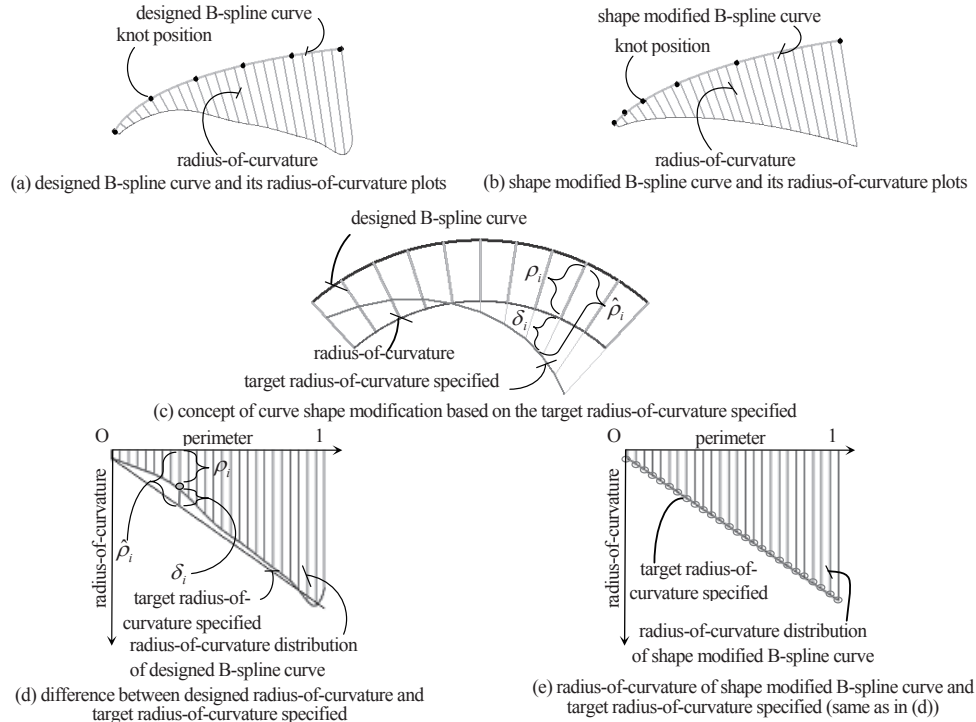


Fig.3 Concept of radius-of-curvature specification and quintic B-spline curve shape modification based on the target radius-of-curvature distribution specified

まず、設計された5次の B-spline 曲線とその曲率半径プロットを図3(a)に示す。曲線形状修正の目的は図3(a)に示す B-spline 曲線の形状を図3(b)に示す曲線へと修正することである。曲線形状の変化は、曲率半径プロットにより視覚的に確認できる。曲率半径が修正されるため、曲線の形状も変更されている。そして、ノットに対応する曲線上の点の位置も変更されていることが視覚的に確認できる。図3(c)を用いて曲線の形状修正の概念を具体的に述べる。曲線の形状を修正するには、曲線の曲率半径 ρ_i に対して目標とする曲率半径 $\hat{\rho}_i$ を指定し、その差 δ_i が曲線長全体に渡って最小になるように曲線の制御点の位置を変更する。

図3(a)に示された曲率半径プロットは直線を用いて、曲線から垂直に内側向きに描かれている。そして、直線の長さは曲線のその位置における曲率半径に比例している。しかし、直線は隣接している直線とは互いに平行ではない。そして当然の事ではあるが始点の位置も異なっている。それゆえ、曲率半径プロットは曲率半径の変化を全体的に調べるのには適しているが、曲率半径の大きさを隣接の曲率半径と比較したり、曲率半径の変化を詳細に調べるのには適していない。さらに、座標系のどこにおかれても曲線と曲率半径プロットの位置関係は保たれているため、図3(c)に示すような曲率半径の指定は容易ではない。そこで、座標系から独立させることにより、曲率半径の指定を容易にする。5次の B-spline 曲線の曲線長を直線として水平軸に設定し、曲率半径を垂直軸に設定して図3(d)に示すような曲率半径分布を作成する。

まず、目標とする曲率半径分布の指定方法について述べる。曲線の形状を修正する目的は美しい曲線を実現するためであり、美しい曲線とは、その曲率もしくは曲率半径の変化が単調な曲線であるといわれている[13]。そこで、表現が簡素であり、しかも独立変数の変化に対して、従属変数の変化が単調である1次、2次、3次の代数関数を形状修正の対象となっている設計された曲線の曲率半径分布に適用する。具体的には、形状修正の対象となっている設計された曲線の曲率半径分布を使って、1次、2次、3次の代数関数のいずれかを適用し、最小自乗法により、その代数関数の係数を算出する。これにより代数関数が決定され、この代数関数により目標とする曲率半径分布が指定される。次に、設計された曲線の曲線長に沿って曲率半径が、この代数関数で指定された曲率半径分布に沿うように曲線の制御点の位置を変更し、曲線の形状を修正することにより美しい曲線を実現する。代数関数による曲率半径分布の指定に関してはすでに報告している[14]。

例として、形状修正の対象となっている設計された曲線の曲率半径分布と目標として指定した1次関数のグラフを図3(d)に示す。図3(d)に示された形状修正の対象となっている設計された曲線の曲率半径分布を用いて、1次関数の係数を最小自乗法により算出し決定する。

次に、この1次関数で指定された曲率半径分布を目標として曲線の形状を修正する方法を述べる。この1次関数で指定された曲率半径分布と形状修正の対象となっている設計された曲線の曲率半径分布の差が曲線長全体に渡って最小になるように曲線の制御点の位置を計算することにより曲線の形状修正を行う。具体的に、形状修正の対象となっている設計された5次の B-spline 曲線の曲線長に沿った曲率半径分布の i 番目のものを ρ_i として、同じ場所における指定した曲率半径を $\hat{\rho}_i$ とする。この差 $\hat{\rho}_i$ は式(17)により表現される。式(17)の ρ_i と $\hat{\rho}_i$ は図3(c)および図3(d)の ρ_i と $\hat{\rho}_i$ と同じである。

$$\delta_i = \rho_i(q_1^x, \dots, q_{n-2}^x, q_1^y, \dots, q_{n-2}^y) - \hat{\rho}_i \quad (17)$$

ここで、 $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ であり、 m は離散的に曲率半径を指定した数である。そして、 n は B-spline 曲線の曲線セグメントの数に曲線の次数5を加えた数である。 δ_i の自乗和 $S(q_1^x, \dots, q_{n-2}^x, q_1^y, \dots, q_{n-2}^y)$ を式(18)に示す。これを最小自乗法により最小化する。

$$S(q_1^x, \dots, q_{n-2}^x, q_1^y, \dots, q_{n-2}^y) = \sum_{i=0}^{m-1} [\rho_i(q_1^x, \dots, q_{n-2}^x, q_1^y, \dots, q_{n-2}^y) - \hat{\rho}_i]^2 \quad (18)$$

曲率半径は非線型であるため式(18)をテイラー展開して2次以降を切り捨てることにより式(19)のよう

に線型化する．式(19)の $S(q_1^x + \Delta q_1^x, \dots, q_{n-2}^x + \Delta q_{n-2}^x, q_1^y + \Delta q_1^y, \dots, q_{n-2}^y + \Delta q_{n-2}^y)$ に含まれている全ての変数 Δq_r^x と Δq_r^y ($r=1, 2, \dots, n-2$) で偏微分し，ゼロに設定することにより式(18)を最小化する．

$$S(q_1^x + \Delta q_1^x, \dots, q_{n-2}^x + \Delta q_{n-2}^x, q_1^y + \Delta q_1^y, \dots, q_{n-2}^y + \Delta q_{n-2}^y) \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \left[\rho_i(q_1^x, \dots, q_{n-2}^x, q_1^y, \dots, q_{n-2}^y) + \frac{\partial \rho_i}{\partial q_1^x} \Delta q_1^x + \dots + \frac{\partial \rho_i}{\partial q_{n-2}^x} \Delta q_{n-2}^x + \frac{\partial \rho_i}{\partial q_1^y} \Delta q_1^y + \dots + \frac{\partial \rho_i}{\partial q_{n-2}^y} \Delta q_{n-2}^y - \hat{\rho}_i \right]^2 \quad (19)$$

式(19)を偏微分し，ゼロに設定した式を式(20)に示す．

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \Delta q_r^x} &= 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-2) \\ \frac{\partial S}{\partial \Delta q_r^y} &= 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-2) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)の連立方程式を解くことにより変数 Δq_r^x と Δq_r^y ($r=1, 2, \dots, n-2$) が算出され，式(18)の S が最小になる5次の B-spline 曲線の制御点の位置である q_r^x と q_r^y ($r=1, 2, \dots, n-2$) が決定される．

ρ_i と $\hat{\rho}_i$ は曲線長に沿って計算される．そして，曲線長はパラメータに変換され5次の B-spline 曲線の制御点の位置が算出される．このようにして5次の B-spline 曲線の制御点が算出される．

繰り返し計算のたびに曲線長が異なるため，そのたびに曲線長を1に正規化する．以上の操作を繰り返すことにより，曲線長の全体に渡って δ_i ($i=0, 1, 2, \dots, m-1$) が最小になるように5次の B-spline 曲線の制御点の位置を算出する．

図3(e)に丸印で示した線は図3(d)に示した指定した曲率半径分布に基づいて形状修正された曲線の曲率半径分布である．図3(e)に示された形状修正された曲線の曲率半径分布が丸印で示されている指定された曲率半径分布に一致していることが視覚的に確認できる．

美しい曲線を実現するための曲率半径もしくは曲率に関する研究は拘束された非線型の最小化問題と呼ばれている[15]．

5. おわりに

順序付けられた与点を通過する5次の B-spline 曲線の生成とこの与点の全てに勾配が付与されている場合の5次の B-spline 曲線の生成について述べた．順序付けられた与点を通過する5次の B-spline 曲線を生成しようとする場合には，未知数である制御点の数が5次の B-spline 曲線を表現する数式の数よりも4つ多い．すなわち，制御点の位置を求めるために解く一連の方程式からなる系は劣決定系になっている．これに対処するため，劣決定系のまま解く方法，未知である制御点を既知である制御点の線型結合で表現することにより未知数を減らし，劣決定系を決定系にする方法および順序付けられた与点のうち4点に対して，勾配を付与することにより式の数を増加させ，劣決定系を決定系にする方法を考案した．勾配が付与されている順序付けられた与点に対して5次の B-spline 曲線を生成しようとする場合，解くべき一連の方程式からなる系は与点の数により，劣決定系，決定系，優決定系に分かれる．劣決定系に対しては，補助関数を設定して，制約条件の下でラグランジュの未定乗数法を用い，無数に存在する厳密解から選択する．優決定系に対しては系の全ての式の左辺と右辺の差を最小にすることにより解く．

美的に美しい曲線を実現するために設定した曲率半径分布に基づいて曲率半径を変更することによる5次の B-spline 曲線の形状修正法について述べた．B-spline 曲線の持つ曲率半径と指定された曲率半径の差を最小自乗法により最小にする．この問題は通常の計算の逆計算である．

今後は指定された曲率半径と算出された曲率半径の差の自乗和に基づいてセグメント数を増加させる方法を検討する．

参考文献

- [1] Hoschek, J. and Lasser, D., Translated by Schumaker, L. L.: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A K Peters, pp.93. (1993)
- [2] 仇時雨, 須田春, 牧野洋: 曲率を連続にした接線法によるクロソイド補間, *精密工学会誌*, 60, 11, pp.1596-1600. (1994)
- [3] 三浦憲二郎: 単位4元数積分曲線による点列の内挿, *情報処理学会論文誌*, 39, 7, pp.2159-2167. (1998)
- [4] 黒田満, 斉藤剛, 渡辺由美子, 東正毅: 曲率が弧長の区分2次関数となる補間曲線, *情報処理学会論文誌*, 38, 3, pp.555-562. (1997)
- [5] Cohen, E., Riesenfeld, R. F., and Elber, G. : *Geometric Modeling with Splines: An Introduction*, A K Peters, pp.259-290. (2001)
- [6] Farin, G. : Class A Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, 23, (2006), 573-581.
- [7] 原田利宣, 森山真光, 吉本富士市: 視覚言語を用いた曲線創成システム, *デザイン学研究*, 45, 3, pp.63-70. (1998)
- [8] de Boor, C. : On calculating with B-spline, *Japprox. Theory*, 6, 1, pp.50-62. (1972)
- [9] Marsh, D. : *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer-Verlag, pp.188. (2005)
- [10] Boehm, W. and Prautzsch, H.: *Geometric Concepts for Geometric Design*, A K Peters, pp.26. (1994)
- [11] Piegl, L. and Tiller, W. : *The NURBS Book*, Springer-Verlag, pp.373-376. (1997)
- [12] Farin, G. and Hansford, D. : *The Geometry Toolbox for Graphics and Modeling*, A.K.Peters, pp.220. (1998)
- [13] Farin, G.: *Curves and Surfaces for CAGD-A Practical Guide*, Fifth Edition-, Morgan Kaufmann Publishers, pp.420. (2002)
- [14] 山口瞳, 倉賀野哲造: 意匠設計のための曲線形状の修正法と美しさの評価法, *日本設計工学会*, 43, 10, pp.45-51. (2008)
- [15] Piegl, L. and Tiller, W. : *The NURBS Book*, Springer-Verlag, pp.510. (1997)