新古典派的フォン・ノイマンモデルの最適解と保存則

片　岡　晴　雄

要　旨

新古典派的フォン・ノイマンモデルの目的関数の積分区間を無限大に拡張したとき、ある条件の下では最適解に沿って目的関数の値は零になる。このような結果は、経済学的に見て無意味である。それゆえ、モデルは修正されなければならない。

修正の方法の１つとして、目的関数を所得と資本ストック保有の機会費用との差の割引現在価値として再定式化した。結果は、このモデルにおいても最適解に沿って目的関数の値は零であるが、その経済学的意味づけは、十分に納得できるものである。

〔キーワード〕 新古典派的フォン・ノイマンモデル、ハミルトニアン、保存則、最適解

Ⅰ．序

1937年に天才フォン・ノイマンによってオーストリアの雑雑に発表されたドイツ語の論文“Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes”は、それまでの経済学における分析手法を一変させたという意味でとりわけ重要である。この論文によって、はじめて多部門成長モデルが、これまでの経済学では決して用いられることのなかった高度な位相数学の手法を用いて厳密に分析されることとなった。

しかしながら、この論文も発表当初は、使用されている数学の難しさゆえ、一部の経済学者を除いて殆んど関心を持たれることなく、しばらくの間放置されたままであった。ところが、第２次世界大戦が終って間もなくの頃から、この論文は多くの数理経済学者の関心の的となり、多部門成長モデルは1950年代以降、アメリカを中心として急速に発展することとなった。このような発展のきっかけとなった重要な要因の一つは、1945年にオスカー・モルゲンシュテルンによってこのイノマンの原論文が英訳され、“A Model of General Economic Equilibrium”という題名でRES、Vol.13に掲載され、一層近づき易くなったことにあると考えられる。この英訳には、さらに経済学者チャンパナウンの解説論文が付されており、これもまたフォン・ノイマンモデルが多くの経済学者の共有財産になり得たことに多大の貢献をしているものと考えられる。

このフォン・ノイマンの原モデルは、離散型多部門成長モデルであったが、このモデルを連続型モデルに拡張したのは、DOSSO（1958）である。この連続型フォン・ノイマンモデル

は、また新古典派的フォン・ノイマンモデルとも呼ばれる。

さらに、新古典派的フォン・ノイマンモデルを変分法のモデルとして再構成し、このモデルの解経路に沿って2つの保存則が働いていることを明らかにしたのは、サミュエルソン（1970、1990）である。サミュエルソンこそ経済学に保存則の考えを導入したはじめての経済学者である。

サミュエルソンは、閉じた消費のない滑らかな新古典派的フォン・ノイマンモデルには、解経路に沿って2つの保存則が存在することを、古典力学におけるエネルギー保存則として有名な定理、つまり「ラグランジアンが時間 t を陽に含まなければ、オイラー＝ラグランジュの方程式を満たす解経路に沿ってハミルトニアンが保存される」（大貫、1987、高橋、2000）を適用して証明した。ここに保存されるとは、時間から独立して、一定と言う意味である。

その2つの保存則とは、

（i）　$\lambda Y = const.$（λ はラグランジュ乗数、Y は国民所得）

（ii）　$\lambda W = const.$（W は国富）

というものである。この2つの保存則は、つぎの一つの保存則

(iii)　$$\frac{\lambda Y}{\lambda W} = \frac{Y}{W} = const.$$

にまとめられる。サミュエルソンは、この値（定数）は、割引率 ρ、つまりノイマンが原モデルでその存在を証明した許容される最大の斉一成長率に等しいであろうと予想した。

サミュエルソンの得たこの結果は、直ちに日本の数理経済学者佐藤によって、新しい観点から徹底的に追求されることとなった。佐藤（1981、1985、1990）は、この問題をより根本的な観点から考察し、リー群（コーエン、1911）とネーターの定理（レベロック＝ルント1988、高橋2000、宮下2000）というこれまでの経済学では用いられることのなかった強力な数学的武器を駆使して、サミュエルソンの得た2つの保存則のみが当該モデルに大域的に働く保存則であることを厳密に証明した。ここで大域的とは、条件を満たす1次同次のあらゆる変換関数Fに対して成り立つという意味である。しかしながら、佐藤においてもラグランジュ乗数 λ の経済学的意味づけ、ならびにサミュエルソンの予想、さらにこのモデルの解の導出はなお放置されたままであった。

そこで片岡（1993）、片岡＝橋本（1995）では、サミュエルソン＝佐藤のモデルを拡張することにより、このモデルには、サミュエルソン＝佐藤の得たそれとは異る新しい型の保存則が存在することをまず証明し、つぎにこの新しい保存則を積極的に利用することにより、λ の経済学的意味づけと明示的な解の導出ならびにサミュエルソンの予想の肯定的解決に成功した。

しかしながら、これまで述べて来たすべてのモデルには、ある共通の問題点が存在する。本稿の目的は、この問題点を再検討することと、それを克服するための新たなモデルを提案することである。

Ⅱ．問題の所在

さて、モデルに共通する問題点を指摘するためには、モデルそのものを説明する必要がある。それゆえ、まずサミュエルソン＝佐藤のモデルの説明からはじめよう。簡単化のために2変数の型で説明するが、これから述べることは、すべて一般の n 変数についても成り立つ。

サミュエルソン＝佐藤のモデルは単純で、

目的関数

$$\int_0^T \dot{K}_1(t)\,dt \tag{1}$$

を、制約条件

$$F(K_1, K_2, \dot{K}_1, \dot{K}_2) = 0 \tag{2}$$

の下で最大にするような資本の蓄積経路を求めるモデルである。なお、T および初期値 $K_i(0) = K_i^0 (i=1, 2)$ ならびに終端条件 $K_2(T)$ は所与とする。$K_i(t)$ は、資本ストック、$\dot{K}_i(t)$ は、その純資本形成である $(i=1, 2)$。F は変換関数であり、K_i、$\dot{K}_i$ について 1 次同次の凹関数、かつ連続的微分可能と仮定される。

このモデルのラグランジアン L は、

$$L = \dot{K}_1 + \lambda\{F(K_1, K_2, \dot{K}_1, \dot{K}_2)\} \tag{3}$$

であり、L は時間 t を陽に含まないから、上に述べた解析力学における有名な定理から、直ちにオイラー＝ラグランジュの方程式（以下、E—L 方程式と略記）を満たす解経路に沿ってハミルトニアン H が保存される。つまり

$$H = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial \dot{K}_i} \dot{K}_i - L = const. \tag{4}$$

である。この式の右辺はルジャンドル変換（高橋2000）と呼ばれ、ラグランジアン L とハミルトニアン H を結びつける重要な関係式である。(3)式を用いて(4)式を実際に計算すれば、

$$H = \dot{K}_1 - \dot{K}_1 + \lambda F - \lambda \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial \dot{K}_i} \dot{K}_i = \lambda \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial K_i} K_i = const. \tag{5}$$

となる。λ はラグランジュ乗数である。

サミュエルソンは、この式を経済学的に解釈することによって、このモデルには序に述べた（i）、（ii）、（iii）の 3 つの保存則が働いていることを明らかにした。この結果は、佐藤の研究に引き継がれ、サミュエルソンの得たこれらの保存則のみが、当該モデルに大域的に存在する保存則であることが証明されるに至る経緯については、先に述べた通りである。

つぎに、サミュエルソン＝佐藤の議論において残された問題に一応の決着を与えたモデル（片岡1993、片岡＝橋本1995）について説明しよう。このモデルのエッセンスは、サミュエルソン＝佐藤のモデルをその特殊ケースとして含むように拡張したことである。このモデルを具体的に述べれば、以下のようになる。

$$max \int_0^T \{P_1 \dot{K}_1(t) + P_2 \dot{K}_2(t)\} e^{-\rho t} dt \tag{6}$$

制約条件

$$F(K_1, K_2, \dot{K}_1, \dot{K}_2) = 0 \tag{7}$$

$K_i(0) = K_i^0$（$i=1$, 2）、および T は所与

F は既に述べた変換関数である。P_1、P_2 は、2 つの資本財 K_1、K_2 それぞれの市場価格であり、ともに時間 t の関数

$$P_1 = P_1(t)、P_2 = P_2(t) \tag{8}$$

と仮定される。また ρ は割引率であり、正の一定値と仮定される。(6)式の目的関数は、出発時点から T 時点までの純投資の割引現在価値の総計という意味をもつが、消費がないというモデルの仮定から、T 時点までの国民所得の割引現在価値の総計という明確な経済学的意味をもつ。つまり、モデルは制約条件(7)式の下で、T 時点までの国民所得の割引現在価値の総計を最大にするような資本の最適蓄積経路を求めるという経済学的意味を持っている。このモデルが、サミュエルソン＝佐藤のモデルを特殊ケースとして含むことは明らかである。

このモデルのラグランジアン L は

$$L = \{P_1(t)\dot{K}_1(t) + P_2(t)\dot{K}_2(t)\}e^{-\rho t} + \lambda\{F(K_1, K_2, \dot{K}_1, \dot{K}_2)\} \tag{9}$$

で与えられる。このモデルには、ネーターの定理（宮下2000、高橋2000）から、解経路に沿って保存量

$$\Omega=\lambda\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial K_i}K_i\right)\beta+\left(e^{-\rho t}\sum_{i=1}^{2}P_iK_i+\lambda\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{K}_i}K_i\right)\gamma \tag{10}$$

が存在する。ここで β と γ は２つのパラメータである。⑽式を経済学的に解釈して、まず保存量

$$\lambda\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial K_i}K_i=\lambda Y=const. \tag{11}$$

が導かれ、つぎに λ の経済学的意味づけ

$$\lambda=\lambda_0 e^{-\rho t}\ （\lambda_0 は初期値） \tag{12}$$

が導かれる。これから λ は、割引因子に他ならないことがわかる。したがって⑾式から、

$$e^{-\rho t}Y=const. \tag{13}$$

が得られる。さらにもう一つの保存則

$$e^{-\rho t}W=const. \tag{14}$$

も得られる。また保存則 Ω を満たす価格は一定でなければならないことが証明される。
つまり、

$$P_i(t)=P_i^0=const.\ (i=1,\ 2) \tag{15}$$

これから解経路が

$$K_i(t)=K_i^0e^{\rho t},\ K_i^0\ は初期値、(i=1,\ 2) \tag{16}$$

と決定される。したがって

$$e^{-\rho t}Y=e^{-\rho t}(P_1\dot{K}_1+P_2\dot{K}_2)=\rho(P_1^0K_1^0+P_2^0K_1^0)=const. \tag{17}$$

$$e^{-\rho t}W=e^{-\rho t}(P_1K_1+P_2K_2)=(P_1^0K_1^0+P_2^0K_2^0)=const. \tag{18}$$

よって、サミュエルソンの予想

$$\frac{e^{-\rho t}Y}{e^{-\rho t}W}=\frac{Y}{W}=\rho \tag{19}$$

も同時に証明される。

これでいよいよ問題の所在を明らかにする準備が整った。その問題とは、目的関数の積分区間を無限大、つまり $T\to\infty$ に拡張したとき、この積分が収束するためには、モデルのハミルトニアン H が零でなければならないことである。この証明については、片岡（2004、ch. 4）、あるいは橋本（2004）を参照されたい。

これがなぜ問題になるかと言うと、それはつぎの通りである。いまサミュエルソン＝佐藤のモデルを例にとると、このモデルのハミルトニアンは、⑸式から、

$$H=\lambda\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial K_i}K_i=\lambda Y=const.$$

であるが $T\to\infty$ としたとき、$H=\lambda Y=0$ でなければならない。すると $\lambda\neq0$ であるから、これは $Y=0$ を意味し、毎時点の所得が零、つまり $K_i(t)=K_1^0=0$ という経済学的に無意味な結果をもたらす。実際われわれが得た解

$$K_1(t)=K_1^0e^{\rho t}$$

を目的関数⑴式に代入すると、

$$\int_0^{\infty}\dot{K}_1dt=\rho K_1^0\int_0^{\infty}e^{\rho t}dt \tag{20}$$

となって、$K_1^0=0$ でない限り、この目的関数は発散する。

サミュエルソン＝佐藤モデルを一般化した上述のモデルについても同様で、このモデルのハミルトニアンは、⑽式を変形した

$$H = e^{-\rho t}\rho\sum_{i=1}^{2} P_i K_i + \lambda\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial K_i}K_i + \rho\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial \dot{K}_i}K_i\} = const. \tag{21}$$

で与えられる（片岡2004、ch. 4）。

この式にサミュエルソン＝佐藤による競争条件 $\frac{\partial F}{\partial \dot{K}_i} = -P_i\,(i=1, 2)$ を代入すると、
$T \to \infty$で、$\lambda = e^{-\rho t}$ の場合

$$H = \lambda\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial K_i}K_i = 0$$

よって、

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial K_i}K_i = \sum_{i=1}^{2}P_i\dot{K}_i = Y = 0$$

したがって、再び $K_i = K_i^0 = 0$ （$i=1, 2$）
が得られる。

実際、目的関数にわれわれの得た解⒂、⒃式を代入すると、

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\{P_1\dot{K}_1 + P_2\dot{K}_2\}e^{-\rho t}dt\\ &= \int_0^{\infty}\rho\,(\sum_{i=1}^{2}P_i^0K_i^0)\,dt\\ &= \rho\int_0^{\infty}(P_1^0K_1^0 + P_2^0K_2^0)\,dt\end{aligned} \tag{22}$$

但し、$P_i^0 > 0$、$K_i^0 \geqq 0$ （$i=1, 2$）
となり、$\rho \neq 0$ ゆえ、$K_i^0 = 0$ でない限り、この積分は発散する。

なお、$H = 0$ は、T が有限のときでも、それが内生的に決定される場合では起ることに注意しよう。この事実については小山（1995）、エルスゴルツ（1961）、ポントリヤーギン（坂本訳2000）などを参照されたい。つまり、最適経路に沿って、$H = 0$ という条件は、無限視野の場合はもちろんのこと、有限視野の場合でも有り得るのである。

したがって、ノイマンモデルに限らず、この種の最適経済動学モデルの目的関数は、それが最適経路に沿って零であっても経済学的に意味があるように慎重に設定する必要がある。これまで扱って来たサミュエルソン＝佐藤モデル、およびわれわれのモデルにおける割引率 ρ で成長する経路が正にこのケースである。

それゆえ、われわれは次節においてこの批判に耐え得る形の拡張された新古典派的ノイマンモデルについて述べよう

Ⅲ．新しいモデル

われわれが提案する新しい型の新古典派的フォン・ノイマンモデルは以下の通りである。

$$max\int_0^{T}\sum_{i=1}^{2}(P_i\dot{K}_i - \rho P_iK_i)\,e^{-\rho t}dt \tag{23}$$

制約条件

$$F(K_1, K_2, \dot{K}_1, \dot{K}_2) = 0 \tag{24}$$

⒇式の被積分関数は、解析力学におけるラグランジアン、つまり運動エネルギーと位置エネルギーとの差（高橋2000）との類推にもとづくものである。$\sum P_i\dot{K}_i$ は、既に述べたように国民所得 Y である。他方 $\rho\sum_{i=1}^{2}(P_iK_i)$ は、t 時点における資本ストックの価値（国富）に一定の割引率 ρ を乗じた値であり、それだけの資本ストックから得られると期待される収益である。これは見方を変えると、社会がそれだけの価値の資本ストックを保有することの機会費用である。

また、$\sum_{i=1}^{2}P_i\dot{K}_i$ は、それだけの価値の資本ストックを生産に利用することによって生み出すことの出来る純国民生産物と見ることができる。そして社会は、この差つまり純国民生産物と資本ストック保有の機会費用との差の割引現在価値を最大にすると仮定したのがこのモデルである。F は1次同次の変換関数である。

このモデルのラグランジアンは、

$$L=\sum_{i=1}^{2}(P_i\dot{K}_i-\rho P_iK_i)e^{-\rho t}$$
$$+\lambda\{F(K_1, K_2, \dot{K}_1, \dot{K}_2)\} \tag{25}$$

である。このモデルには、これまで述べて来たモデルと同様に保存量がある。それを見い出すためにネーターの定理ではなく、点変換（ランチョス1970、大貫1987、片岡＝仙波2002）の方法を用いよう。この方法は、ある種の保存量を見つけるためにはネーターの定理よりはるかに簡単であり、また得られた結果の経済学的解釈も簡単である。そこで次の点変換を考える。

$$K_i=h_ie^{\rho t},\ \lambda=\mu e^{-\rho t}$$
$$\dot{K}_i=\dot{h}_ie^{\rho t}+\rho h_ie^{\rho t} \tag{26}$$

したがって、これに伴い(25)式のラグランジアンは、F が1次同次という仮定から、次のように変換される。

$$\begin{aligned}\tilde{L}=&\sum_{i=1}^{2}\{P_i(\dot{h}_ie^{\rho t}+\rho h_ie^{\rho t})-\rho P_ih_ie^{\rho t}\}e^{-\rho t}+\\&\mu e^{-\rho t}\{F(h_1e^{\rho t}, h_2e^{\rho t}, (\dot{h}_1+\rho h_1)e^{\rho t},\\&(\dot{h}_2+\rho h_2)e^{\rho t}\}\\=&\sum_{i=1}^{2}P_i\dot{h}_i+\mu\{F(h_i, h_2, \dot{h}_1+\rho h_1, \dot{h}_2+\\&\rho h_2)\\=&\sum_{i=1}^{2}P_i\dot{h}_i+\mu\{F(h_1, h_2, x_1, x_2)\}\end{aligned} \tag{27}$$

但し、$x_i=\dot{h}_i+\rho h_i$（i=1, 2)

したがってこの(27)式のラグランジアンは、時間 t を陽に含まないから、$E-L$ 方程式の解経路に沿ってハミルトニアンが保存される。つまり、

$$\begin{aligned}\tilde{H}=&\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{h}_i}\dot{h}_i-\tilde{L}=\{\sum_{i=1}^{2}(P_i+\mu\frac{\partial F}{\partial\dot{h}_i})\dot{h}_i\}\\&-\{\sum_{i=1}^{2}P_i\dot{h}_i+\mu F(h_1, h_2, x_1, x_2)\}\\=&\sum_{i=1}^{2}\mu\frac{\partial F}{\partial\dot{h}_i}\dot{h}_i-\mu F(h_1, h_2, x_1, x_2)\\=&\sum_{i=1}^{2}\mu\frac{\partial F}{\partial\dot{h}_i}\dot{h}_i-\mu\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial h_i}h_i+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial x_i}x_i\}\\=&-\mu\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial h_i}h_i+\rho\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial\dot{h}_i}h_i\}\\=&const.\end{aligned} \tag{28}$$

但し $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\partial F}{\partial\dot{h}_i}$ （i=1, 2)

この(28)式のハミルトニアンを用いて、(27)式のラグランジアンを書き換えると、

$$\begin{aligned}\tilde{L}=&\sum_{i=1}^{2}P_i\dot{h}_i+\mu\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F}{\partial\dot{h}_i}\dot{h}_i-\tilde{H}\\=&-\tilde{H}+(1-\mu)\sum_{i=1}^{2}P_i\dot{h}_i\end{aligned}$$

但し、この最後の式を得るために、競争条件

$$\frac{\partial F}{\partial\dot{h}_i}=-P_i\ (i=1, 2)$$

を用いた。この競争条件がない限り、上のラグランジアンの E—L 方程式を解いて、解を求めるのは変換関数 F が簡単な場合を除いて、一般には困難である。

さて、(29)式の最後の式から E—L 方程式をつくると、$\tilde{H}$ は定数だから、

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial h_1}=0=\frac{d}{dt}(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{h}_1})=\frac{d}{dt}\{(1-\mu)P_1\}$$
$$\therefore(1-\mu)P_1=const. \tag{30}$$

同様にして

$$(1-\mu)P_2=const. \tag{31}$$

よって、

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\partial F/\partial\dot{h}_2}{\partial F/\partial\dot{h}_1}=const. \tag{32}$$

さらに

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\mu}=-\sum P_i\dot{h}_i=0$$
$$\therefore P_1\dot{h}_1+P_2\dot{h}_2=0$$

つまり、

$$-\frac{P_2}{P_1}=\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \tag{33}$$

である。この式の左辺は(30)、(31)式から定数である。そこで価格 $P_1(t)$、$P_2(t)$ は常に正であると仮定する。すると(33)式の左辺は常に負である。また右辺は少くともある微小区間で同符号

になるとする。この2つの仮定が同時に成り立つためには

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0 \quad \therefore h_i = h_i^0 = const. \tag{34}$$

でなければならない。よって

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{h}_i} \ (i=1, 2) \tag{35}$$

であるが、F が1次同次だからこの右辺は零次同次であり、かつ(27)式の F において、$\dot{h}_i = 0$ だから、F は解経路に沿って h_1、h_2の比のみの関数である。したがって(34)式から(35)式の右辺は定数であることがわかる。よって

$$P_i = P_i^0 = const. \ (i=1, 2) \tag{36}$$

したがってまた(30)、(31)式から

$$\mu = \mu_0 = const. \tag{37}$$

を得る。

よって、(28)式の $\tilde{H} = const.$ を満たし、かつ(33)式で仮定した2つの条件を満足する解は、(34)、(36)、(37)の諸式を満たすものでなければならない。これらの諸式を(26)式代入すると

$$K_i = h_i^0 e^{\rho t} = K_i^0 e^{\rho t}, \ \lambda = \mu_0 e^{-\rho t}$$
$$\dot{K}_i = \rho h_i^0 e^{\rho t} = \rho K_i^0 e^{\rho t} \ (i=1, 2) \tag{38}$$

を得る。これは割引率 ρ で成長するターンパイク経路である。これらを(23)式の目的関数に代入すると

$$\begin{aligned} &\{P_1\dot{K}_1 + P_2\dot{K}_2 - \rho(P_1K_1 + P_2K_2)\}e^{-\rho t} \\ &= \{Y - \rho W\}e^{-\rho t} = \{\rho(P_1^0K_1^0 + P_2^0K_2^0)e^{\rho t} \\ &\quad - \rho(P_1^0K_1^0 + P_2^0K_2^0)e^{\rho t}\}e^{-\rho t} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{39}$$

となって、目的関数は解経路に沿って零である。同時に競争下にあっては(28)式のハミルトニアンは零である。それは(28)式において

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial h_i} h_i = Y$$

$$\rho \sum \frac{\partial F}{\partial \dot{h}_i} h_i = \rho \sum (-P_i) h_i = -\rho W$$

であり、(28)式と目的関数の被積分関数である(39)式とは、経済学的には同じ内容の別表現だからである。これについてはサミュエルソン(1972, 1990)を参照。なお、(28)式の $\tilde{H}$ が数学的に零にならなければならないことの証明は、例えばエルスゴルツ（1972）を参照。このエルスゴルツの議論は、有限区間での横断性の条件である。

かくて、目的関数が所得と資本ストック保有の機会費用との差として与えられるようなモデルでは、有限視野の場合でも最適経路に沿って目的関数とハミルトニアンがともに零であることが示された。もちろんこの結論は、$T \to \infty$ としても変わらない。しかしながら、このモデルにあっては、目的関数が零であることも、ハミルトニアンが零であることも、ともに経済学的に無意味な結果をもたらさない。目的関数が零ということは、最適経路上では、資本ストック保有の機会費用に等しい所得が毎時点生み出されなければならないという明解な経済学的意味を有し、他方ハミルトニアンが零ということは、最適経路に沿って $Y/W = \rho$（サミュエルソンの予想）が成り立つことを意味する。つまり、われわれが設定したモデルでは、その経路に沿ってサミュエルソンの予想が成り立つことと、その経路が最適経路であることとは同値なのである。

Ⅳ．結語

本稿では、これまでに扱われた新古典派的フォン・ノイマンモデルを新しい観点から再考察した。それは従来のモデルでは、目的関数の積分区間の上限を無限大に拡張したとき、最適経路に沿って目的関数が毎時点で零となって、そ

の経済学的意味を失うからである。この欠陥を克服するためにはモデルは変更されなければならない。そこでわれわれが設定したモデルは、目的関数を所得と資本ストック保有の機会費用との差の割引現在価値とした新しいモデルである。このモデルは、古典力学のラグランジアン、つまり運動エネルギーと位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）との差にヒントを得たものであり、所得が運動エネルギーに相当し、資本ストック保有の機会費用がポテンシャルエネルギーに相当している。

このモデルにおいても最適解に沿って目的関数は零であるが、これまでのモデルとは異なってこの解は、経済学的に明解な意味を持っている。それはノイマンの言う許容される最大の成長経路であり、この経路に沿って所得 Y と資本ストックの機会費用は常に正であり、かつ所得 Y は資本ストックの機会費用に等しいのである。ここにおいても、ノイマンが離散型モデルでその存在を不動点定理を用いて証明した経路が連続型モデルでは、保存則を満たす最適経路として再び現われることは興味深い新しい発見である。

最後に新古典派的フォン・ノイマンモデルについてこのような新しい提案を行った動機について述べて拙稿を終ることにしたい。それはこのモデルに関するサミュエルソンの議論に物足りなさを感じたためである。というのも既に述べたように，このモデルにおいてサミュエルソンが得た保存量はハミルトニアン $\mathrm{H}=\lambda \mathrm{Y}$ であるが，サミュエルソンはこれが解経路上で保存される全エネルギーであり，またこの全エネルギーは運動エネルギーと位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）との合計に等しいと述べているが，不思議なことにこの両エネルギーに対応する経済量の定義については，何も与えていないのである。したがって，このモデルにおける運動エネルギーに相当する経済量は何か，また位置エネルギーに相当する経済量は何かをかなりの間考えている過程で本稿における定義に行きつき，すると目的関数も古典力学とのアナロジーでこれら 2 つのエネルギーとの差（の割引現在価値）とすることは，自然の成り行きでもあったのである。

本稿を通読され，貴重なコメントを頂いた本誌の編集者に対し心から感謝申しあげたい。しかしながら，なお有り得る誤りについてはすべて筆者の責任である。

参　考　文　献

〔1〕 Cohen, A., 1911, *An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups*. Boston, Heath.（高野一夫訳『コーエンの微分方程式』森北出版1971）

〔2〕 Dorfman, R., Samuelson, P., and Solow, R., 1958, *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill.（安井琢磨・福岡正夫・渡辺経彦・小山昭雄訳『線形計画と経済分析』岩波書店1959）

〔3〕 Elsgolc, L. E., 1961, *Calculus of Variations*, Massachusetts, Addison-Welsey.（瀬川富士訳『エルスゴルツ変分法』ブレイン図書出版1972）

〔4〕 橋本泰明（2004）「同次性下の非線形最適制御モデルの解法」亜細亜大学『経済学研究紀要』第29巻第1号、7-16。

〔5〕 片岡晴雄（1993）「新古典派的フォン・ノイマンモデルの解経路について」『明星大学経済学研究紀要』24、No.2、31-39。

〔6〕 Kataoka, H., and Hashimoto, H., 1995, "New Conservation Laws in a Neoclassical von Neumann Model," *Journal of Mathematical Economics*, 24, 271-280.

〔7〕 Kataoka, H., and Semba, K., 2002, "The Neoclassical Investment Model and a New Conservation Law," *Journal of Economics* (*Zeitschrifts für Nationalökonomie*), 75, 137-160.

〔8〕 片岡晴雄（2004）『最適経済動学モデルと保存則』信濃印刷株式会社

〔9〕 小山昭雄（1995）『経済数学教室 8 ダイナミック・システム（下）』岩波書店

〔10〕 Lanczos, C., 1970, *Variational Principles of Mechanics*, New York, Dover Publications.（高

橋康監訳『解析力学と変分原理』日刊工業新聞社 1992）
〔11〕 Lovelock, D., and Rund, H., 1988, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, New York, Dover Publications.
〔12〕 宮下精二（2000）『解析力学』裳華房
〔13〕 von Neumann, J., 1937, “Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes,” *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquims*, 8, 73-83, translated as “A Model of General Economic Equilibrium,” *Review of Economic Studies*, 13, 1-9（1945-46）.
〔14〕 大貫義郎（1987）『解析力学』岩波書店
〔15〕 高橋康（2000）『量子力学を学ぶための解析力学入門（増補第２版）』講談社
〔16〕 坂本實訳（2000）ポントリヤーギン『最適制御理論における最大値原理』森北出版
〔17〕 Samuelson, P. A., 1970, “ Law of Conservation of the Capital-Output Ratio,” *Proceedings of the National Academy of Sciences, Applied Mathematical Sciences*. 67, 1477-1479.
〔18〕 Samuelson, P. A., 1990, “Two Conservation Laws in Theoretical Economics, in *Conservation Laws and Symmetry : Applications to Economics and Finance*, R. Sato and R. V. Ramachandran, eds., Boston, Kluwer Academic Publishers, 57-70.
〔19〕 Sato, R., 1981, *Theory of Technical Change and Economic Invariance : Application of Lie Groups*, New York, Academic Press.（濃野隆之監訳三野和雄・筒井俊一訳『技術変化と経済不変性の理論』勁草書房1984）
〔20〕 Sato, R., 1985, “The Invariance Principles and Income―Wealth Conservation Laws,” *Journal of Econometrics*, 30, 365-389.
〔21〕 Sato, R., and Ramachandran, R. V., eds., 1990, *Conservation Laws and Symmetry : Applications to Economics and Finance*, Boston, Kluwer Academic Publishers.