経営意志決定におけるファジィ理論の応用

（2）NPV,AIPR,BEP,ROA と時間産出比率のファジイ評価

Fuzzy Logic Applications for Managerial Decision Making

阿部克己

Katsumi Abe

要旨

前報で，相対比較値（一対比較法による比率尺度）の行列から固有ベクトル法によってファジィメンバーシップ値を推定する階層化意志決定法 *AHP* を活用して，代替案の優位順位づけに単調性の効果を考慮するショケ積分を応用する事例を示した（阿部，2012）。今回は，リスク調整割引率法（*NPV*），生産性の指数分析システムである *AIPR システム*，財務比率のファジイ評価，損益分岐点分析（*BEP*），及び時間産出比率（生産性）への応用を取り上げる。

これらは積や比率を計算して業界平均や競争相手と比較し，経営指標は「非常に良い，まあまあ，悪い，大変弱い」といったような自然言語によるファジィ表現で評価される場合が多い。ファジイ理論をベースにしたファジィ評価は自然言語による表現がファジィ集合の関係に変換する（メンバーシップ関数の決定）ことによってなされる。重要なことはその変換過程において実務経験豊かなエキスパートの知見が活用されなければならないということである。ファジイ理論のメンバーシップ関数は評価を決定づけるのであるから，アイマイ情報としても実際のファジィシステムの設計と運用にはエキスパートたちの経験・知見・洞察に基づくものでなければならない。

ここでは，一般の意志決定数理モデルに比べて柔軟なファジィモデル，すなわち人間の主観的な知見の活用を経営の意志決定モデルに活用する事例を紹介する。

1　リスク調整割引率法への応用

不確実性を割引率で考慮して期待キャッシュフローの正味現在価値を求める手法である。すなわち，あるプロジェクトの利得を見積もるために将来の各時点における収益のリスクを考慮した現在価値を計算しなければならない。リスク調整割引率をファジイ数 [1)] で近似するのである。リスク調整割引率法で純現在価値（*NPV: Net Present Value*）は一般に次のように計算される。

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t} - I_0$$

NPV: Net Present Value, 投資Ｉに関連したキャッシュフローの純現在価値である。

R_t： t 年におけるキャッシュフローの期待値 (Expected Return)。各期における費用を引いた純益＋減価償却とする。

r: 経営のリスクを考慮して必要とされる収益率（rate of return）とする。

n: プロジェクト期間の総数とする。

I_0: 初期投資（initial Investment）サフィックス０は初期 $t=0$ を意味する。

企業の投資には最低の収益率 r を必要とされるが，上記の NPV がプラスであれば投資を決定することになる。

簡単な事例として，企業は 10 億円の投資で収益率 $r=20\%$ を要求するとしよう。また，期待収益は１年目～５年目をそれぞれ１，３，５，５，４億円としよう。NPV は以下のように計算される。

$$NPV=\sum_{t=1}^{n}\frac{R_t}{(1+r)^t}-I_0=\frac{1}{(1+0.2)^1}+\frac{3}{(1+0.2)^2}+\frac{5}{(1+0.2)^3}+\frac{5}{(1+0.2)^4}+\frac{4}{(1+0.2)^5}-10=-0.171$$

純現在価値は負であるから，このプロジェクトは受け入れられないことになる。もし初期投資を９億円に圧縮できたら，$NPV=0.829$ 億円となり，少なくともプロジェクト期間の NPV はプラスとなり受け入れる可能性は出てくる。

そこで，次のような条件を考えてみる。

初期投資：８億円から 12 億円と見積もる

期待収益：１年目：0.5～1.3 億円，２年目：２～４億円，３年目：４～６億円，４年目：４～６億円，５年目：３～５億円

割引率＝収益率（危険率）を，１年目：13%～15%，２年目：16%～18%，３年目：19%～21%，４年目：22%～24%，５年目：25%～27%

より具体的な条件は次の表１のように設定してみよう。

	p	r	q		
初期投資(億円) I_0	8	10	12		
期間 t(年)	1	2	3	4	5
収益率 p(危険性少)	0.13	0.16	0.19	0.22	0.25
収益率 r(危険性中)	0.14	0.17	0.20	0.23	0.26
収益率 q(危険性大)	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27
期間 t(年)	1	2	3	4	5
期待収益(億円) p	0.5	2	4	4	3
期待収益(億円) r	1	3	5	5	4
期待収益(億円) q	1.3	4	6	6	5

収益率(割引率)、期待収益、初期投資を三角型ファジイ数で近似する

三角型ファジイ数 P: $\mu_A(X)=0$ の点、r: $\mu_A(X)=1$ の点、q: $\mu_A(X)=0$ の点

表１　NPV の条件設定

ここで，割引率（危険率＝収益率），期待収益，初期投資は三角型ファジイ数[2)]で与える，すなわち，図１に示すごとくである（初期投資額，億円）。

まず，各年の *Discount Rate (DCR)*をファジィ演算で求める。

1年目

$$DCR_1 = \left(\frac{1}{1+0.15}, \frac{1}{1+0.14}, \frac{1}{1+0.13}\right)$$
$$= (0.86957, 0.87719, 0.88496)$$

2年目

$$DCR_2 = \left(\frac{1}{1.15}\cdot\frac{1}{1.18}, \frac{1}{1.14}\cdot\frac{1}{1.17}, \frac{1}{1.13}\cdot\frac{1}{1.16}\right)$$
$$= (0.73692, 0.74974, 0.76289)$$

3，4年目を省略して5年目の演算を示すと次のようになる。

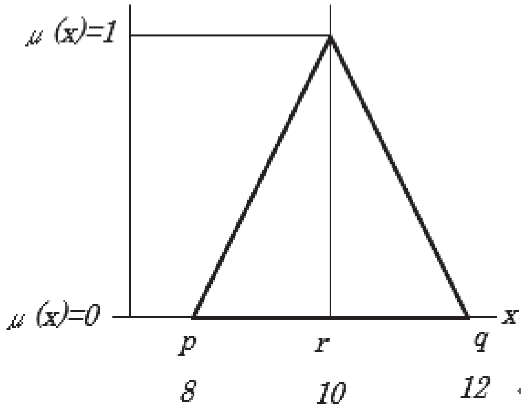


図1　三角型ファジイ数

初期投資（8,10,12）

$$DCR_5 = \left(\frac{1}{1.15}\cdot\frac{1}{1.18}\cdot\frac{1}{1.21}\cdot\frac{1}{1.24}\cdot\frac{1}{1.27}, \frac{1}{1.14}\cdot\frac{1}{1.17}\cdot\frac{1}{1.20}\cdot\frac{1}{1.23}\cdot\frac{1}{1.26}, \frac{1}{1.13}\cdot\frac{1}{1.16}\cdot\frac{1}{1.19}\cdot\frac{1}{1.22}\cdot\frac{1}{1.25}\right)$$
$$= (0.38673, 0.40314, 0.42038)$$

以上をまとめると，危険性の順序によって表2のようになる。

Discount Rate	危険性大	危険性中	危険性少
DCR1年目	0.86957	0.87719	0.88496
DCR2年目	0.73692	0.74974	0.76289
DCR3年目	0.60902	0.62478	0.64109
DCR4年目	0.49115	0.50795	0.52548
DCR5年目	0.38673	0.40314	0.42038

表2　危険性による *Discount Rate*

かくて，*NPV* は次のように，期待収益下限，期待収益中位，期待収益上限についてそれぞれ危険性大，中，小に対して，また初期投資下限，中位，上限に対して計算される（表3）。

	期待収益下限			期待収益中位			期待収益上限		
Present Value	*危険性大*	*危険性中*	*危険性少*	*危険性大*	*危険性中*	*危険性少*	*危険性大*	*危険性中*	*危険性少*
PV1年目	0.43478	0.43860	0.44248	0.86957	0.87719	0.88496	1.13043	1.14035	1.15044
PV2年目	1.47384	1.49948	1.52579	2.21076	2.24921	2.28868	2.94768	2.99895	3.05157
PV3年目	2.43610	2.49913	2.56435	3.04512	3.12391	3.20543	3.65415	3.74869	3.84652
PV4年目	1.96460	2.03181	2.10192	2.45574	2.53976	2.62740	2.94689	3.04771	3.15288
PV5年目	1.16019	1.20941	1.26115	1.54693	1.61255	1.68154	1.93366	2.01568	2.10192
Gross Present Value	7.46951	7.67842	7.89569	10.12812	10.40262	10.68801	12.61281	12.95139	13.30334
初期投資 I_0	−8	−8	−8	−10	−10	−10	−12	−12	−12
NPV	−0.53049	−0.32158	−0.10431	0.128116	0.402621	0.688009	0.61281	0.951387	1.30334

表3　ファジイ処理による *NPV* の結果

期待収益が下限であれば，危険性がいずれの場合も純現在価値 *NPV* は負となるが，中位以上であれば純現在価値は得られる。ただし，初期投資は 10 億円以下に限られる。初期投資が 12 億円超えると期待収益が上限の場合にどうにか純現在価が得られるという判断となる。

２　*AIPR* システムへの応用

分析システムの基礎と原理は黒澤の *AIPR* システム（黒澤，1991，1994）に基づく。*AIPR* とは，「*an Aggregate Index for the analysis of total cost Productivity and Rentability*」の頭文字をとってエイプロ・システムと呼ばれる，「総コスト生産性・収益性分析の総和指数体系」である。その分析体系は生産性と収益性の関連を軸に多くの基本的要因の総合関係を連結的・機能的に展開するシステムである。経済指数をユニークに編成することによって，生産性と収益性とを連結して，企業経営の長期戦略情報と日常の経営管理の情報を提供する。分析結果は，相対値（指数）とそれに対応する絶対値の量を計量できる理論体系になっており，非常に実践性に優れた企業・産業の分析システムである（阿部，1998，2011)。*AIPR* の一般的な編成は以下である。

I_π：収益性指数，

$I_{p/P}$:　相対価格指数（産出平均価格に対する投入平均価格の相対価格指数）

$Iq_{/Q}$：総コスト生産性指数

$$I_\pi = I_{p/P\ (\mathrm{L})} \times I_{q/Q\ (\mathrm{L})} \times I_{\mathrm{cov}}$$

$$\underset{\displaystyle \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma P_t Q_t} / \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma P_0 Q_0}}{\underset{I_\pi}{\text{収益性指数}}} = \underset{\displaystyle \left\{\frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0} / \frac{\Sigma P_t Q_0}{\Sigma P_0 Q_0}\right\}}{\underset{I_{p/P(L)}}{\text{相対価格指数}(L\text{式})}} \times \underset{\displaystyle \left\{\frac{\Sigma p_0 q_t}{\Sigma p_0 q_0} / \frac{\Sigma P_0 Q_t}{\Sigma P_0 Q_0}\right\}}{\underset{I_{q/Q(L)}}{\text{総コスト生産性指数}(L\text{式})}} \times \underset{\displaystyle \left\{\left(\frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_t q_0} / \frac{\Sigma p_0 q_t}{\Sigma p_0 q_0}\right) \div \left(\frac{\Sigma P_t Q_t}{\Sigma P_t Q_0} / \frac{\Sigma P_0 Q_t}{\Sigma P_0 Q_0}\right)\right\}}{\underset{I_{COV}}{\text{共同変動影響指数}}}$$

すなわち, 相対価格指数（$I_{p/P(L)}$）と総生産性指数（$I_{q/Q(L)}$）の両指数をＬ式で組み，共同変動効果（I_{cov}）を分離する。そうすることによって相対価格と総生産性のプロパーな挙動を抽出し，また企業のある種の政策的挙動を共同変動項（*co-variance*）に表現することができる。この場合問題は投入・産出の L 式・P 式価格指数が必要である。日銀の投入・産出別製造業物価指数（L 式）と国民経済計算年報（新 SNA）の投入・産出の SNA・インプリシット・デフレーター（Ｐ式：$I_{p(P)}$，$I_{P(P)}$）を利用する（黒澤，2000，p. 52)。日銀と国民経済計算年報の物価指数は互いに整合的であるとはいえないが，現段階の作業ではこのようにせざるを得ない。

AIPR システムの応用で最もネックとなるところは，投入・産出の実質値の計算である。投入・産出物価指数によって基準年に対する不変価格表現の実質値を計算するが，上に述べたように適切な投入・産出物価指数はない。サンプル調査による産業平均の物価指数を個々の企業に適用しているという矛盾がある。そこで，この矛盾を緩和するために投入・産出物価指数にファジィ数を適用することを試みる。

投入・産出物価指数の中位指数と上限・下限指数を設定する（表４）。産出物価指数の上限・下限指数は中位指数のそれぞれ（＋・－）１％，そして投入物価指数のそれらは中位指数のそれぞれ（＋・－）２％，とした（表４）。

年		$I_{p(L)}$ 産出価格指数(L式)			$I_{p(P)}$ 産出価格指数(P式)			$I_{P(L)}$ 投入価格指数(L式)			$I_{P(P)}$ 投入価格指数(P式)	
	下限		上限	下限		上限	下限		上限	下限		上限
90	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
95	0.942	0.952	0.961	0.945	0.954	0.964	0.927	0.946	0.965	0.945	0.965	0.984
00	0.918	0.927	0.936	0.908	0.917	0.927	0.892	0.910	0.928	0.912	0.930	0.949
05	0.875	0.884	0.893	0.869	0.878	0.887	0.840	0.858	0.875	0.874	0.892	0.910
09	0.880	0.889	0.898	0.888	0.897	0.906	0.875	0.893	0.910	0.933	0.952	0.971

表４　投入・産出価格指数　三角型ファジイ数

2.1　実質粗産出（本田技研工業の事例）

通常，名目値を産出価格指数で基準年価格に実質化される（ここでは，1990 年価格）。名目産出額を，基準時点を 1.0 とした指数で除算する事によって求める。三角型ファジイ数の除算は，負の値は考えないで良いから襷掛け [2)] のルールを適用して上限・下限の値を簡単に計算することができる（表５）。

年	粗産出額 百万円（名目）		下限	中位	上限		粗産出額（百万円）'90年価格 下限	中位	上限		下限	中位	上限
1990	2748863		1.000	1.000	1.000		$\frac{2748863}{1.000}$	$\frac{2748863}{1.000}$	$\frac{2748863}{1.000}$		2748863.0	2748863.0	2748863.0
1995	2469150		0.942	0.952	0.961		$\frac{2469150}{0.961}$	$\frac{2469150}{0.952}$	$\frac{2469150}{0.942}$		2469150.0	2569085.1	2594776.0
2000	2919840	÷	0.918	0.927	0.936	=	$\frac{2919840}{0.936}$	$\frac{2919840}{0.927}$	$\frac{2919840}{0.918}$	=	2919840.0	3118910.0	3150099.1
2005	3489106		0.875	0.884	0.893		$\frac{3489106}{0.893}$	$\frac{3489106}{0.884}$	$\frac{3489106}{0.875}$		3489106.0	3908133.9	3947215.3
2009	3404554		0.880	0.889	0.898		$\frac{3404554}{0.898}$	$\frac{3404554}{0.889}$	$\frac{3404554}{0.880}$		3404554.0	3790751.1	3828658.6

表５　ファジイ価格指数による実質値表現（本田技研工業の事例）

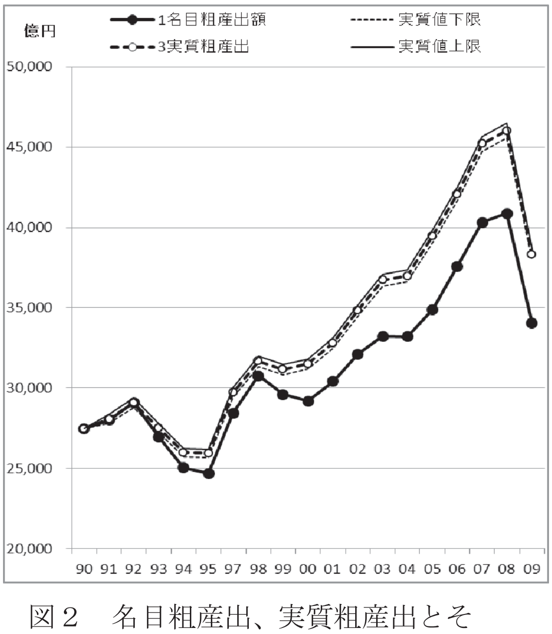


図２　名目粗産出、実質粗産出とその上・下限値（本田技研工業）

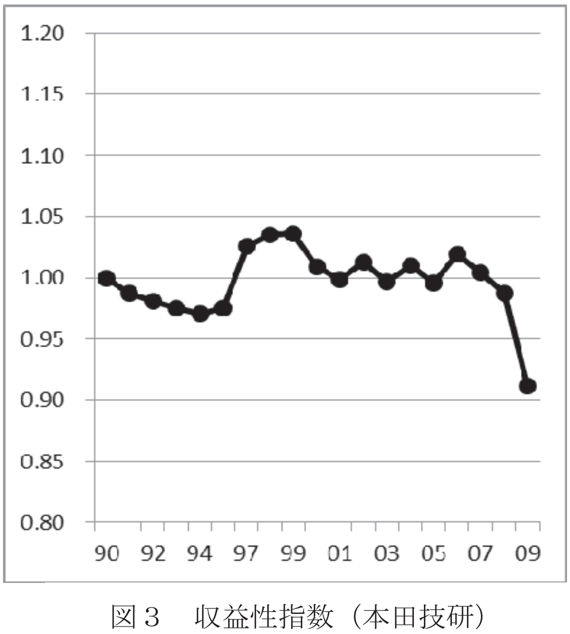


図３　収益性指数（本田技研）

基準時点：1990 年３月

図２に名目粗産出額の推移を示したが，その実質値は産出価格指数で 1990 年価格に変換したものである。それに対する上限値と下限値を図中に表示してある。同様にして総コス

トの実質値とその上限・下限値を計算する。

2.2　収益性指数とその要因

収益性指数は以下のように計算される。

$I_{\pi t}$,（名目粗産出÷名目総コスト）/（基準時点名目粗産出÷基準時点名目総コスト）。

基準時点 1990 年３月，比較時点=2009 年３月

$$I_{\pi t}=\frac{\Sigma p_t q_t}{TC_{tt}}\div\frac{\Sigma p_0 q_0}{TC_{00}}=\frac{3404554.0}{3563001.0}\div\frac{2748863.0}{2621673.0}=0.911$$ 基準時点 $$I_{\pi 0}=\frac{\Sigma p_0 q_0}{TC_{00}}\div\frac{\Sigma p_0 q_0}{TC_{00}}=1.000$$

収益性指数とは，名目値の産出指数を総コスト指数で割った指数の形式である（図３）。2009 年3 月決算における収益性の極端な落ち込みは，リーマンショックに起因する世界的な経済不況の影響である。

収益性指数は相対価格指数，総生産性指数と共同変動指数の積になっている（表６）。収益性は悪化をたどっているとみられる。2008 年まで収益性に与える相対価格の不利を総生産性の効果がカバーしていたが，その生産性効果が急速に悪化しており，収益性の悪化要因となっている。

年	51 収益性指数	52相対価格指数	53総生産性指数	54共同変動指数
90	1.000	1.000	1.000	1.000
95	0.975	0.994	0.995	0.985
00	1.009	0.974	1.068	0.970
05	0.996	0.986	1.054	0.958
08	0.988	0.942	1.095	0.957
09	0.911	0.963	0.995	0.951

表６収益性指数とその要因指数

本田技研　基準時点：1990 年３月

次に収益性の要因について，すなわち相対価格指数，総生産性指数について評価してみる。各指数の計算は以下のようになる（基準時点:1990 年３月，比較時点：2009 年３月）。

(1) 相対価格指数　$I_{p/P}$,　産出価格指数÷総投入価格指数

$$I_{p/P}=\frac{I_{p(L)}}{I_{P(L)}}=\frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0}/\frac{TC_{t0}}{TC_{00}}=\frac{3404554.0}{3828658.6}\div\frac{3563001.0}{3860007.2}=0.9634$$ $I_{p/P0}$=1.000

(2) 総生産性指数　$I_{q/Q}$,　実質粗産出指数/実質総コスト指数

$$I_{q/Q}=\frac{I_{q(L)}}{I_{Q(L)}}=\frac{\Sigma p_0 q_t}{\Sigma p_0 q_t}/\frac{TC_{0t}}{TC_{00}}=\frac{3794441.6}{2748863.0}\div\frac{3638132.5}{2621673.0}=0.9947$$ $I_{q/Q0}$=1.000

(3) 共同変動指数　I_{COV},　収益性指数÷（相対価格指数×総生産性指数）

$$I_{COV}=I_{\pi}/(I_{p/P}\times I_{q/Q})=0.91132/(0.96335\times 0.99471)=0.9510$$ $Icov0$=1.000

収益性指数とその要因指数の推移は，*AIPR* システムの主指標分析結果である。ここでは本田技研工業を例にとって示しているが，それぞれの挙動は 1990 年を 1.0 とする指数で示している（図４）。1990 年３月決算期に対して，2009 年３月決算期の収益性は 91％の水準に低下している。それは，相対価格（原材料等の買値価格と製品等の売値価格の相対的変化率），総生産性と共同変動影響は全てマイナス効果であった。

相対価格効果が収益性に対して不利に挙動するとは，投入物平均価格が産出物の平均価格より上昇変化が大であることを意味する。その不利な要因は総生産性の向上によってカバーされなければならない。日本の製造業は競争力維持・シェアー獲得のため製品価格を抑え，買値（材料や部品等）価格とのギャップを生産性の改善でカバーするという傾向が見られる。欧米工業国と比較して，平たく言えば薄利多売という傾向である。2008 年まで

はそのようなパターンであったが（図４），2009 年はリーマンショックに起因する世界的経済不況の影響を大きく受けて収益性指数とその要因指数の下落が著しい。

共同変動影響効果とは，相対価格と総生産性が同時的に影響し合って結果に表れる部分であり，重要な意味を持っている。相対価格関係（売値に対する投入物価格の相対変化）が不利であれば高いものを買って投入し，それに対して製品の価格は比較的に安く売っていることになる。価格の変動量と数量の変動量との共同変動量においては投入物の増分に対して産出物の増分の方が大きいことによって，利益の増加に貢献していることになる。

2.3　収益性要因指数の上限・下限指数

１） $\text{相対価格指数} = \left(\dfrac{\text{名目粗産出}}{\text{実質粗産出}}\right) \div \left(\dfrac{\text{名目総コスト}}{\text{実質総コスト}}\right)$

収益性に与える投入・産出の相対価格効果（売値と買値の相対的な価格指数）は上のように産出価格指数と総コスト指数の相対指数で表せる。三角型ファジイ数の除算を適用する。すなわち，下限指数は（名目粗産出を実質粗産出$_{\underline{\text{上限値}}}$で除したもの）を（名目総コストを実質総コスト$_{\underline{\text{下限値}}}$で除した結果）で除する，という手続きで求める。上限指数は（名目粗産出を実質粗産出$_{\underline{\text{下限値}}}$で除したもの）を（名目総コストを実質総コスト$_{\underline{\text{上限値}}}$で除した結果）で除する，という手続きになる。

$$\text{相対価格指数}_{\text{下限}} = \left(\frac{\text{名目粗産出}}{\text{実質粗産出}_{\text{上限値}}}\right) \div \left(\frac{\text{名目総コスト}}{\text{実質総コスト}_{\text{下限値}}}\right) = \left(\frac{3404554.0}{3867331.9}\right) \div \left(\frac{3563001.0}{3789945.8}\right) = 0.93641$$

$$\text{相対価格指数}_{\text{中位}} = \left(\frac{\text{名目粗産出}}{\text{実質粗産出}}\right) \div \left(\frac{\text{名目総コスト}}{\text{実質総コスト}}\right) = \left(\frac{3404554.0}{3828658.6}\right) \div \left(\frac{3563001.0}{3860007.1}\right) = 0.96335$$

$$\text{相対価格指数}_{\text{上限}} = \left(\frac{\text{名目粗産出}}{\text{実質粗産出}_{\text{下限値}}}\right) \div \left(\frac{\text{名目総コスト}}{\text{実質総コスト}_{\text{上限値}}}\right) = \left(\frac{3404554.0}{3790751.1}\right) \div \left(\frac{3563001.0}{3932928.2}\right) = 0.99137$$

1990=1.0 とする 2009 年の相対価格指数 $I_{p/P}$=(0.936641，0.96335，0.99137)。この指数が１以下ということは売値・買値の相対的な価格は収益性に不利に推移したことを意味する。すなわち，原材料や部品等の平均価格推移が平均製品価格推移を上まわったのである。

２） $\text{総コスト生産性指数} = \left(\dfrac{\text{実質粗産出}}{\text{実質粗産出}_{\text{基準時点}}}\right) \div \left(\dfrac{\text{実質総コスト}}{\text{実質総コスト}_{\text{基準時点}}}\right)$

生産性指数は実質値空間の粗産出に対する総コストの比率指数である。

$$\text{総コスト生産性指数}_{\text{下限}} = \left(\frac{\text{実質粗産出}}{\text{実質粗産出}_{\text{基準時点}}}\right)_{\text{下限値}} \div \left(\frac{\text{実質総コスト}}{\text{実質総コスト}_{\text{基準時点}}}\right)_{\text{上限値}} = \frac{3756872.8}{2748863.0} \div \frac{3706525.5}{2621673.0} = 0.96668$$

$$\text{総コスト生産性指数} = \left(\frac{\text{実質粗産出}}{\text{実質粗産出}_{\text{基準時点}}}\right) \div \left(\frac{\text{実質総コスト}}{\text{実質総コスト}_{\text{基準時点}}}\right) = \frac{3794441.6}{2748863.0} \div \frac{3638132.5}{2621673.0} = 0.99471$$

$$\text{総コスト生産性指数}_{\text{上限}} = \left(\frac{\text{実質粗産出}}{\text{実質粗産出}_{\text{基準時点}}}\right)_{\text{上限値}} \div \left(\frac{\text{実質総コスト}}{\text{実質総コスト}_{\text{基準時点}}}\right)_{\text{下限値}} = \frac{3832769.3}{2748863.0} \div \frac{3572421.6}{2621673.0} = 1.02324$$

1990=1.0 とする 2009 年の総コスト生産性指数 $Iq_{/Q}$=(0.96668，0.99471，1.02324)。

生産性は不変価格による実質値空間で評価しているので，投入・産出物価指数の精度が評価結果に大きな影響を及ぼす。投入・産出物価指数に関して，中位指数（公表統計指数）

のプラス・マイナス1%を投入物価指数の，プラス・マイナス2%を産出物価指数の上限値・下限値として三角型ファジイ数を適用した。生産性指数の上限値が相対価格の収益性に対する不利化をわずかにプラスに貢献している。

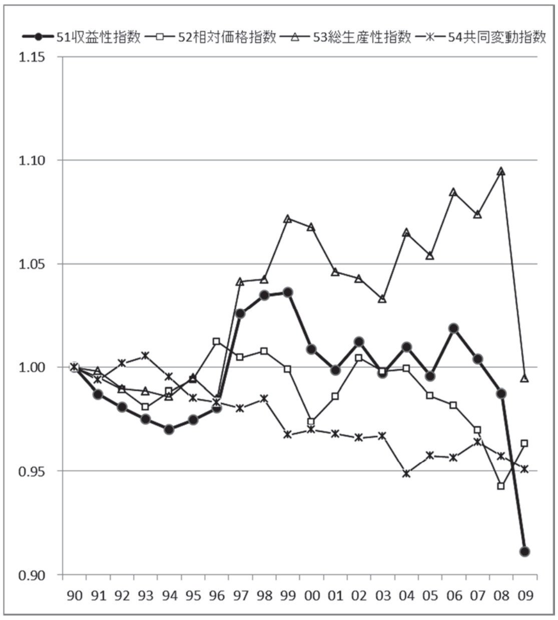


図４　AIPR 収益性指数とその要因

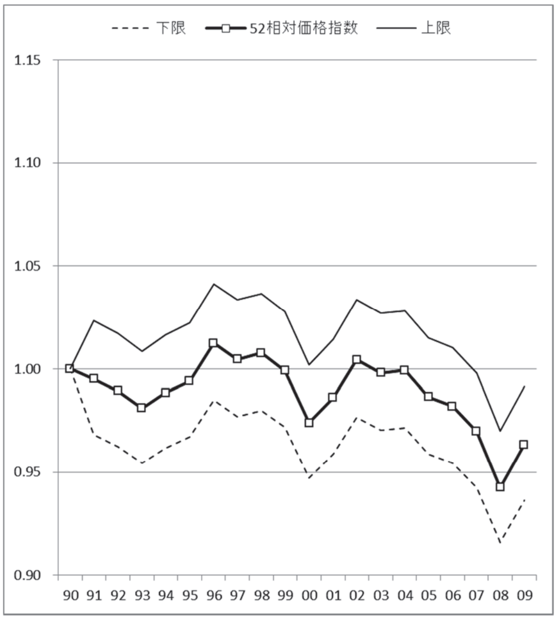


図５　相対価格指数とその上限・下限指数

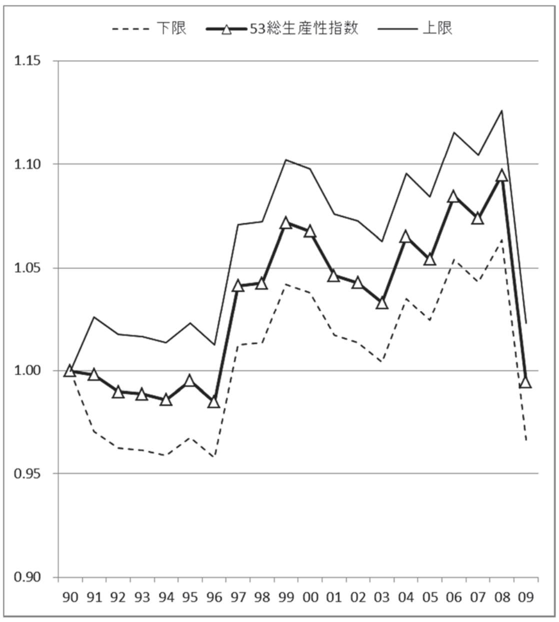


図６　総コスト性指数と上限・下限指数

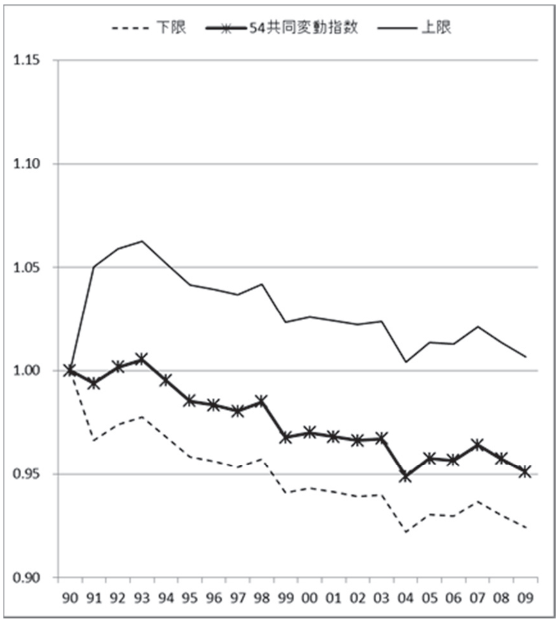


図７　共同変動影響指数と上限・下限指数

2.4　AIPR 絶対値の体系

相対値，すなわち指数に表現による推移はそれに対応する絶対値の変化として把握することは極めて重要である。指数（内包量）は実体量（外延量）をもとに計算されるから，

比率で示された変化に対する絶対量の変動分は，「割算は分子－分母，掛算は分子＋分母」という計算ルールによって簡単に求められる。

$$\text{収益性効果} = (\Sigma p_t q_t - TC_{tt}) - (\Sigma p_0 q_0 - TC_{00}) = (3404554.0 - 3563001.0) - (2748863.0 - 2621673.0) = -285637.0$$

$$\text{相対価格効果} = (\Sigma p_t q_0 - \Sigma p_0 q_0) - (TC_{to} - TC_{00}) = (3404554.0 - 3828658.6) - (3563001.0 - 3860007.2) = -127098.4$$

$$\text{総コスト生産性効果} = (\Sigma p_0 q_t - \Sigma p_0 q_t) - (TC_{0t} - TC_{00}) = (3794441.6 - 2748863.0) - (3638132.5 - 2621673.0) = 29119.1$$

共同変動効果は，収益性効果＝相対価格効果＋総コスト生産性効果＋共同変動効果，という関係から求める。すなわち，共同変動効果は-187657.7（百万円）となる。以上に対して，それぞれの上限値と下限値を計算する。

1990 年３月期＝0.0 に対する 2009 年３月期の変動効果（単位：億円，本田技研の例）

１）収益性効果＝　相対価格効果＋総生産性効果　＋ 共同変動効果

下限値	(-2358.331)	＋ (-768.426)	＋ (-4025.248)
-2856.370＝	(-1270.984)	＋ (+291.191)	＋ (-1876.577)
上限値	(-162.699)	＋ (+1331.577)	＋ (+270.387)

２）相対価格効果＝製品の平均価格変化効果－投入物平均価格変化効果

下限値	(-4627.779)	－	(-3699.272)
-1270.984 ＝	(-4241.046)	－	(-2970.062)
上限値	(-3861.971)	－	(-2269.448)

３）総生産性効果＝技術進歩効果＋　規模効果

下限値	(-1294.740)	＋ (-879.785)
+291.191 ＝	(-201.943)	＋ (+493.134)
上限値	(+870.323)	＋ (+1867.353)

４）共同変動効果＝（-4025.248，-1876.577，+270.387）

収益性効果が-2856.37 億円とは利益が赤字ということではない。1990 年３月期の利益より 2009 年３月期の利益が 2856.37 億円分減少したということを意味している。その説明は以下のように解釈される。相対価格関係，すなわち売値に対する原材料や部品等の投入物価格の相対価格効果はこの期間大分不利になっていたのである（-1270.984 億円）。しかし，すなわち総生産性効果は+291.191 億円であり，収益性に貢献した。

総生産性効果は，技術的・組織的改善・進歩の効果（-201.943 億円）と規模効果（+493.134 億円）にブレイクダウンできる。 生産性の改善にとって技術的・組織的改善・進歩の効果は重要であるが，負の効果であった，つまりこの期間技術的・組織的改善・進歩の改善効果はなかったのである。生産性効果の要因は規模効果だったのであり，規模効果が収益性に貢献したのである。共同変動効果は-1876.577 億円であった。

共同変動効果とは価格の変化量と数量の変化量との共同変動効果である。製品出荷量と投入物量の変動量関係は以下である。

総生産性効果（+291.191）＝　製品出荷量変動効果（+10455.786 億円）
　　　　　　　　　　　　　　－総投入物量変動効果（+10164.595 億円）

製品出荷量増分は僅かに総投入物量増分を上まわったのであるが，上の２）相対価格効

果に見たように相対価格効果が大きな負の効果（-1270.984 億円）であり，つまり高いものを買って投入し，それに対して製品の価格は比較的に安く売った，と見られる。結局共同変動効果は負の効果となったのである。

収益性の変動とその要因について以上のように説明するのであるが，上限値と下限値はさらにそれらの関係をより確たるものへと導く情報となり得よう。

３　経営指標評価への台形型ファジイメンバーシップ関数の活用

台形型ファジイ数はその可能性分布が台形で与えられたケースである。$\mu_A(x)=1.0$ に対して１つの点ではなくて（三角ファジイ数は頂点１つ）図８のように，$\mu_A(x)=1.0$ は a_2〜a_3である。台形ファジイ数は，$A=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ のように表現される。また，メンバーシップ関数は以下のように規定される（黒澤 2002，p.155）

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x \leq a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & x \geq a_4 \end{cases}$$

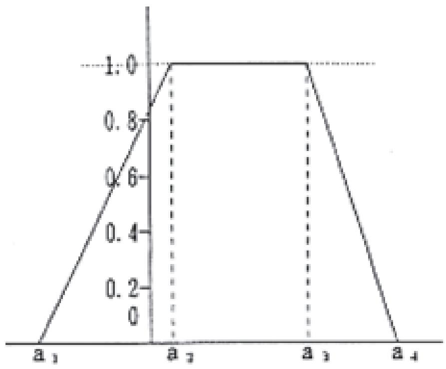


図８　台形型ファジイ数

$A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$

経営指標を台形型ファジイメンバーシップ関数で評価する事を考えてみる。経営指標の評価は，産業平均や同業他社に比べて大変優れている，ほぼ同じ，少し劣る，大変劣る，とか言語的評価がなされる。そのような評価に合ったファジイメンバーシップ関数を考えてみよう。ここでは指標として，「総資本利益率」を取り上げる。

総資本利益率は，企業が全ての資本を利用してどれだけの利益を上げているのかを示す総合的な収益性の財務指標で，企業と投資家双方にとって重要な指標である。つまり，企業が持っている総資本が，事業活動を通して利益獲得のためにどれだけ有効活用されているかを表す。本指標は以下に示すような構造もっている。

$$\underset{\text{総資本回転率}}{\frac{S(\text{売上高})}{K_T(\text{総投下資本})}} \times \underset{\text{売上高利益率}}{\frac{\pi\ (\text{利益})}{S\ (\text{売上高})}} = \underset{\text{総資本利益率}}{\frac{\pi\ (\text{利益})}{K_T(\text{総投下資本})}}$$

ここで，総資本回転率と売上高利益率を台形型ファジイ数で与える。それぞれの指標が当社は業界平均より「やや高い」或いは「○○パーセントも上まわる」といった評価ではなく，経営的な意味を持つ評価を，すなわちその方面のキスパートの経験や洞察による評価を台形型ファジイメンバーシップ関数で与えるということである。そのように考え、こ

こでは先ず，Nikkei Needs 財務データファイルから自動車メーカー10 社の過去 22 年間（1991～2012）におけるそれぞれの比率を計算した。10 社に関して過去 22 年間の最大の総資本回転率は２倍，そして売上高利益率は 15%であった。このことから総資本回転率と売上高利益率は台形型ファジイメンバーシップ関数評価を以下のように考えたのである。

総資本回転率１倍は有意味な下限値と考え，２倍は有意味なる上限とする。従ってメンバーシップグレード値は総資本回転率が１倍まで０，２倍を越えれば０となる。そして，総資本回転率が 1.0～1.5 までは下に示したメンバーシップ関数（１）で与える。1.5～2.0 倍は大変よいということでメンバーシップグレード値は１とする。

一方，売上高利益率は負と０%の場合メンバーシップグレード値は０とし，また 15%を有意味な上限とし，15%より大のメンバーシップグレード値は０とする。そして，売上高利益率が 10%～15%までは下に示したメンバーシップ関数（２）で与える。売上高利益率が 10～15%は大変良い売上高利益率と判断し，メンバーシップグレード値は１とする。

$$\mu_A(x)=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{x-1.0}{1.5-1.0}=2x-2.0 \quad (1) \qquad \mu_B(x)=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{x-0.0}{0.1-0.0}=10x \quad (2)$$

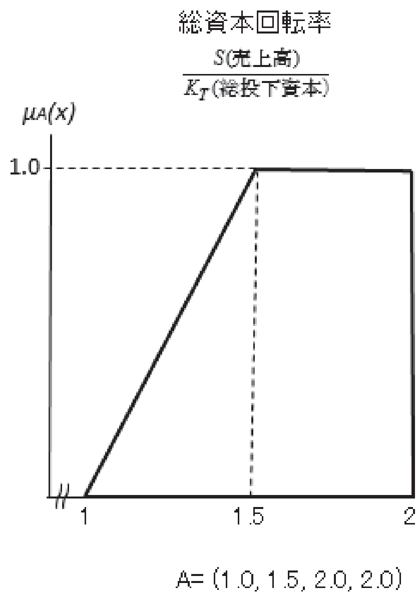


図９　台形型ファジイ数
総資本回転率

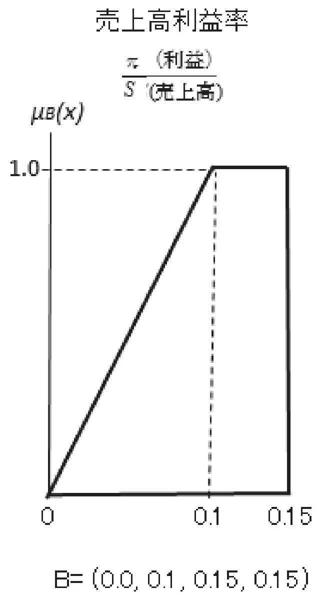


図 10　台形型ファジイ数
売上高利益率

総資本の回転率と売上高利益率を上のような台形型ファジイ数，*A=(1.0, 1.5, 2.0, 2.0)*，*B=(0.0, 0.1, 0.15, 0.15)*として，それらの台形型ファジイ数の積 [3] を求める。正の実数空間の場合，積は次のような演算によって簡単に計算できる。

$$A(\cdot)B=(a_1, a_2, a_3, a_4)(\cdot)(b_1, b_2, b_3, b_4)=(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4)$$
$$=(1.0\cdot 0.0,\ 1.5\cdot 0.1,\ 2.0\cdot 0.15,\ 2.0\cdot 0.15)$$
$$=(0.0,\ 0.15,\ 0.30,\ 0.30)$$

総資本の回転率と売上高利益率を台数型ファジイ数で掛算をして得られる総資本利益率のファジイ数は，*AB=(0. 0,　0. 15,　0. 30,　0. 30)*となる。上記一連の手続きをイメージ的に示すと図 11 のようになろう。

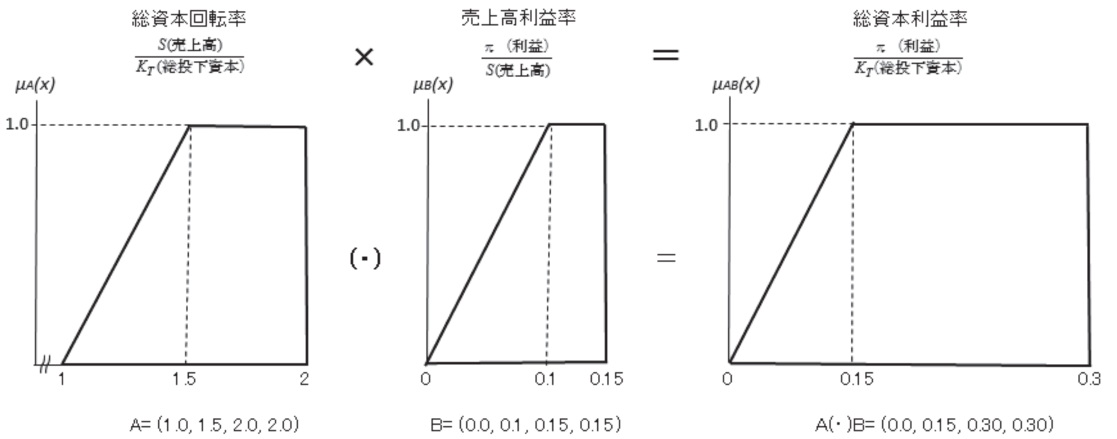


図 11　総資本回転率 ファジイ数×売上高ファジイ数＝総資本利益率ファジイ数

次に，各社の総資本利益率を上のシステムの上でファジィ評価してみよう。
トヨタ自動車，日産自動車，富士重工の 3 社の 2008 年 3 月期における総資本利益率（利益は経常利益とした）は以下であった：

トヨタ自動車：*x=15. 146%,*　日産自動車：*x=　7. 032%,*　富士重工：*x=2. 792%*

*15%≦x*である時は，メンバーシップ値は 1 であることは上図 11 から直ちに分かる。*0≦x<15* では下記の式によって求める。

$$\mu_A(x)=\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{x-0.0}{0.15-0.0}=\frac{20}{3}x \quad (3)$$

(1) トヨタ自動車：x=15. 146%　　(2) 日産自動車：x=　7. 032%　(3)　富士重工：x=　2. 792%

$$\mu_{\text{ト}}(x)=\frac{20}{3}\times 0.15146=1.0097\Rightarrow 1 \qquad \mu_{\text{日}}=\frac{20}{3}\times 0.07032=0.4688 \qquad \mu_{\text{富}}=\frac{20}{3}\times 0.02792=0.1861$$

トヨタ自動車のメンバーシップグレイド値は 1 で，エキスパートの直感的なファジイ評価をベースにした総資本利益率は完全に良いという評価レベルとなる。日産自動車はその評価 0. 5 くらいの良いという評価であり，また富士重工は 0. 3 程度の良好さとなる。他の会社についても評価してみると，図 12 の左図のようであり，また 2012 年 3 月期の結果について評価すると，図 12 の右図となる。

ここでは総資本利益率のファジィ評価関数を図 11 のように考えたのであるが，経営分析のエキスパートによって，直感的なファジィ評価関数をあらかじめ準備しておくとよい。

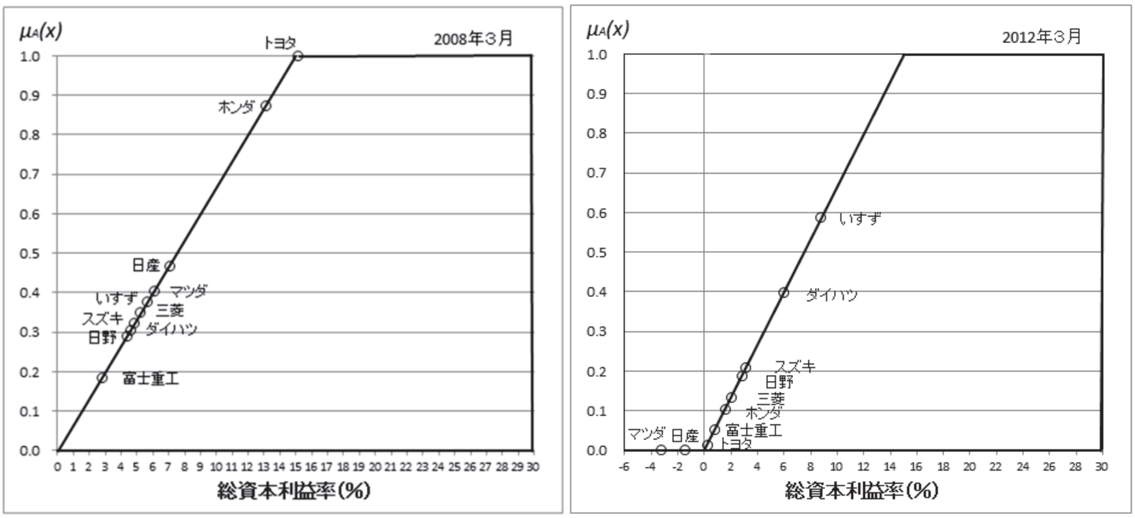


図 12　総資本利益率のファジイ評価

例えば図 13 は評価関数をＤ：退廃的，Ｓ：安定的，Ｐ：前進的とランクに分けた例である。

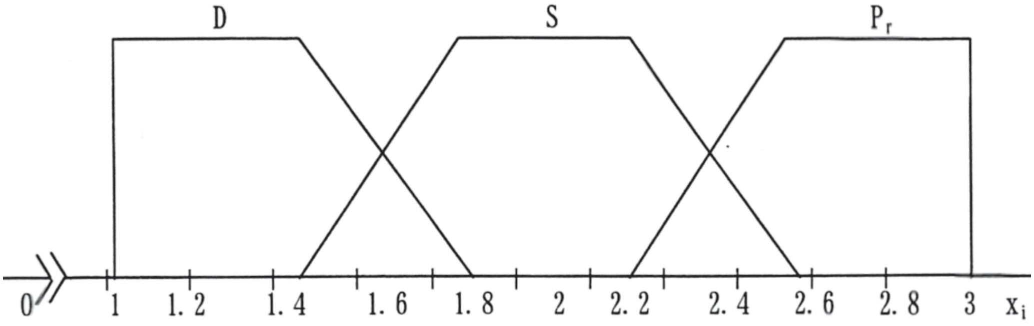


図 13　ランク別評価の台形型ファジイ関数の例（黒澤、2003, p.132）

4　損益分岐点分析への三角型ファジイ数の活用

損益分岐点（*BEP: Break-Even Point*）は次の式によって計算される。

$BEP = \dfrac{F}{1-\dfrac{V}{S}}$　F：固定費費 V：変動費 S：売上高　(4)　　$BEP = \dfrac{F}{1-v}$　F：固定費費, v：変動費比率　(5)

トヨタ自動車	売上高	変動費	固定費	BEP売上高	BEP比率	変動費比率	固定費比率
	百万円	百万円	百万円	百万円	%	%	%
2008年3月	12079264	8465220.86	2076592.14	6940621.26	57.46	70.08	17.19
2009年3月	9278483	7018975.05	2007810.95	8244910.03	88.86	75.65	21.64
2010年3月	8597872	6675692.90	1982191.10	8866304.58	103.12	77.64	23.05
2011年3月	8242830	6472075.58	1904275.42	8864367.86	107.54	78.52	23.10
2012年3月	8241176	6591195.10	1596304.90	7973079.95	96.75	79.98	19.37
本田技研工業	売上高	変動費	固定費	BEP売上高	BEP比率	変動費比率	固定費比率
	百万円	百万円	百万円	百万円	%	%	%
2008年3月	4088029	2586939.54	1166785.46	3177593.96	77.73	63.28	28.54
2009年3月	3404554	2263678.66	1167121.34	3482876.25	102.30	66.49	34.28
2010年3月	2717736	1748429.10	735922.90	2063375.55	75.92	64.33	27.08
2011年3月	2915416	1824562.75	880120.25	2352210.68	80.68	62.58	30.19
2012年3月	2740052	1848491.68	844576.32	2595655.04	94.73	67.46	30.82

表 7　損益分岐点分析　（データソース：Nikkei Needs 財務データファイル）

直近年度における損益分岐点比率は両社とも非常に高く，収益力が極めて低い（表７）。次年度には 2008 年３月期の BEP 比率水準に引き下げることを策定する。そのためには売上高の増加，固定費の削減，変動費比率の改善等を実現せねばならない。これらの改善目標値にファジイ数を適用する。ファジイ数は（下限値，中位値，上限値）とする。

BEP のファジイ評価の演算は以下のようになる。

$$BEP_{下限値}=\frac{固定費_{下限値}}{1-\frac{変動費_{下限値}}{売上高_{上限値}}}\qquad BEP_{中位値}=\frac{固定費_{中位値}}{1-\frac{変動費_{中位値}}{売上高_{中位値}}}\qquad BEP_{上限値}=\frac{固定費_{上限値}}{1-\frac{変動費_{上限値}}{売上高_{下限値}}}$$

ここでは次の２つのケースについて演算をしてみる。

１）売上高：(今年度並み，5%増，10％増)，

　変動費：(－２％，－１％，今年度並)，

　固定費：(－４％，－２％，今年度並)

　売上高を増加し，変動費と固定費を削減目標とするケースである。結果は表８に示した。次年度の売上が今年度並みであるなら，変動費は今年度よりを２％削減し，固定費は４％ほど削減しなければ 2008 年３月決算期水準の BEP 比率には戻せない。また，売上高を今年度より 10%増加しても変動費と固定費が今年度並みでは，*BEP* 比率は殆ど改善されないことが分かる。

トヨタ自動車

本年度実績			次年度目標		
			p	r	q
S売上高	8241176.00	S売上高	1.00	1.05	1.10
V変動費	6591195.10	V変動費	0.98	0.99	1.00
F固定費	1596304.90	F固定費	0.96	0.98	1.00

単位: 売上高、費用、BEP:百万円　次年度目標値は本年度実績に対する指数

	次年度目標実績値		
	p	r	q
S売上高	8241176.0	8653234.8	9065293.6
V変動費	6459371.2	6525283.1	6591195.1
F固定費	1532452.7	1564378.8	1596304.9
	p	r	q
BEP=	5330985.2	6361487.2	7973079.9
BEP比率(%)=	58.8	73.5	96.7

表８　売上高、変動費、固定費を三角型ファジイ数

２）売上高：(今年度並み，5%増，10％増)

　変動費比率：(今年度並，今年度並，今年度並)

　固定費：(－10%，－５％，今年度並)

変動費比率は下げることは困難だが，売上高を最大 10%増加し，固定費も最大 10%削減が見込めるというケースである。

結果は表９である。売上高を 10%増加しても固定を削減できなければ BEP 比率を引き下げることはできない（本年度並の水準)。固定費を大幅削減（-10%）しなければ 2008 年３

月決算期水準の *BEP* 比率には改善されないのである。

本田技研

本年度実績			次年度目標 p	次年度目標 r	次年度目標 q
S売上高	2740052	S売上高	1.00	1.05	1.10
*v*変動費比率	0.6746	V変動費比率	1.00	1.00	1.00
F固定費	844576.32	F固定費	0.90	0.95	1.00

単位: 売上高、費用、BEP:百万円 次年度目標値は本年度実績に対する指数

	次年度目標実績値 p	r	q
S売上高	2740052.0	2877054.6	3014057.2
*v*変動費比率	0.6746	0.6746	0.6746
F固定費	760118.7	802347.5	844576.3
	p	r	q
BEP=	2335951.7	2465726.8	2595501.9
BEP比率(%)=	77.5	85.7	94.7

表 9　変動費比率は不変、固定費と売上高を三角型ファジイ数

5　時間産出率のファジィ評価

時間産出比率（生産性）の構造は図 14 に示すような構造を持つ。生産性の設計で各指標（*i*〜*e*）をファジイ数で与えることにする。目標値は現状に対する指数で表す。

i=0. 97〜1. 0（確信区間値）

iw=1. 0（クリスプ値）

ch=(1. 00, 1. 04, 1. 06)

k=(1. 00, 1. 03, 1. 06)

s=1. 0（クリスプ値）e=(1. 00, 1. 03, 1. 06)

$$\underbrace{\frac{TE}{MH}}_{i} \times \underbrace{\frac{E}{TE}}_{iw} \times \left(\underbrace{\frac{K}{E}}_{ch} \times \underbrace{\frac{Q_S}{K}}_{k} \right) \times \underbrace{\frac{Q_S'}{Q_S}}_{s} \times \underbrace{\frac{Q_R}{Q_S'}}_{e} = \underbrace{\frac{Q_R}{MH}}_{q}$$

TE:総消耗エネルギー　*i*:労働強度

MH:総実労働時間　*iw*:作業強度（有効作業エネルギー率）

E:有効エネルギー　*ch*:設備資本装備率

K:資本・設備量　*k*:設備資本効率

Q_S:資本設備の標準産出　*s*:熟練効率

Q_S':熟練効果産出　*e*:組織・管理効率

Q_R:出来高　*q*:時間産出率

技術条件（*ch*, *k*）

黒澤一清(1985)｢産業と企業｣ 放送大学教育振興会, p.194。

図 14　時間産出比率の構造

ファジィ数の演算を下記のように順に行っていく。その演算手続きは表 10 に示されている。

$$i \bullet iw, i \bullet iw \bullet ch, i \bullet iw \bullet ch \bullet k, i \bullet iw \bullet ch \bullet k \bullet s, q = i \bullet iw \bullet ch \bullet k \bullet s \bullet e$$

演算結果は表 11 に示す。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1			*i*	*iw*	*ch*	*k*	*s*	*e*	*i•iw*	*i•iw•ch*	*i•iw•ch•k*	*i•iw•ch•k•s*	*q=i•iw•ch•k•s•e*
2	p	a1	0.97		1	1		1	C2*D4	I2*E2	J2*F2	K2*G4	L2*H2
3		a2								I2*E4∧I2*E6	J3*F2∧J3*F4∧J3*F6	K3*G4	L3*H2∧L3*H4∧L3*H6
4	r			1	1.04	1.03	1	1.03					
5		a3								I6*E2∨I6*E4	J5*F2∨J5*F4∨J5*F6	K5*G4	L5*H2∨L5*H4∨L5*H6
6	q	a4	1		1.08	1.06		1.06	C6*D4	I6*E6	J6*F6	K6*G4	L6*H6

表 10　時間産出比率のファジィ演算

		i	iw	ch	k	s	e	i• iw	i• iw• ch	i• iw• ch• k	i• iw• ch• k• s	q=i• iw• ch• k• s• e
p	a1	0.97		1.00	1.00		1.00	0.970	0.970	0.9700	0.9700	0.970
	a2								1.009	1.0088	1.0088	1.009
r			1.00	1.04	1.03	1.00	1.03					
	a3								1.040	1.1024	1.1024	1.169
q	a4	1.00		1.08	1.06		1.06	1.000	1.080	1.1448	1.1448	1.213

表 11　時間産出比比率のファジィ評価結果

時間産出率

$$q = i \bullet iw \bullet ch \bullet k \bullet s \bullet e$$
$$= (0.970, 1.009, 1.169, 1.213)$$

台形型ファジイ数と判断して（図 14）時間産出率（生産性）は現状に比べて 1. 009 倍〜1. 169 倍が期待できる，ということになる。

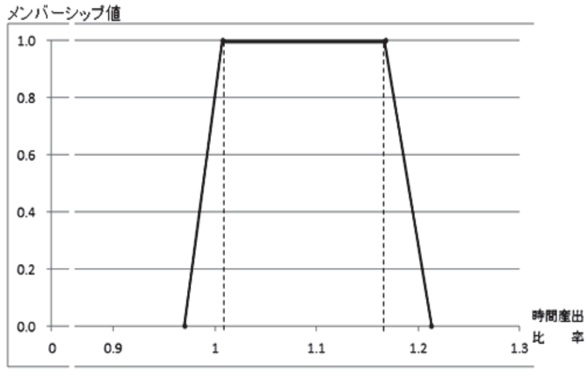


図 14　時間産出率のファジィ数：台形型

5　結び

リスク調整割引率法・*AIPR* システムへの応用，経営指標評価への台形型ファジイメンバーシップ関数の活用，損益分岐点の台形ファジィ評価，および時間産出比率をファジィ数によって評価した。

ファジイ理論に基づく意志決定は普通の経営的意志決定者がその知識や洞察を自然言語的な表現を通じて実用的に展開できる事にある。それは，自然言語的な表現（とても優れている，まあまあかな，全くダメである，等の評価）がファジイ集合の関係に数理変換されることにある。その関係変換において実務経験のエキスパートの知見が必須である。「とても優れている，まあまあかな，全くダメである」等の評価は誰でもするが，素人のそれは全く経験・知見もない感覚的な，つまり感想なのである。ファジイ理論が提唱するそれは全く異なる次元であって，すなわち「とても優れている，まあまあかな，全くダメである」等の評価は実務経験的なエキスパートの知見をベースにしたものでなければならない。

通常の意志決定の数理モデルに比べてファジイモデルは厳格な数理モデルではなくて，人間の日常的な経験や知見，直感力の活用を旨く処理できるようなモデルになっている。特に，人間の（エキスパートの）洞察的・直感的な能力を活用できるのがファジイロジックモデルなのである。

ファジイ数のメンバーシップ関数の型は無数にあるが，現象を三角型に近似して扱えば，演算手続きは大変単純化される。実用上は，特に経営の意志決定の問題にファジィを活用する場合は三角型ファジイ数で十分とされる場合が多いのである。

次いで台形型ファジィ数も扱いは簡単である。台形型は三角型と異なり頂点（＝メンバーシップ値＝１）が一つではない。上辺がメンバーシップ値＝１を，つまりある区間の範囲は「極めて良い」と評価するようなケースに適している。

自動制御等に適用されるメンバーシップ関数は複雑な型が用いられるが，経営の意志決定にはそのような厳密な関数は不要である。三角型，そしてその拡張の台形型メンバーシップ関数は簡単に扱いやすく，またこれで十分なのである。大いに活用すべきである。

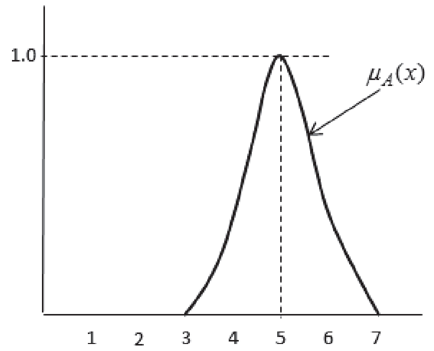
注釈

1）ファジイ数

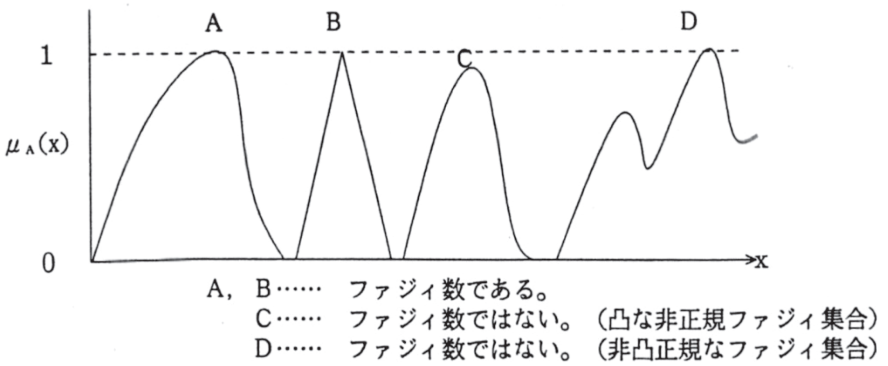
日常生活の中で使われる数値ははっきりした数値でないものが多い。「大体」,「およそ」,とか「約」を修飾語として表す数値であり，大体 30 分，およそ 100m，４～５キロメートル，30 度くらい，等々，ファジイロジックではこれをファジイ数と呼ぶ。

大体 5 分とは人それぞれの感覚によるが，主観で３分～７分と考えてみよう。５分が最も当てはまる可能性が高く，そこから低い，あるいはそこより高いに行くに従って当てはまる可能性は低くなる。大体５のファジイ集合Ａはメンバーシップ関数として次のように示されよう（付図１）。

ファジイ数は実数直線上の正規性でかつ凸の集合でメンバーシップ関数は連続である。正規性とは $\mu_A(x)=1$ で最大グレードが１である点が１つあること，またその点から離れるに従ってグレードは減少する，つまり上に凸な集合となる。以上がファジイ数の簡単な定義である（付図２）。



付図１　ファジイ数　大体５



付図２　ファジイ数（黒澤 2002，p. 136）

ファジイ数の値は $A=[a_1,\ a_3]$ で，a_1 に等しいかそれより大きいかである。あるいは a_3 に等しいかそれより小さいかである（上の例では，$a_1=3,\ a_3=7$）。$a_1=-\infty,\ a_3=+\infty$ もあり得る。ファジイ数の型には正規型，指数型，三角型，台形型などがあり，そのうち最も実用／実践的なものは三角型である（黒澤 2002，p. 136）。

上の例では，正規ファジイ集合Ａは以下のように表される：

$$A=\{0.01/3,\ 0.5/4,\ 1.0/5,\ 0.5/6,\ 0.01/7\}$$

ファジイ数の四則演算は次のような手続きによる（黒澤，2002）。実数の確信区間によって表されたファジイ数，すなわち $A=[a_1,\ a_3]$ $B=[b_1,\ b_3]$ に関する *max-min* 演算となっている）：

(1)加法　$A+B=[a_1,\ a_3]\ (+)\ [b_1,\ b_3]=[a_1+b_1,\ a_3+b_3]$

(2)減法　$A-B=[a_1,\ a_3]\ (-)\ [b_1,\ b_3] = [a_1-b_3,\ a_3-b_1]$

(3)乗法　$A(\cdot)B=[a_1,\ a_3]\ (\cdot)\ [b_1,\ b_3] =$

$$[a_1\cdot b_1 \wedge a_1\cdot b_3 \wedge a_3\cdot b_1 \wedge a_3\cdot b_3,\ a_1\cdot b_1 \vee a_1\cdot b_3 \vee a_3\cdot b_1 \vee a_3\cdot b_3]$$

負の数値がなければ，次のように簡単に表せる。

$$A(\cdot)B=[a_1\cdot b_1,\ a_3\cdot b_3]$$

(4)除法 $A(\div)B=[a_1, a_3]\ (\div)\ [b_1, b_3] = \left(\frac{a_1}{b_1}\wedge\frac{a_1}{b_3}\wedge\frac{a_3}{b_1}\wedge\frac{a_3}{b_3}, \frac{a_1}{b_1}\vee\frac{a_1}{b_3}\vee\frac{a_3}{b_1}\vee\frac{a_3}{b_3}\right)$

負の数値がなければ，次のように襷掛けの商をとる。

$$A(\div)B=[a_1, a_3]\ (\div)\ [b_1, b_3] = \left(\frac{a_1}{b3}, \frac{a_3}{b_1}\right)$$

計算事例

目的地まで，1）駅まで自転車で約 10 分，2）バスで大体 30 分，3）それから約 10 分歩いて目的地まで約 50 分かかる，というケースをファジイ数で計算してみよう。まずそれぞれの区間の時間をファジイ集合で次のように見積もったとする。

（1）区間 A　駅まで自転車で約 10 分：　$A=\left\{\frac{0.8}{9分}, \frac{1.0}{10分}, \frac{0.9}{11分}\right\}$

（2）区間 B　バスで大体 30 分：$B=\left\{\frac{0.6}{26分}, \frac{0.75}{28分}, \frac{1.0}{30分}, \frac{0.9}{32分}, \frac{0.7}{34分}\right\}$

（3）区間 C　徒歩で約 10 分：$C=\left\{\frac{0.9}{9分}, \frac{1.0}{10分}, \frac{0.9}{11分}\right\}$

まず，区間 A と区間 B のファジイ数の和（約 10 分＋大体 30 分）

$$A+B=\left\{\frac{0.8}{9分}, \frac{1.0}{10分}, \frac{0.9}{11分}\right\}+\left\{\frac{0.6}{26分}, \frac{0.75}{28分}, \frac{1.0}{30分}, \frac{0.9}{32分}, \frac{0.7}{34分}\right\}$$

$$(1)\ \left\{\frac{0.8\wedge0.6}{9分+26分}, \frac{0.8\wedge0.75}{9分+28分}, \frac{0.8\wedge1.0}{9分+30分}, \frac{0.8\wedge0.9}{9分+32分}, \frac{0.8\wedge0.7}{9分+34分}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{0.6}{35分}, \frac{0.75}{37分}, \frac{0.8}{39分}, \frac{0.8}{41分}, \frac{0.7}{43分}\right\}$$

$$(2)\ \left\{\frac{1.0\wedge0.6}{10分+26分}, \frac{1.0\wedge0.75}{10分+28分}, \frac{1.0\wedge1.0}{10分+30分}, \frac{1.0\wedge0.9}{10分+32分}, \frac{1.0\wedge0.7}{10分+34分}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{0.6}{36分}, \frac{0.75}{38分}, \frac{1.0}{40分}, \frac{0.9}{42分}, \frac{0.7}{44分}\right\}$$

$$(3)\ \left\{\frac{0.9\wedge0.6}{11分+26分}, \frac{0.9\wedge0.75}{11分+28分}, \frac{0.9\wedge1.0}{11分+30分}, \frac{0.9\wedge0.9}{11分+32分}, \frac{0.9\wedge0.7}{11分+34分}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{0.6}{37分}, \frac{0.75}{39分}, \frac{0.9}{41分}, \frac{0.9}{43分}, \frac{0.7}{45分}\right\}$$

上記の和（∪）をとる，すなわち，　*(A＋B)* 区間のファジイ集合は以下のようになる。

$$\left\{\frac{0.6}{35分}, \frac{0.75}{37分}, \frac{0.8}{39分}, \frac{0.8}{41分}, \frac{0.7}{43分}\right\} \cup \left\{\frac{0.6}{36分}, \frac{0.75}{38分}, \frac{1.0}{40分}, \frac{0.9}{42分}, \frac{0.7}{44分}\right\} \cup \left\{\frac{0.6}{37分}, \frac{0.75}{39分}, \frac{0.9}{41分}, \frac{0.9}{43分}, \frac{0.7}{45分}\right\}$$
$$=\left\{\frac{0.6}{35分}, \frac{0.6}{36分}, \frac{0.75}{37分}, \frac{0.75}{38分}, \frac{0.8}{39分}, \frac{1.0}{40分}, \frac{0.9}{41分}, \frac{0.9}{42分}, \frac{0.9}{43分}, \frac{0.7}{44分}, \frac{0.7}{45分}\right\}$$

次に，上記区間 A と区間 B の和に区間 C のファジイ数との和を上記の手続きで計算するが（*max-min* 演算），以下のような計算手続きで求めてみる。

区間Cのx_i

区間A＋Bのy_i

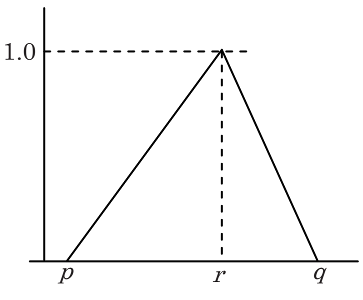
$\mu_{A+B}(y)$ ＼ $\mu_C(x)$		9	10	11										
		0.9	1.0	0.9										
35	0.6	$\frac{0.6\wedge0.9}{35+9}$	$\frac{0.6\wedge1.0}{35+10}$	$\frac{0.6\wedge0.9}{35+11}$										
36	0.6		$\frac{0.6\wedge0.9}{36+9}$	$\frac{0.6\wedge1.0}{36+10}$	$\frac{0.6\wedge0.9}{36+11}$									
37	0.75			$\frac{0.75\wedge0.9}{37+9}$	$\frac{0.75\wedge1.0}{37+10}$	$\frac{0.75\wedge0.9}{37+11}$								
38	0.75				$\frac{0.75\wedge0.9}{38+9}$	$\frac{0.75\wedge1.0}{38+10}$	$\frac{0.75\wedge0.9}{38+11}$							
39	0.8					$\frac{0.8\wedge0.9}{39+9}$	$\frac{0.8\wedge1.0}{39+10}$	$\frac{0.8\wedge0.9}{39+11}$						
40	1.0						$\frac{1.0\wedge0.9}{40+9}$	$\frac{1.0\wedge1.0}{40+10}$	$\frac{1.0\wedge0.9}{40+11}$					
41	0.9							$\frac{0.9\wedge0.9}{41+9}$	$\frac{0.9\wedge1.0}{41+10}$	$\frac{0.9\wedge0.9}{41+11}$				
42	0.9								$\frac{0.9\wedge0.9}{42+9}$	$\frac{0.9\wedge1.0}{42+10}$	$\frac{0.9\wedge0.9}{42+11}$			
43	0.9									$\frac{0.9\wedge0.9}{43+9}$	$\frac{0.9\wedge1.0}{43+10}$	$\frac{0.9\wedge0.9}{43+11}$		
44	0.7										$\frac{0.7\wedge0.9}{44+9}$	$\frac{0.7\wedge1.0}{44+10}$	$\frac{0.7\wedge0.9}{44+11}$	
45	0.7											$\frac{0.7\wedge0.9}{45+9}$	$\frac{0.7\wedge1.0}{45+10}$	$\frac{0.7\wedge0.9}{45+11}$
$A+B+C=$		$\frac{0.6}{44}$	$\frac{0.6}{45}$	$\frac{0.75}{46}$	$\frac{0.75}{47}$	$\frac{0.8}{48}$	$\frac{0.9}{49}$	$\frac{1.0}{50}$	$\frac{0.9}{51}$	$\frac{0.9}{52}$	$\frac{0.9}{53}$	$\frac{0.9}{54}$	$\frac{0.7}{55}$	$\frac{0.7}{56}$

$$A+B+C=\left\{\frac{0.6}{44},\frac{0.6}{45},\frac{0.75}{46},\frac{0.75}{47},\frac{0.8}{48},\frac{0.9}{49},\frac{1.0}{50},\frac{0.9}{51},\frac{0.9}{52},\frac{0.9}{53},\frac{0.9}{54},\frac{0.7}{55},\frac{0.7}{56}\right\}$$

ファジイ数で示すと付図３のようになる。約 50 分は，44 分から 56 分の区間であることになる。遅刻しないためには 56 分前には出発せねばならない。

2）三角型ファジイ数（*TFN: Triangular Fuzzy Numbers*）

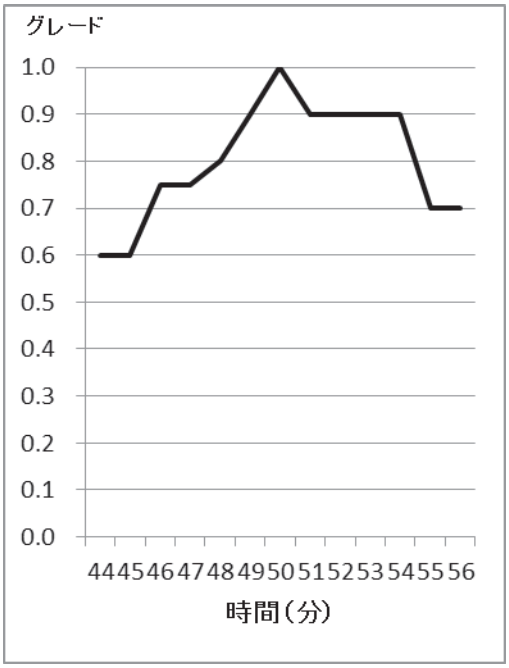
ファジイ数のメンバーシップ関数の型は無数にあり得るが，その中で三角型のファジイ数は計算が単純化され，また経営に関する現象を実用的に扱うためには十分とされる。



付図４　三角型ファジイ数

p：　$\mu_A(x)=0$ の点，*r*：　$\mu_A(x)=1$ の点，

q：　$\mu_A(x)=0$ の点，



付図３　通学時間ファジイ数

(p, r, q) のように３項対で定義される。ここでは，$0 \le p \le r \le q$ とし，三角型ファジイ数の四則演算を示す。

$A=(a_1, a_2, a_3)$，$B=(b_1, b_2, b_3)$とおく。

（１）加法　$A(+B)= (a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

（２）減法　$A(-)B= (a_1, a_2, a_3)-(b_1, b_2, b_3)= (a_1-b_3, a_2-b_2, a_3-b_1)$

（３）乗法　正の数値であれば，$(a_1b_1,\ a_2b_2, a_3b_3)$

$A(\cdot)B= (a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3)=(a_1b_1 \wedge a_1b_3 \wedge a_3b_1 \wedge a_3b_3,\ a_2b_2, a_1b_1 \vee a_1b_3 \vee a_3b_1 \vee a_3b_3)$

（４）除法　正の数値であれば襷掛けのルールによって，$(a_1/b_3,\ a_2/b_2, a_3/b_1)$

$A(/)B= (a_1, a_2, a_3)/(b_1, b_2, b_3)=(a_1/b_1 \wedge a_1/b_3 \wedge a_3b_1 \wedge a_3/b_3,\ a_2/b_2, a_1/b_1 \vee a_1/b_3 \vee a_3/b_1 \vee a_3/b_3)$

3）台形型ファジイ数の積

$A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$，$B=(b_1, b_2, b_3, b_4)$として $A_\alpha(\cdot)B_\alpha$を求める。ただし，正の実数空間で考え，αはメンバーシップグレードのレベルである。公式は以下である。

$$A_\alpha = \{(a_2-a_1)\alpha + a_1,\ -(a_4-a_3)\alpha + a_4\}$$
$$B_\alpha = \{(b_2-b_1)\alpha + b_1,\ -(b_4-b_3)\alpha + b_4\}$$
$$A_\alpha(\bullet)B_\alpha = \{((a_2-a_1)\alpha + a_1)((b_2-b_1)\alpha + b_1),\ (-(a_4-a_3)\alpha + a_4)(-(b_4-b_3)\alpha + b_4)\}$$
$$\alpha = 0\text{ならば、}A_0(\bullet)B_0 = (a_1b_1,\ a_4b_4)$$
$$\alpha = 1\text{ならば、}A_1(\bullet)B_1 = (a_2b_2,\ a_3b_3)$$
$$\text{すなわち、}A(\bullet)B = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4)$$

引用文献・参考文献

1）阿部克己（1998）企業財務統計をデータベースとする企業の経営構造とそのパフォーマンス分析（２）－*AIPR* システムを基礎とする分析システムの設計と入出力－，明星大学紀要（情報学部）第６号，pp. 173-188。

2）阿部克己（2011）「*AIPR* と生産関数による企業生産力・生産性評価」，明星大学経営学紀要，第６号，pp. 1-20。

3）阿部克己（2012）「意志決定におけるファジィ理論の応用　(1) 階層化意志決定法 *AHP* の活用」，明星大学経営学紀要，第７号，pp. 25-44。

4）黒澤一清（1991）「*Productivity Measurement and Management at the Company Level: The Japanese Experience*」, *Elsevier Science Publisher, Amsterdam, chs. 12*。

5）黒澤一清（1994）「経済・経営統計」，放送大学教育振興会，chs. 11～12。

6）黒澤一清（2000）面接授業「経済・経営統計」演習教材，放送大学。

7）黒澤一清（2002）「ファジイ理論（１）」*Japan Academy of Productivity Science*（明星大学大学院情報学研究科），*Unpublished.*

8）黒澤一清（2003）「ファジイ理論（２）」*Japan Academy of Productivity Science*（明星大学大学院情報学研究科），*Unpublished.*