経済における不完備情報のベイジアン表現について
―状態空間アプローチとタイプ空間アプローチ―

市石達郎[†)]・山崎　昭

要　旨

本稿の目的は多種多様（ヘテロジェニアス heterogeneous）な情報を付与された人々から構成される情報社会とそこでの構成員の市場活動の分析に際して用いられる状態空間アプローチとタイプ空間アプローチの表現形式の関係を説明することにある。

〔キーワード〕　不完備情報　ベイジアン表現　状態空間アプローチ　タイプ空間アプローチ

1　はじめに

多種多様な情報をもつ人々から構成される経済社会において、人々の市場行動や市場取引の成果は、すべての人々が情報を共有する場合と比較し、どのような違いがあるかについての研究は、この30年間で大きな進展を見せてきた。こうした研究では、人々の意思決定に基本的な影響を及ぼす情報が人々の間でどのように異なっているかについて明確な表現が求められる。人々がもつ異なる情報の表現には、大きく分けて２種類の表現方法が基本的である。一つは一般的な確率論の枠組みにおける接近方法で、経済学においては「状態空間アプローチ」とよばれる表現方法であり、Savage（1954）がその明確な意味づけを行っている。いま一つは、ゲーム理論における不完備情報ゲームの分析のために Harsanyi（1967）が導入したタイプ空間アプローチによる表現方法である。

数学的な表現形式としては、確率論的な情報構造の表現形式である状態空間アプローチの方がより一般的な数学上の構造をもっているように見えるが、それにもかかわらず経済学の文献では、これら両者のアプローチは数学的に「同値」equivalent であるという指摘がなされてきた[1)]。

しかしそれがどのような意味で同値と言えるのか、またその場合、形式上の情報構造の相違をどのように解釈できるのか、などといった点について明示的な議論をした文献は筆者による英文の文献 Ichiishi and Yamazaki（2006）のみのようである。本稿では、この文献におけるわれわれの議論に沿ってこれら両者の表現形式の関係を明示的に考察し、解説を加えることとしたい。

[†)]オハイオ州立大学名誉教授

[1)] 例えば、M. O. Jackson（1991, p. 463, 脚注４））参照。

2　状態空間アプローチによる情報構造の表現

情報と不確実性

情報が問題になるのは、経済社会を形成する種々のパラメーターや経済を取り巻く環境について、人々が全知全能の「神」のようにすべてを知っている訳ではないことによる。言い換えれば、経済環境や経済の各種のパラメーターが確定的ではなく、「不確実」uncertain であることが情報の存在意義となっていると考えられる。この意味で不確実性と情報とは概念的に密接に連関しており、不確実性を部分的にも排除するものとして情報そのものを規定できる。

経済社会を取り巻く環境（歴史的環境をも含む）の不確実性と経済を構成する各種のパラメーターについての不確実性とを区別することもあるが、本稿では不完備情報ゲームの表現との関連で導入されたタイプ空間アプローチとの関係を議論することから、経済を構成する各種のパラメーターについての不確実性も含めた形で不確実性を理解する。経済環境の過去から未来への系列や経済社会を構成する人々の意思決定の際の不確実性の対称となるすべてのパラメーターを確定的に示した状態を「**世界の状態**」a state of the world とよび、全ての世界の状態の集合を Ω で表す。Ω の元を ω とすれば、「経済を取り巻く環境や各種のパラメーターについて不確実である」ということを、Ω のどの ω であるかが「**不確実**である」と解釈する。ここで「不確実である」ということは「知らない」ということでもある。また、$\omega\in\Omega$ が１つ決まっていれば、それは経済環境の過去から未来への系列が明確に与えられることだから、一般に起こりうる現象は、いくつかの状態の集まりによって表現される。例えば、2010年４月１日に関東大地震が起こるというのは、経済環境の過去から未来への系列の中で、2010年４月１日に関東大地震が起こる系列全体の集合によって表される。

そこで Ω の特定の部分集合によって、経済環境の１つの現象を表し、これを自然の**事象** event とよぶ。起こりうる自然の事象全体の集合を $\mathcal{F}$ としよう。$\mathcal{F}$ を集合代数とする。$\mathcal{F}$ が集合代数ということは、

(i)不可能な事象があること

(ii)ある事象が起こりえるならば、それが起こらないこともありえること

(iii)起こりえる事象がいくつかあるとき、それら全ての事象が同時に起こることも可能であること[2)]

を意味している。

$(\Omega, \mathcal{F})$ を世界の状態についての不確実性とよぶことにする。集合代数 $\mathcal{F}$ は、経済環境として起こりうる事象を表現していることから、情報を規定する１つの方法は、それが $\mathcal{F}$ の中でどの事象についての情報を与えているのか、その範囲を示すことである。言い換えると、情報を集合代数 $\mathcal{F}$ の部分集合（より正確には部分集合代数）によって示すことができる。さらに、$\mathcal{F}$ は可能な情報全てを表現するのだから、その性質として

$$(\forall\omega\in\Omega)\{\omega\}\subset\mathcal{F}$$

を要請することが自然であり、これを前提としよう。この意味で自然の状態についての「完全情報」とは、$\mathcal{F}$ を指すこととする。したがって、$\mathcal{F}$ を（自然の状態についての）**情報の普遍集合** the universal set of information とよぶ。以上により、集合 $E\in\mathcal{F}$ をそれぞれの場合に応じて、「**情報**」もしくは「**事象**」（あるいは、

---

2) (i) $\emptyset\in\mathcal{F}$, (ii) $E\in\mathcal{F}$ ならば $\Omega\backslash E\in\mathcal{F}$, (iii) E_i, ($i=1, 2, \ldots, m$), ならば $\cap_{i=1}^{m}E_i\in\mathcal{F}$

より口語的表現で「状況」）とよぶこととする。

また、本稿では$\mathcal{F}$を情報の集合と考えるということの意味を、つぎのように解釈する。$E \in \mathcal{F}$を情報として持つならば、実際の自然の状態がωであるとき、状態ωがEに属しているか否か（つまり、「Eが起こっているか否か」）を「**知っている**」あるいは「**認識する**」ことを意味する。以下、「知っている（知りえる）」ことと「認識する（認識できる）」ことをいずれも同義語として扱う。

個人と情報

経済における人々の母集団を$N=\{1, 2, \ldots, n\}$とする。Nの代表元をiやj等で表し、個人、（経済）構成員、プレイヤーなどとよぶ。完全情報のうち、どれだけ情報を保有しているかによって個人jの持つ情報を表現し、具体的には$\mathcal{F}$の部分集合代数$\mathcal{F}^j \subset \mathcal{F}$によって表す。$\mathcal{F}^j$を$j$の**情報集合**とか**情報構造**あるいは$j$の**私的情報構造**とよび、$\mathcal{F}^j$に属する$F$を**私的情報**という。

各個人が私的情報を得る段階を**中間期** *interim* period というが、このとき個人jが、$\omega \in F$で$\omega' \notin F$となる情報$F \in \mathcal{F}^j$を保有しているならば、jは2つの異なる状態ωと状態ω'とを識別することができる。さきの約束にしたがい$E \in \mathcal{F}^j$のとき、jは情報（事象）Eを知っている（認識できる）という。

個人jの情報集合$\mathcal{F}^j$が与えられたとき、この情報（集合）から認識できる最も詳しい事象を明示することによっても、jがある事象Eを知っているか否かを判断することが可能である。世界の状態が$\omega \in \Omega$のとき、ωを含む$\mathcal{F}^j$の（包含関係に関する）最小元を$\mathcal{P}^j(\omega)$とすれば、jが事象$E \in \mathcal{F}$を知っているか否かを$\mathcal{P}^j(\omega) \subset E$か否により判断してもよい。$\mathcal{P}^j(\omega) \subset E$ならば、$j$は$\omega \in E$であることが分かるからである。そこで、個人$j$の情報集合$\mathcal{F}^j$に対し、この情報集合から認識できる最も詳しい情報（$\mathcal{F}^j$のアトム）から構成されるΩの可測分割を個人jの**情報分割** information partition とよび、これを今後$\mathcal{P}^j$と書くことにする。またωを含む$\mathcal{P}^j$の元を$\mathcal{P}^j(\omega)$で表す。

経済における人々の私的情報$\mathcal{F}^j, j \in N$, が与えられるとき、本稿では、$\vee_{j \in N} \mathcal{F}^j = \mathcal{F}$であるとする[3)]。これは経済における誰かが識別できる状態のみを異なる状態として扱うことを意味する。情報集合$\mathcal{F}$から認識できる最も詳しい情報（$\mathcal{F}$のアトム）から構成されるΩの情報分割を$\mathcal{P}$と書くと、どの$\omega \in \Omega$についても、ωを含む情報分割$\mathcal{P}$の元が$\mathcal{P}(\omega)=\{\omega\}$となるということである。また、個人$j$の情報分割$\mathcal{P}^j$と情報$E \in \mathcal{F}$が与えられたとき、$\mathcal{P}^j(\omega) \subset E$であれば、個人$j$は$\omega$において$E$を知っている（あるいは、認識できる）という。$E \in \mathcal{F}$, $\omega \in E$で$\mathcal{P}^j(\omega) \cap (\Omega \backslash E) \neq \emptyset$のとき、$\omega$において$j$は情報（事象）$E$を認識できない。また、$E \notin \mathcal{F}^j$であっても、ある$\omega$において$j$は情報$E$を認識できることがある。しかし、一般にはつぎの関係が成立する。

事実 2.1

個人jの情報分割$\mathcal{P}_j$は可算個の元からなるものとする。このとき、個人jが情報（事象）Eを知っている（認識できる）ことと、任意の$\omega \in \Omega$においてjがEもしくは$\Omega \backslash E$を知っている（認識できる）ことと同値である。つまり、

$$E \in \mathcal{F}^j \Longleftrightarrow (\forall\, \omega \in \Omega)\, \mathcal{P}^j(\omega) \subset E \\ \text{または}\, \mathcal{P}^j(\omega) \subset \Omega \backslash E$$

が成立する。

---

3) $\vee_{j \in N} \mathcal{F}^j$は$\mathcal{F}_j, j=1, \ldots, n$, のいずれかに属する情報$F$をすべて含む最小の集合代数を意味する。

説明　(1) $\omega\in\Omega$, $E\in\mathcal{F}^j$ とする。$\mathcal{P}^j(\omega)\cap E\neq\emptyset$ ならば、$\mathcal{P}^j(\omega)$ がアトムであることより $\mathcal{P}^j(\omega)\cap E=\mathcal{P}^j(\omega)$ となる。よって、$\mathcal{P}^j(\omega)\subset E$ である。$\mathcal{P}^j(\omega)\cap E\neq\emptyset$ ならば、$\mathcal{P}^j(\omega)\cap(\Omega\backslash E)\neq\emptyset$ だから、上と全く同様に、$\mathcal{P}^j(\omega)\subset\Omega\backslash E$ となる。

(2) $(\forall\omega\in\Omega)\,\mathcal{P}^j(\omega)\subset E$ または $\mathcal{P}^j(\omega)\subset\Omega\backslash E$ ならば、$\cup_{\omega\in E}\mathcal{P}^j(\omega)=E$ であり、$\mathcal{F}^j$ が可算個の元からなることにより、$\cup_{\omega\in E}\mathcal{P}^j(\omega)\in\mathcal{F}^j$ である。よって、$E\in\mathcal{F}^j$ となる。　□

個人 j が情報 E を知っていることは、任意の ω において E が起こっているかいないかを j が認識できることと同じであることを上の事実は示している。

不完備情報と条件付き確率

不完備情報下で各個人は自分がもつ私的情報をもとにより詳しい状況についてベイズ流の推測を行うが、それは 私的情報 $\mathcal{F}^j$ の下で、$\vee_{i\in N}\mathcal{F}^i$ の各事象について定義される条件付き確率 $\pi^j(\cdot|F)$, $F\in\mathcal{P}^j$, として与えられる。この条件付き確率 π^j は主観的確率であっても、客観的確率であってもよい。

3　タイプ空間アプローチによる情報構造の表現

情報とタイプ空間

前節では抽象的に与えられる確率測度空間を基礎とし、空間の構造に特に制約を加えないという意味で、非常に一般的な情報構造を表現する状態空間アプローチを説明した。

ついで Harsanyi（1967/1968）がベイジアン不完備情報ゲームの定式化において導入したタイプ空間アプローチによる情報構造の表現について説明しよう。

N の各個人 $j\in N$ について、T^j は個人 j が持つ情報の状態 informatin states を表す**タイプ空間**とする。j の各**タイプ** $t^j\in T^j$ は、自分自身の選好や自分以外の他の者のタイプに関する信念や予想を完全に表現するものとし、中間期においては、個人 j だけが集合 T^j のどのタイプ t^j が実現したかを知り、その意味で実現したタイプ $t^j\in T^j$ を j の**私的情報** private information という。j が持つ可能性のあるすべての個人情報の集合が、T^j である。すべての T^j は有限集合だとする。

$T:=\prod_{j\in N}T^j$ と定め、T の元 $t=(t^1,\ldots,t^n)$ を経済における**情報状態** an information state とか、あるいは経済における個人の**タイプ・プロフィール** a type-profile という。

経済構成員である個人誰もが私的情報を得ていない期間を**事前** *ex ante* 期間とよぶが、経済の情報状態 $t\in T$ に関する**事前確率**分布 an *ex ante* probability distribution を有しているとする。この確率分布は主観的確率であっても、客観的確率であってもよいものとする。

事前期間に対し、経済の各個人が私的情報を得ているが経済の真の情報状態については、まだ知らない期間のことを**中間期** *interim* という。場合によっては、中間期というよびかたをさらに特定化し、経済のそれぞれの個人が私的情報のみを得た期間に限定して中間期とよぶ場合もある。経済のすべての個人が経済の情報状態についての情報を得る期間のことを**事後** *ex post* 期間とよぶ。

個人 j が私的情報 t^j を入手すると、j 以外の人々の私的情報について予測すると考えるが、そうした予測は $T^{N\backslash\{j\}}$ の上の**中間期確率** an *interim* probability $\pi^j(\cdot|t^j)$ として与えられるものとする。この確率も事前確率と同様に、主観的確率であっても、また客観的確率であってもよいものとする。また、場合によっては、中間期確率が T 上の事前確率 π^j からベイズの

公式

$$\pi^j(t^{N\setminus\{j\}}\,|\,t^j)=\frac{\pi^j(t^{N\setminus\{j\}},\ t^j)}{\pi^j(T^{N\setminus\{j\}}\times\{t^j\})}.$$

により導かれたものであることを想定することもある。中間期確率 $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$ という代わりに、タイプ t^j の下での**条件付き確率**と表現する場合もある。

個人 j のタイプ空間 T^j は、空間 T の 1 つの分割、$\{\{t^j\}\times T^{N\setminus\{j\}}\,|\,t^j\in T^j\}$ を生成する。この分割の元 $\{t^j\}\times T^{N\setminus\{j\}}$ は、個人 j が自分のタイプは t^j であると中間期に私的情報を得たとき、その情報だけでは j が識別できない情報状態の集合を表している。各 j について、この分割によって生成される集合代数を $\mathcal{T}^j$ と書き、j の**私的情報構造** private information structure とよぶ。

一般的な「情報」という意味では、中間期において各個人は自分自身の私的情報構造 $\mathcal{T}^j$ が表現する以上の「情報」を持っている可能性がある。このような「情報の開示」に貢献する要因の 1 つは、j の中間期確率 $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$, $t^j\in\mathcal{T}^j$, である[4)]。

タイプ $\bar{t}^j$ が実現するとき、もし $\pi^j(t^{N\setminus\{j\}}\,|\,\bar{t}^j)=0$ であれば、個人 j は自分以外の他の人々のタイプは $t^{N\setminus\{j\}}$ とはなり得ないと認識するだろう。そこで $\mathrm{supp}\,\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$ を確率測度 $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$ の台としよう。$\mathrm{supp}\,\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$ はつぎの集合として与えられる。

$$\mathrm{supp}\,\pi^j(\cdot\,|\,t^j):=\{t^{N\setminus\{j\}}\in T^{N\setminus\{j\}}\,|\,\pi^j(t^{N\setminus\{j\}}\,|\,t^j)>0\}.$$

そうすると個人 j が私的情報を得た中間期において考える経済の可能な情報状態、つまり、j が正の中間期確率を与える情報状態の集合は

$$T(\pi^j):=\bigcup_{t^j\in T^j}\{t^j\}\times\mathrm{supp}\,\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$$

となる。このとき、j の私的情報構造は集合代数

$$\mathcal{T}^j(\pi^j):=\mathcal{T}^j\vee\{\emptyset,\ T(\pi^j),\ T\setminus T(\pi^j),\ T\}$$

で与えられることになる。

一般にタイプ・プロフィール空間 T の部分空間 $T(N)$ 上でのみゲームの戦略や経済における人々の行動が計画されるとすると、

$$\bigcup_{j\in N}T(\pi^j)\subset T(N)\subset T$$

が成立していなければならない。

j の私的情報構造が $\mathcal{T}^j$ から $\mathcal{T}^j(\pi^j)$ へと、より詳細になることの意味合いは、当然のことながら条件付き確率 $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$, $t^j\in T^j$, が主観的確率かそれとも客観的確率かによって異なってくる[5)]。

しかし、すべての t^j について $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)>\mathbf{0}$ のときは、中間期確率は追加的情報を与えることは全くなく、$\mathcal{T}^j(\pi^j)=\mathcal{T}^j$ である。そして経済のすべての個人が同様の状況にあるとすると、タイプ空間アプローチによって表現される情報の非対称性はもっとも極端な非対称性を示すこととなり、$i\neq j$ に対し

$$\mathcal{T}^i(\pi^i)\wedge\mathcal{T}^j(\pi^j)=\{\emptyset,\ T\}$$

となる。言い換えれば、中間期においてそれぞれの個人は、自分自身のタイプについてのみ情報を得るだけで、自分以外の人々のタイプについては一切情報をえることはない、ということである。

---

4) 情報開示の要因にはこの他にもいくつかあるが、本稿では触れない。

5) 特に、中間期確率が主観的確率として客観的確率と相違する場合は、中間期に t^j を私的情報として知ることとは全く違う意味に解釈しなければならない。

4　タイプ空間アプローチと状態空間アプローチとの関係

前節では、Harsanyi が導入したタイプ空間アプローチによる不完備情報の定式化を説明した。経済を構成する各個人 $j \in N$ について、個人 j のタイプ空間 $T^j,\ j \in N$, と、各タイプ t^j に対し、空間 $T^{N\setminus\{j\}}$ 上で定義されるタイプ t^j が与えられた下での条件付き確率, $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$, によって定式化する。この条件付き確率 $\pi^j(\cdot\,|\,t^j)$ を、t^j が与えられた下での T 上の条件付き確率

$$\pi^j_T\ (s^j,\ t^{N\setminus\{j\}}\,|\,t^j) := \begin{cases} \pi^j(t^{N\setminus\{j\}}\,|\,t^j) & s^j = t^j \text{の場合} \\ 0 & s^j \neq t^j \text{の場合} \end{cases}$$

と考えてもよい。本稿ではタイプ空間アプローチにおける条件付き確率は T 上で定義されているものとして議論を進める。

以下本節では、タイプ空間アプローチと状態空間アプローチという 2 つのアプローチが相互にどのような関係にあるのか、それらの関係を解説したい。

従来, 文献の中ではこれら 2 つのアプローチは「同値である」というような指摘がなされていることはあるが, 実際, いかなる意味で同値であるといえるのかといった点について, 詳細な言及や議論はなされてこなかった. 本稿ではわれわれが Ichiishi and Yamazaki (2006) において最初に示した議論を紹介し、その意味を簡単に解説することにする.

以下では、第 3 節で示した条件を満たす情報構造 $\{T^j, \{\pi^j(\cdot\,|\,t^j)\}_{t^j \in T^j}\}_{j \in N}$ を**タイプ空間表現による経済の情報構造**とよび、第 2 節で示した条件を満たす情報構造 $\{\Omega, \{\mathcal{F}^j, \pi^j(\cdot\,|\,F)\}_{F \in \mathcal{P}^j}\}_{j \in N}$ を**状態空間表現による経済の情報構造**とよぶことにする。

タイプ空間表現から状態空間表現へ

まず、タイプ空間アプローチによる情報構造の表現が、状態空間アプローチによる情報構造によって表現可能であることは、可測空間の一般性から言って明かであろう。

事実、タイプ空間アプローチによる情報構造 $\{T^j, \{\pi^j_T(\cdot\,|\,t^j)\}_{t^j \in T^j}\}_{j \in N}$ が与えられたとき、$\Omega := T,\ \mathcal{F}^j := \mathcal{T}^j$, と定め、各 $j \in N,\ F \in \mathcal{F}^j$ に対し、$F = \{t^j\} \times T^{\Omega\setminus\{j\}}$ となる t^j があるから、その t^j に対し、$\pi^j_\Omega(\cdot\,|\,F^j) := \pi^j_T(\cdot\,|\,t^j)$ と定めればよい。

言い換えると、タイプ空間によって情報構造が表現されたとき、それを状態空間アプローチの枠組みで考えるということは、経済を構成するすべての個人のタイプ・プロフィール、つまり経済の情報状態を状態空間の構成要素と考えるということであり、各個人の私的情報構造はその個人のタイプのみ識別し、その他の個人のタイプを識別しないようなタイプ空間の分割によって与えられるということである。

命題 4.1

タイプ空間表現による経済の情報構造 $\{T^j, \{\pi^j_T(\cdot\,|\,t^j)\}_{t^j \in T^j}\}_{j \in N}$ が与えられたとき、それを表現する状態空間表現による経済の情報構造 $\{\Omega, \{\mathcal{F}^j, \pi^j_\Omega(\cdot\,|\,F)\}_{F \in \mathcal{P}^j}\}_{j \in N}$ が存在する。

状態空間表現からタイプ空間表現へ

つぎに、一般的な状態空間表現による経済の情報構造をタイプ空間によって表現することを考えよう。状態空間自体は抽象的な集合として与えられているから、一般的にはタイプ空間のような数学的構造を持つことを要請されていない。したがって、抽象的な状態空間から経済を構成する各個人のタイプ・プロフィールの空間がどのように構成できるかが問題となる。要は状態空間で表現される私的情報構造から個人のタイプ空間を構成するということである。

第2節において、本稿では $(\forall \omega \in \Omega)\{\omega\} \subset \mathcal{F}$ および $\bigvee_{j\in N}\mathcal{F}^j = \mathcal{F}$ を要請することとした。簡単に言えば、これは経済における誰かが識別できる状態のみを異なる状態として扱うということである。したがって、$\bigvee_{i\in N}\mathcal{F}^i = 2^{\Omega}$ となる。数学的には、$\bigvee_{i\in N}\mathcal{F}^i \neq 2^{\Omega}$ の場合は、集合 Ω を $\bigvee_{i\in N}\mathcal{F}^i$ に属する最小元 F から構成される集合として再定義するということである。

そこで、一般的な状態空間表現による経済の情報構造をタイプ空間によって表現可能であることを以下に示そう。

上記のように、$\bigvee_{i\in N}\mathcal{F}^i = 2^{\Omega}$ としたことを念頭に置き、最初に、すべての $j\in N$ について、個人のタイプ空間を $T^j := \mathcal{P}^j$ と定義する。全体のタイプ・プロフィールの空間は $T := \prod_{i\in N}T^i$ である。

まず、任意に与えられた $\omega\in\Omega$ に対し、$\bigvee_{i\in N}\mathcal{F}^i = 2^{\Omega}$ から、$\{\omega\} = \bigcap_{j\in N}\mathcal{P}^j(\omega)$ である。したがって、状態空間 Ω の各元 ω に対し、タイプ空間の元 $t := (\mathcal{P}^j(\omega))_{j\in N} \in T$ が一意的に定まる。

逆に、各 $t = (F^j)_{j\in N} \in T$ に対し、集合 $\bigcap_{j\in N}F^j$ は空もしくは非空である。

(i) $\bigcap_{j\in N}F^j \neq \emptyset$ の場合

$\omega \in \bigcap_{j\in N}F^j$ とすると、$\bigvee_{i\in N}\mathcal{F}^i = 2^{\Omega}$ から、この ω は一意的である。したがって、各 $t = (F^j)_{j\in N} \in T$ に対して、Ω の元 ω を $\{\omega\} := \bigcap_{j\in N}F^j$ によって一意的に定めることができる。

(ii) $\bigcap_{j\in N}F^j = \emptyset$ の場合

この場合は経済のすべての個人がこのようなタイプ・プロフィール $t = (F^j)_{j\in N} \in T$ は決して実現しえないことを知っているため、こうしたタイプ・プロフィール t に対して正の中間期確率を付与することはあり得ないことになる。つまりどの個人をとってもみても、その条件付き確率の定義の範囲からはずれることになる。

したがって、$\bigcap_{j\in N}F^j = \emptyset$ となる $t = (F^j)_{j\in N} \in T$ については、$T(N) \subset T \backslash \{t\}$ である。

例えば、ある $i \neq j$ について $\mathcal{P}^i \cap \mathcal{P}^j$ が、空間 Ω の真部分集合 F を含んでいるならば、共通集合 $\bigcap_{h\in N}F^h$ は空集合となる可能性がある。というのは，もし $F^i = F$ で $F^j \neq F$ のときは、$\bigcap_{h\in N}F^h = \emptyset$ となるからである。この他にも $\bigcap_{j\in N}F^j = \emptyset$ となる例を簡単に見つけることができる。下記の例4.1もこのような状況の1つを描写している。

上の議論から集合 $T(N)$ は

$$\bigcup_{j\in N} T(\pi_T^j) \subset T(N) \subset \left\{ (F^j)_{j\in N} \in \prod_{j\in N}\mathcal{P}^j \,\middle|\, \bigcap_{j\in N}F^j = \emptyset \right\}$$

の条件を満たさなければならない。

つぎに、状態空間 Ω 上に与えられた確率測度 π_{Ω} に対し、上に定めた空間 T 上の確率測度 π_T がどのように定められるかを示さなければならない。確率測度 π_{Ω} は事前確率であっても、また中間期の条件付き確率でもよく、さらには客観的確率であっても、あるいは主観的確率であってもよい。

Ω 上で確率測度 π_{Ω} が与えられたとき、それに対し T 上の確率測度 π_T をつぎのように定めることができる。つまり、各 $t = (F^j)_{j\in N} \in T$ について、

$$\pi_T(t) := \pi_T((F^j)_{j\in N}) = \pi_{\Omega}\left(\bigcap_{j\in N}F^j\right)$$

によって、確率測度 π_T を T 上に定義する。状態空間表現による経済の情報構造 $\{\Omega, \{\mathcal{F}^j, \pi_{\Omega}^j(\cdot|F)\}_{F\in\mathcal{P}^j}\}_{j\in N}$ が与えられたとき、この操作を各個人 j の Ω 上の確率測度 π_{Ω}^j に施すことによって、タイプ・プロフィール空間 T 上の j の確率測度 π_T^j を定めることができる。

以上の議論をまとめたのが、つぎの命題 である。

命題 4.2

状態空間表現による経済の情報構造 $\{\Omega, \{\mathcal{F}^j, \pi^j_\Omega(\cdot|F)\}_{F\in\mathcal{P}^j}\}_{j\in N}$ が与えられたとき、それを表現するタイプ空間表現による経済の情報構造 $\{T^j, \{\pi^j_T(\cdot|t^j)\}_{t^j\in T^j}\}_{j\in N}$ が存在する。

命題4.1と4.2が何を意味するかについて、第5節で簡単に議論するが、その前に本節の議論と関係するいくつかの具体例を示しておこう。

簡単な具体例

例4.1　まず、$N=\{1, 2\}$, $\Omega=\{a, b, c\}$, $\mathcal{P}^1=\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{P}^2=\{\{a, b\}, \{c\}\}$ と定める。そうすると、各個人 $j=1, 2$ のタイプ集合 $T^j:=\{t^j_1, t^j_2\}$ は

$$t^1_1=\{a\},\ t^1_2=\{b, c\}$$
$$t^2_1=\{c\},\ t^2_2=\{a, b\}$$

と定義されることになる。したがって、タイプ・プロフィールの空間 T を、つぎの表と同一視することができる。

	t^1_1	t^1_2
t^2_2	$\{a\}$	$\{b\}$
t^2_1	$\emptyset$	$\{c\}$

そこで、π^j_Ω を Ω 上の事前確率とすると、π^j_Ω によって定まる T 上の事前確率 π^j_T は、

$$\mathrm{supp}\,\pi^j_T\subset\{(t^1_1, t^2_2), (t^1_2, t^2_1), (t^1_2, t^2_2)\}$$

を満足する。また、$\pi^j_\Omega(\cdot|F^j)$, $F^j\in\mathcal{P}^j$, を Ω 上の中間期確率とすれば、$\pi^j_\Omega(\cdot|F^j)$ によって定まる T 上の中間期確率 π^j_T, $t^j\in T^j$, は、

$$\bigcup_{t^j\in T^j}\mathrm{supp}\,\pi^j_T(\cdot|t^j)$$
$$\subset\{(t^1_1, t^2_2), (t^1_2, t^2_1), (t^1_2, t^2_2)\}$$

を満足する。

与えられた Ω 上の確率測度 π_Ω が、事前確率か中期間確率かによらず、この例において集合 $T(N)$ は

$$\bigcup_{j\in N}T(\pi^j_T)\subset T(N)$$
$$\subset\{(t^1_1, t^2_2), (t^1_2, t^2_1), (t^1_2, t^2_2)\}$$

を満足する。特に、$T(N)$ はタイプ・プロフィール空間 T の真部分集合となる。　□

例4.2　$N=\{1, 2\}$, $\Omega=\{a, b, c\}$, 各個人 $j=1, 2$ について、$\mathcal{P}^j=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ と定める。中間期と事後期が同じになるケースである。各個人 $j=1, 2$ のタイプ集合 $T^j:=\{t^j_1, t^j_2, t^j_3\}$ は、

$$t^j_1=\{a\},\ t^j_2=\{b\},\ t^j_3=\{c\}$$

となる。したがって、タイプ・プロフィール空間 T を、つぎの表と同一視することができる。

	t^1_1	t^1_2	t^1_3
t^2_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$
t^2_2	$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$
t^2_1	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

この場合、空間 T の特殊性により、Ω 上のどのような確率測度 π_Ω であろうと、それが定める T 上の確率測度 π_T の台 $\mathrm{supp}\,\pi_T$ は集合 $\{(t^1_1, t^2_1), (t^1_2, t^2_2), (t^1_3, t^2_3)\}$ の部分集合とならざるをえない。

例えば、事象 F が与えられた下での個人1の Ω 上の条件付き確率を $\pi^1_\Omega(\cdot|F)$, $F\in\mathcal{P}^1$, だとすると、$\pi^1_\Omega(\cdot|F)$ は、$F=\{a\}, \{b\}, \{c\}$ に対し、$\{\omega\}=F$ ならば $\pi^1_\Omega(\omega|F)=1$、$\{\omega\}\neq F$ ならば $\pi^1_\Omega(\omega|F)=0$ とならなければならない。したがって、$\pi^1_\Omega(\cdot|F)$, $F\in\mathcal{P}^1$, が定める $\bar{t}^1_h$, $h=1, 2, 3$, が与えられた下での T 上の条件付き確率は

$$\pi^1_T((t^1_k,\ t^2_l)\mid \bar{t}^{\,1}_h):=\begin{cases}1 & t^1_k=t^2_l=\bar{t}^{\,1}_h\text{の場合}\\ 0 & \text{その他の場合}\end{cases}$$

個人1の私的情報構造 $\mathcal{T}^1(\pi^1)$ は、集合

$$\{(t^1_1,\ t^2_1)\},\{(t^1_1,\ t^2_2),(t^1_1,\ t^2_3)\},$$
$$\{(t^1_2,\ t^2_2)\},\{(t^1_2,\ t^2_3),(t^1_2,\ t^2_1)\},$$
$$\{(t^1_3,\ t^2_3)\},\{(t^1_3,\ t^2_1),(t^1_3,\ t^2_2)\}.$$

によって生成される集合代数となる。そして集合 $T(N)$ は

$$T(N)=\{(t^1_1,\ t^2_1),(t^1_2,\ t^2_2),(t^1_3,\ t^2_3)\}$$

で与えられる。

上の例とは異なる例として、個人 $j=1,2,$ の Ω 上の事前確率 π^j_Ω が

$$\pi^1_\Omega(\omega)=\pi^2_\Omega(\omega)=\begin{cases}1 & \omega=a\text{の場合}\\ 0 & \omega\in\Omega\backslash\{a\}\text{の場合}\end{cases}$$

で与えられる場合を考えよう。これは双方の個人とも事前に状態 a が確率1で起こると確信しているケースである。そうすると、π^j_Ω によって定まる T 上の事前確率 π^j_T, $j=1,2,$ は、タイプ・プロフィール $(t^1_1,\ t^2_1)$ に確率1を付与することになるため、全体の経済構成員の間で取引や契約が事前になされるなされる場合のタイプ・プロフィールの領域 $T(N)$ は、

$$\{(t^1_1,\ t^2_1)\}\subset T(N)\subset\{(t^1_1,\ t^2_1),(t^1_2,\ t^2_2),(t^1_3,\ t^2_3)\}$$

を満たすこととなる。 □

5 タイプ空間アプローチと状態空間アプローチの関係についてのコメント

前節の命題4.1は、タイプ空間表現による経済の情報構造を状態空間によって表現可能であり、命題4.2は、逆に、状態空間表現による経済の情報構造をタイプ空間によって表現可能であることを示した。これらの事実から経済の情報構造のタイプ空間アプローチと状態空間アプローチとは同値であることを示したことになるか否かについて少しばかり触れておきたい。

まず、数学的に2つの確率測度空間が同値であると考えるときの概念規定だが、いま、確率測度空間 $(X,\mathcal{F}_X,\mu)$ と $(Y,\mathcal{F}_Y,\nu)$ とが与えられたとき、$\mathcal{F}_X$ から $\mathcal{F}_Y$ への写像 $\mathcal{T}:\mathcal{F}_X\to\mathcal{F}_Y$ で、$\mathcal{F}_X$ の任意の元 $E,F,E_i,\ i=1,\dots,m,$ に対し、条件

$$\mathcal{T}(E\backslash F)=\mathcal{T}(E)\backslash\mathcal{T}(F),$$
$$\mathcal{T}\Big(\bigcup_{i=1}^m E_i\Big)=\bigcup_{i=1}^m\mathcal{T}(E_i)$$
$$\mu(E)=\nu(\mathcal{T}(E))$$

を満たすものが存在するとき、確率測度空間 $(X,\mathcal{F}_X,\mu)$ と $(Y,\mathcal{F}_Y,\nu)$ は**同型**であるといい、写像 $\mathcal{T}$ を**同型写像**という。

数学的に2つの確率測度空間が同型であるときに、それぞれの確率測度空間によって表現されたアプローチは同値であると一般に言えるが、第4節で示した表現可能性の事実は、こうした議論の対象とはできない。タイプ空間アプローチによる情報構造を状態空間アプローチによって表現する場合は、タイプ空間を単純に状態空間とするのみであり、逆に、状態空間アプローチによる情報構造をタイプ空間アプローチによって表現する場合は、状態空間自体がタイプ空間のような特殊構造をもっていないことから、状態空間を拡張し、状態空間上で定義された情報構造の積集合の中での特殊構造と見ることによって、タイプ空間を構築することになるからである。

参考文献

Aumann, R. J. (1987), "Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality," *Econometrica* 55, 1—18.

Halmos, P. (1950), *Measure theory*, New York : Van Nostrand.

Harsanyi, J. C. (1967/1968) : "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players," *Management Science : Theor*y 14, 159-182 (Part I), 320-334 (Part II), 486—502 (Part III).

Ichiishi, T., and A. Yamazaki (2006), *Coopertaive extension of the Bayesian game*, New York : World Scientific Publishing Co.

Jackson, M. (1991), "Bayesian implementation," *Econometrica*, 59, 461—477.

Mertens, J., and S. Zamir, (1985), "Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information," *Intenational Journal of Game Theory* 14, 1—29.

Myerson, R. (1991), *Game theory*, Cambridge : Harvard University Press.

Savage, L. (1954), *The foundations of statistics*, New York : Wiley.

Wilson, R. (1978), "Information efficiency, and the core of an economy," *Econometrica* 46, 807—816.