不可欠プレイヤーを持つ大ゲームのShapley値

横田宏治

概要

本稿では、連続プレイヤーを含む協力ゲームにおいて、提携が本質的となるために不可欠なプレイヤーが存在するケースを考え、そのShapley値を求める。不可欠プレイヤーは、質量的なケースと連続的なケースの両方を考慮し、どちらも論理的には破綻しないことを示す。Shapley値では、不可欠でないプレイヤーは全体利得の限界分と基準点利得の平均を獲得し、不可欠プレイヤーはその残余分を均等に配分される。

1　はじめに

労働市場に摩擦が存在するとき、賃金は、マッチング状態が保有する準レントを、労使間の交渉によって分配する形で定められる。この交渉をモデル化する際に、Stole and Zwiebel (1996) に代表されるように多人数 Nash 交渉解を用いることが広く行われる。これに対して、多人数の提携を明示的に許容する協力ゲームのスキームを用いることは、一つの自然な定式化であり、のちに示すように操作上のメリットがあるが、リスク中立的な企業とリスク回避的な労働者の組み合わせでは、交渉の設定をTUゲームの枠組みに留めることが難しいという難点があった。

本紀要前号の横田（2022）において示したところでは、摩擦的労働市場と競争的資本市場に直面し、反復可能技術を持った企業は、無限遠点における配当後期待価値が厳密に正である。このことは、そのような環境においては、企業は、将来の収益をリスクプレミアムを上乗せして割り引くものとして、もしくはリスク回避的効用関数を有しているものとして表現すべきであることを意味する。この場合、企業と労働者の間の価値の分配をTUゲームとして定式化できる場合が存在する。価値の分配を特性関数型に定式化することによって、複数の企業構成者による交渉を一括で考えることができるため、波及効果を考える必要がない。そのため、より大きなモデルに組み込んでも操作が容易な結果を得ることができる。

特に、１つの企業に対して労働者が多数であるものと考え、後者の数を連続体として考えた場合には、極めて簡潔な結果が得られる。一般に、摩擦的労働市場において、企業と無限数の労働者が提携を組んで生産を行うとした場合、単独の労働者は、自然分離率に従って、将来時点で提携から分離する可能性がある。その一方で、企業がすべての労働者から分離して生産ができなくなる状況が発生する確率は０である。

すなわち、一般に危険中立的と想定される企業の将来割引率が、自然分離率に相当する分だけ、危険回避的な消費者よりも高い状況を正当化できない限りは、企業と労働者の間の価値の分配は、NTUゲームとして定式化せざるを得ない。そして、NTUにおける交渉解は、本稿に示したような簡単なものとはならない。しかしながら、企業も労働者もリスクプレミアムを要求する状況であれば、企業・個人の選好の違いにより、特殊例としてTUゲームが成立する状況を考えることは許容される。

プレイヤー数が連続体のときのShapley値については、AumannとShapleyが非公刊の論文の中で保測変換を用いた定義を与えているが、Kannai（1966）は有限プレイヤーゲームの極限として再定式化している。本稿はこれに沿って、Yokota（2009）を元に、企業管理者が唯一の存在ではなく、複数もしくは連続体として存続しうるケースを含むように一般化し、整理・発展させたものである。

2　企業の選好とリスクプレミアム

企業が内部留保を残す場合、その運用方法には、大きく分けて２つの方法がある。一つは金融資産による運用、もう一つは自社への実物投資である。もし企業の効用関数を与えられたものとするならば、モジリアーニ＝ミラーの定理（Modigliani and Miller, 1958）における企業価値の線形性は失われ、企業自体がリスクに対する選好をもつ。そうなれば、一般に企業の内部留保の運用は、無リスク資産を含む金融資産と自社への実物投資のポートフォリオによって構成される。

ここでは、単純化のために、すべての企業は、資産保有量を含め、事前的に同質であるものとする。すると、有リスク資産の内部保有と外部保有は無差別となるので、企業は内部留保の一部を無リスク資産として持ちつつ、残りを自社への実物投資に充てることになる。無リスク資産へのt期の投資額をs_tとし、自社保有の実物投資額をi_tで表すことにする。無リスク資産へのt期のリターンは確定的な変数$\bar{r}_t$で与えられる。t期の収入は、無リスク資産として前期から持ち越した$(1+\bar{r}_t)s_{t-1}$と、当期生産物の和である。当期の生産は、期待値０の確率変数εの影響を受け、株主から調達した外部資本k_t^eと内部留保から調達した内部資本k_t^iを資本投入として用い、さらに労働l_tを雇用して行う。ここでは、労働は一旦外生と置き、摩擦的労働市場を反映して、本稿で得られる通り、$f_l < w$と仮定する。外部資本と内部資本は完全代替である。すなわち、生産関数は、最初の２変数の規模に関して収穫一定な凹関数$f(k_t^e + k_t^i, l_t; \varepsilon)$で与えられる。便宜上$f_\varepsilon > 0$とする。一方、生産物は、資本と労働への報酬、資本への超過配当、さらに内部留保に分配される。自社の資本コストr_tは、事前確定的な変数として与えられ、資本コストに上乗せされる超過配当π_tが、確率的な生産性ショックεが実現した後に決定される。π_tは正負両様の値を取り得る。すると、各期の予算制約は

$$\begin{aligned}&\pi_t + r_t k_t^e + w_t l_t + (i_{t+1} + s_{t+1})\\&\quad = f(k_t^e + k_t^i, l_t; \varepsilon_{t+1}) + (1+\bar{r}_t)\, s_t\\&\qquad\qquad (t = 0, 1, \ldots)\end{aligned} \tag{1}$$

および、無リスク資産と内部資本の初期値をそれぞれ$\bar{s}$、$\bar{k}^i$として

$$s_0 = \bar{s},\ k_0^i = \bar{k}^i \tag{2}$$

となる[*1]。実物投資に充てられる内部留保は、

[*1] 内部資本への支払いは同時に当期の収入となるので、予算制約式の両辺に現れ相殺される。

減価償却率を$\delta \in (0,1)$として

$$k^i_{t+1} = (1-\delta)\, k^i_t + i_{t+1} \qquad (t = 0, 1, \ldots)$$

なる遷移式に従う。0期における企業の効用価値$U_0(s_0, k^e_0)$は、t期の超過配当をπ_tとして

$$U_0(s_0, k^e_0) = \max_{\{\pi_t, s_t, i_t\}_{t=0}^{T}} \mathrm{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(\pi_t)$$

で与えられる。資本市場が競争的であれば、期待超過配当は資本コストに組み入れられるので、均衡条件として、資本コストr_tは$\mathrm{E}\,\pi_t = 0$が成立する水準で定まる。

企業のBellman方程式は

$$\begin{aligned} &U_t(s_t, k^e_t) \\ &\quad = \max_{\pi_t, k^e_t, s_t, i_t} \mathrm{E}_t\, u(\pi_t) + \beta\, \mathrm{E}_t\, U_{t+1}(s_{t+1}, k^e_{t+1}) \end{aligned}$$

となり、最大化は⑴⑵の制約の下で行われる。最適化の一階条件と包絡線定理により、ここから得られる関係式は

$$\mathrm{E}\, f_k(k^e_t + k^i_t, l_t; \varepsilon) = r_t \tag{3}$$

$$u'(\pi_t) = \beta\, \mathrm{E}_t\big[1 - \delta + f_k(k^e_t + k^i_t, l_t; \varepsilon)\big]\, u'(\pi_{t+1}) \tag{4}$$

$$u'(\pi_t) = \beta\,(1 + \bar{r}_t)\, \mathrm{E}_t\, u'(\pi_{t+1}) \tag{5}$$

である。⑷⑸式より

$$\begin{aligned} r_t &= \mathrm{E}_t\, f_k(k^e_t + k^i_t, l_t; \varepsilon) \\ &= \bar{r}_t + \delta - \frac{\mathrm{cov}_t(f_k, u'(\pi_{t+1}))}{\mathrm{E}_t\, u'(\pi_{t+1})} \end{aligned}$$

を得る。正の生産性ショックが、資本の限界生産性を上げるようなものであるならば、$\mathrm{cov}(f_k, u') < 0$であるので、資本投資にはリスクプレミアムが要求される。企業がリスク中立的であるならば、リスクプレミアムは0である。

もしfの下限が$t \to \infty$において厳密に正であれば、$\lim_{t\to\infty}(s_t + i_t) > 0$である。すなわち、企業の長期的な内部留保は厳密に正である。もしそうでないとすれば、十分大きなtに対して⑸式を成立させることができなくなる。

以下では、u'が一定ではない効用関数を持つ企業を前提とし、企業の将来割引率が、労働者の将来割引率と自然分離率の和に等しいケースを想定する。このような想定はそれほど無理なものではない。企業のマネージャーは、企業業績が株価や自身の昇進、進退問題に影響することを恐れる。意思決定の成否が、失業状態の価値の数百倍の価値の逸失を意味するのであれば、それが日常の消費に対するリスク回避度よりも小さいことは、むしろ稀であるかもしれない。いずれにせよ、企業の将来割引率が、労働者の将来割引率と自然分離率の和に等しいとする想定は、解を得るための恣意的な仮定であり、操作可能な解で以て現実を近似することが目的である。これによって、交渉問題はTUゲームとして定式化される。

3 不可欠プレイヤーを持つ大ゲーム

労働市場に摩擦が存在するとき、すでに雇用関係にある企業と労働者のグループには、準レントが存在する。この準レントは、雇用関係を成立させていない企業や労働者が、雇用関係を樹立するためには、費用をかけて相手を探す活動を経なくてはならないという事実から発生する。雇用関係にある企業と労働者は、この準レントの分配をめぐって交渉を行うものとする。交渉は、企業が異時点にわたる最適な生産活動を立案したのち、すべての時点において為されるものとする。したがって、企業の生産計画は、将来の交渉の予想を織り込んで立てられる。

具体的には、潜在的に質量を持つ管理者から

成る1企業と連続測度lを持つ労働者が提携を組んで、将来にわたって生産を行う。生産計画は、企業の最適選択に従って立てられ、労働者はそれに従う。途中、提携内の各プレイヤーは、外的に与えられた自然分離率$\sigma \geq 0$で確率的に離脱するが、企業は最適生産計画に従って、新たな労働者を雇用することができる。将来雇用される労働者は、過去の賃金交渉には関与しない。ある時点ξにおける、この企業と測度l_ξ^*の労働者の全提携は、最適な資本調達量k_ξ^*を用いて、生産量$f(k_\xi^*, l_\xi^*; \varepsilon_{\xi+1})$を実現する。ここで$f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$は、$f_1, f_2 > 0$および$f_{11}, f_{22} < 0$を満たす生産関数である。$\varepsilon_{\xi+1}$は、$(\xi+1)$期に値が実現する確率ショックである。各プレイヤーは、利得を金銭によって評価する。すると、提携の価値Fは

$$F(l_t) = \sum_{\xi=t}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_t f(k_\xi^*, l_\xi^*; \varepsilon_{\xi+1})}{\prod_{\eta=t}^{\xi} \left(1 + r_\eta\right)} \tag{6}$$

で与えられる。割引因子rは、企業（場合により管理者）と労働者で共通であり、前者の割引因子は、リスクプレミアムを含んだ主観的割引率に等しく、後者のそれは、同じくリスクプレミアムを含んだ主観的割引率に自然分離率を加えたものと考える。

この交渉ゲームを構成する要素を整理してみよう。まず、$\Omega^{(n)}$をプレイヤー数がnのときの全プレイヤーの集合とし、連続濃度の労働者との交渉を有限プレイヤーゲームの極限として分析するために、その集合列$\{\Omega^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$を考察の対象とするものとする。

いま、プレイヤーは、nとは独立なM個の職能等を表す属性グループ（集合）のいずれかに属し、それらのグループの集合を$\mathscr{S} := \{S_i\}_{i \in I}$で表す。ここで、$I = \{1, \ldots, M\}$は属性グループのインデックスの集合とし、$M \geq 2$と仮定する。この仮定は、企業体を構成するためには、被雇用者から成る職能グループだけでは不十分であり、雇用政策も含めた意思決定を担う職能グループが必要とされるとの見方を反映している。S_iの要素はnに依存するが、Iはnに対し不変とする。また、$\{S_i\}_{i \in I}$は$\Omega^{(n)}$の分割であるので、$\Omega^{(n)} = \sum_{i \in I} S_i$である。これらの属性グループは、さらに「労働者族」$\mathscr{W}$に属するか、または下記に定義する不可欠性を有する「管理者族」$\mathscr{M}$のいずれかの集合族に、排他的に必ず属するものとする。インデックスは、必要があれば番号を振り直して、前者のインデックス集合が$I_w = \{1, \ldots, m\}$、後者のそれが$I_m = \{m+1, \ldots, M\}$となるようにする。すると$I = I_w + I_m$であり、$\mathscr{W} = \{S_i\}_{i \in I_w}$かつ$\mathscr{M} = \{S_i\}_{i \in I_m}$である。$i$番目のグループのプレイヤー数は、$N_i^{(n)} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$であるものとし、$J_i^{(n)} = \{1, \ldots, N_i^{(n)}\}$をそのグループに属するプレイヤーのインデックスとする。i番目のグループのj番目のプレイヤーは、s_{ij}というシンボルで表す$(i \in I,\ j \in J_i^{(n)})$。また、特性関数を$v: 2^{\Omega^{(n)}} \to \mathbb{R}$で表すものとする。

この提携型ゲームに、賃金交渉の特性を反映した、以下の仮定を置く。

仮定1（本質的ゲーム）．ゲームは本質的である。すなわち、$v(\Omega) > \sum_{s \in \Omega} v\bigl(\{s\}\bigr)$を満たし、全提携による利得は、個別利得の総和よりも大きい。

仮定2（グループ内無名性）．同一グループに属するプレイヤーは、帰属する任意の提携の特性関数の値に関して無名性を持つ。すなわち、任意の$S \subseteq S_i^{(n)} \in \Omega^{(n)}$と、$j \neq h$なる任意の$j, h$に関して$v(S) - v\bigl(S \setminus \{s_{ij}\}\bigr) = v(S) - v\bigl(S \setminus \{s_{ih}\}\bigr)$である。また、同一の属性グループに属するプレイヤーの測度は、互いに等しい。

仮定3（不可欠性）．$\mathscr{M}$に属するプレイヤーが1人でも欠けるか、任意のグループが1つでも

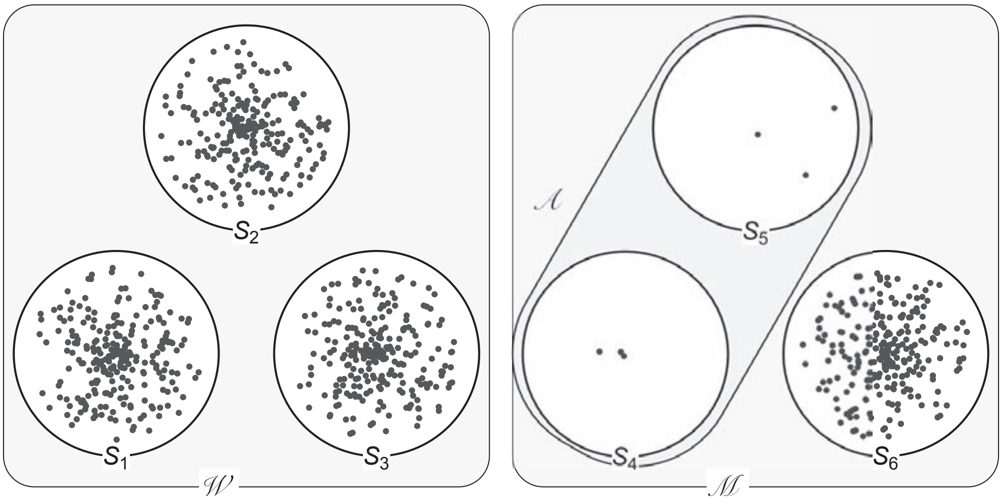


図１：プレイヤーの属性グループ ($M=6$, $m=3$, $a=2$)

欠けると、提携は本質性を失う。すなわち、

(a) 与えられた$S \subseteq \Omega^{(n)}$に対して、もし$S \cap S_i^n \neq S_i^n$であるような$i \in I_m$が存在するか、

(b) $S \cap S_i^n = \emptyset$であるような$i \in I$が存在するならば、$v(S) = \sum_{s \in S} v(\{s\})$となる。このような非本質的な提携族を

$$\mathscr{O} := \{S : (\exists i \in I, S \cap S_i^n = \emptyset) \vee (\exists i \in I_m, S \cap S_i^n \neq S_i^n)\}$$

と定義することにする。

上記の要件でもって定義される提携型ゲームを$G(\Omega^n, v)$と表すことにする。これは、以下に考察するゲームのうち、最も一般的なクラスである。いま、このゲームの列$\{G(\Omega^n, v)\}_{n=2}^{\infty}$を考える。このゲームの列について、以下の仮定を置く。

仮定４（フィルトレーション）．任意の$n \in \mathbb{N}$, $i \in I, j \in J_i^{(n)}$に関して、$s_{ij} \in S_i^{(n)}$ならば$s_{ij} \in S_i^{(n+1)}$である。

仮定５（与えられた提携測度）．任意の属性グループS_iは、nとは独立に、与えられた有界な測度$l_i \in [0, \infty)$を持つ。

仮定６（質量族の存在）．nとは独立に、$\emptyset \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$なる$\mathscr{M}$の部分集合$\mathscr{A}$が存在し、$S_i \in \mathscr{A}$ならば$N_i(n)$は有界、$S_i \in \mathscr{A}^c$ならば$\lim_{n\to\infty} N_i(n) = +\infty$である。

質量族のインデックス集合を$I_a := \{i \in I : S_i \in \mathscr{M}\} \subseteq I_w$と表記する。有界な増加数列は収束するから、質量族に属する属性グループ$S_i \in \mathscr{A}$の要素数$N_i^{(n)}$は、有限数に収束する。$a := \|I_a\|$とし、表記の簡便化のため、I_mの番号を降り直して、最初のa個をI_aに属するものとする。すなわち、インデックスを順に$I_w = \{1, \ldots, m\}$、$I_m \cap I_a = \{m+1, \ldots, m+a\}$、$I_m \setminus I_a = \{m+a+1, \ldots, M\}$と区分けする。仮定６については、$\mathscr{A}$を$\mathscr{M}$の部分集合とせずに、$\mathscr{W}$の要素を含むように構成することも可能であるが、その場合には、以後に示す解の限界的な性質は失われ、解の持つ単純さが大きく損なわれる。それでは、離散的な複雑さを抽象化して連続の世界で考えることのメリットを失う。ここでは、代替可能な存在は、非質量的な

存在であるものであると仮定することによって、単純さを維持したい。なお、その逆は仮定しない。すなわち、労働者族はつねに非質量的であると考えるが、定義により代替的でない管理者族は、質量的であり得ると同時に、非質量的でもありうるものとする。このような一般性を維持することによって、単体としての企業が多数の労働者を雇用するという単純な図式を脱して、企業組織の複雑さを考慮の範疇に収めることが潜在的に可能となる。

仮定2により、s_{ij}は、任意の$j \in S_i$に対して共通の測度$\mathrm{d}l_i^{(n)}$を持つものとすると、$N_i^{(n)} \mathrm{d}l_i^{(n)} \equiv l_i$であるから、$S_i \in \mathscr{A}$ならば$n \to \infty$にしたがって$\mathrm{d}l_i^{(n)} \to 0$となる。一方、$S_i \in \mathscr{A}^c$のときは、一般性を失うことなく$\mathrm{d}l_i \equiv 1$とする。プレイヤー$s$の利得密度を$\iota(s)$で表すことにすると、測度$\mathrm{d}l$を持つプレイヤー$s$が受け取る利得は$\iota(s)\mathrm{d}l$で表される。利得密度の集合は$\iota = (\iota(s))_{s \in \Omega^{(n)}}$と表す。

解についての命題を得る前に、次の補題を証明しておく。これはShapley値の構成の仕方から、当然の結果である。

補題7. $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{N}^M$をパラメータとし、$\Upsilon : \big([0, \zeta_1] \times \cdots \times [0, \zeta_M]\big) \cap \mathbb{N}^M \to \mathbb{R}$を以下のように定義する。

$$\Upsilon(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\zeta}) := \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \zeta_i} \frac{\prod_{i=1}^M \binom{\zeta_i}{y_i}}{\binom{\sum_{i=1}^M \zeta_i}{\sum_{i=1}^M y_i}} \tag{7}$$

このとき、(7)式は確率質量関数である。

証明. $\Upsilon \geq 0$は明らか。Υを$\sum y_i$が同じ値を持つグループごとに、すべてのy_iについて足し上げると

$$\begin{aligned} &\sum \Upsilon \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \zeta_i} \sum_{k=0}^{\sum \zeta_i} \sum_{\{y_i : \sum_{i=1}^M y_i = k\}} \frac{\prod_{i=1}^M \binom{\zeta_i}{y_i}}{\binom{\sum_{i=1}^M \zeta_i}{k}} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \zeta_i} \sum_{k=0}^{\sum \zeta_i} \sum_{\sum y_i = k} \mathrm{Mult.Hypg.}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\zeta}, k) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。ここで$\mathrm{Mult.Hypg.}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\zeta}, k)$は、母集団$(\zeta_1, \ldots, \zeta_M)$からサイズ$k$の標本を抽出するときの多変量超幾何分布である。以上から題意が導かれる。

補題8. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}_+^M$が、$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{N}^M$と$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}_{++}^M$を用いて$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$および$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$と表されているものとする。$D := [0, l_1] \times \cdots \times [0, l_M]$を定義域とし、密度を表すシュワルツ超関数$\delta : D \to \mathbb{R}$を

$$\delta(x_1, \ldots, x_M)\, \mathrm{d}l_1 \cdots \mathrm{d}l_M = \Upsilon(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\zeta}) \tag{8}$$

となるように定義する。$A := (x_i = l_i \ \mathit{for}\ \forall i \in I) \vee (x_i = 0 \ \mathit{for}\ \forall i \in I)$、および任意の$\varepsilon > 0$に対して$B := \{x : x_i - \varepsilon < z_i \leq x_i + \varepsilon\} \cap D$と表すものとすると、$\delta$は

$$\delta(x_1, \ldots, x_M) = \begin{cases} \infty & \mathit{if}\ A \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

および

$$\int \!\cdots\! \int_B \delta(z_1, \ldots, z_M)\, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_M = \begin{cases} \frac{1}{2} & \mathit{if}\ A \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

を満たす。ここで左辺は*Stieltjes*積分である。

証明. (8)式において、任意の$S_i \in \mathscr{A}$について、$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{l}$を一定としながら$\mathrm{d}l_i \to 0$ととる。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$および$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$なので、これは$y_i, \zeta_i \to$

$\infty, \forall i \in I_a^c$となることを意味するが、この操作の間、$y_i/\zeta_i \equiv x_i/l_i =: \alpha_i$は一定に保ち、かつ$y_i, \zeta_i \in \mathbb{N}$が任意の$i$について満たされるような点列を考えることとする。すなわち、$\gcd(\cdot,\cdot)$を2自然数の最大公約数を表すものとして、

$$\left\{\left(y_i^{(n)}, \zeta_i^{(n)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{nx_i}{\gcd(x_i, l_i)}, \frac{nl_i}{\gcd(x_i, l_i)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

なる点列を考えれば良い。いま、ベクトル$\boldsymbol{y}$を便宜上分割して$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{y}_{na})$と表記することにし、$\boldsymbol{y}_a := \{y_i \in \mathbb{N} : i \in I_a \cap I\}$および$\boldsymbol{y}_{na} := \{y_i \in \mathbb{N} : i \in I_a^c \cap I\}$とする。関数$f : \mathbb{N}^{\|I_a\|} \times \mathbb{N}^{\|I_a^c\|} \to \mathbb{R}$を

$$f(\boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{y}_{na}; \boldsymbol{\zeta}) := \frac{\left[\prod_{i\in I_a^c} \zeta_i\right]\left[\prod_{i\in I} \binom{\zeta_i}{y_i}\right]}{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I} y_i}} \tag{10}$$

と定義すると、Υは

$$\Upsilon(\boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{y}_{na}; \boldsymbol{\zeta}) = \frac{f(\boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{y}_{na}; \boldsymbol{\zeta})}{\left(1+\sum_{i\in I}\zeta_i\right)\left(\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i\right)}$$

と書くことができる。

1. ある$i \in I_a^c \subseteq I$が存在して$0 < y_i < \zeta_i$である場合

Stirlingの公式$\zeta! \approx \sqrt{2\pi\zeta}\zeta^\zeta e^{-\zeta}$を用いると、一般に$y \neq 0, \zeta$に対して

$$\binom{\zeta}{y} = \frac{\zeta!}{y!\,(\zeta-y)!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\zeta}{y\,(\zeta-y)}}\frac{\zeta^\zeta}{y^y\,(\zeta-y)^{\zeta-y}}$$

となる。ここから、αの定義を用いると、任意のインデックス集合$\mathscr{I} \subseteq I$について、

$$\prod_{i\in\mathscr{I}}\binom{\zeta_i}{y_i} \approx (2\pi)^{-\|\mathscr{I}\|/2}\prod_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i^{-1/2} \times \prod_{i\in\mathscr{I}}\alpha_i^{-\alpha_i\zeta_i-1/2}\prod_{i\in\mathscr{I}}(1-\alpha_i)^{-(1-\alpha_i)\zeta_i-1/2}$$

および

$$\binom{\sum_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i}{\sum_{i\in\mathscr{I}}y_i}^{-1} \approx (2\pi)^{1/2}\left[\sum_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i\right]^{-\sum\limits_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i-\frac{1}{2}} \times \sqrt{\sum_{i\in\mathscr{I}}\alpha_i\zeta_i}\sqrt{\sum_{i\in\mathscr{I}}(1-\alpha_i)\zeta_i} \times \left[\sum_{i\in\mathscr{I}}\alpha_i\zeta_i\right]^{\sum\limits_{i\in\mathscr{I}}\alpha_i\zeta_i}\left[\sum_{i\in\mathscr{I}}(1-\alpha_i)\zeta_i\right]^{\sum\limits_{i\in\mathscr{I}}(1-\alpha_i)\zeta_i}$$

と書くことができる。これらを用いると、

$$f(\boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{y}_{na}; \boldsymbol{\zeta}) \approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\|I\|-1}{2}}} \times \frac{\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i}{\prod_{i\in I}\sqrt{\zeta_i}\left(\sum_{i\in I}\zeta_i\right)^{\sum\limits_{i\in I}\zeta_i+\frac{1}{2}}} \times \frac{\left[\sum_{i\in I}\alpha_i\zeta_i\right]^{\sum\limits_{i\in I}\alpha_i\zeta_i+\frac{1}{2}}}{\prod_{i\in I}\alpha_i^{\alpha_i\zeta_i+\frac{1}{2}}} \times \frac{\left[\sum_{i\in I}(1-\alpha_i)\zeta_i\right]^{\sum\limits_{i\in I}(1-\alpha_i)\zeta_i+\frac{1}{2}}}{\prod_{i\in I}(1-\alpha_i)^{(1-\alpha_i)\zeta_i+\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

となる。一方、両項の上界について

$$\prod_{i\in\mathscr{I}}\binom{\zeta_i}{y_i} \le (2\pi)^{-\|\mathscr{I}\|/2} \times \prod_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i^{-1/2}\prod_{i\in\mathscr{I}}\min\left[\alpha_i, 1-\alpha_i\right]^{-\zeta_i-1}$$

および

$$\binom{\sum_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i}{\sum_{i\in\mathscr{I}}y_i}^{-1} \le (2\pi)^{1/2}\left[\sum_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i\right]^{-\sum\limits_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i-\frac{1}{2}} \times \max\left[\sum_{i\in\mathscr{I}}\alpha_i\zeta_i, \sum_{i\in\mathscr{I}}(1-\alpha_i)\zeta_i\right]^{\sum\limits_{i\in\mathscr{I}}\zeta_i+1}$$

を得る。さらに、⑾式右辺の１つ目の分数については、

$$\frac{\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i}{(2\pi)^{\frac{\|I\|-1}{2}}\prod_{i\in I}\sqrt{\zeta_i}}=\frac{\prod_{i\in I_a^c}\sqrt{\zeta_i}}{(2\pi)^{\frac{\|I\|-1}{2}}\prod_{i\in I_a}\sqrt{\zeta_i}} \le \frac{\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i}{(2\pi)^{\frac{\|I\|-1}{2}}\prod_{i\in I_a}\sqrt{\zeta_i}}$$

を上界として得るので、

$$Z(\zeta;\alpha):=\log\sum\zeta_i - \max\{\log\sum\alpha_i\zeta_i,\,\log\sum(1-\alpha_i)\zeta_i\}$$

と定義し、

$$R(\zeta;\alpha):=\sum_{i\in I}\min\left[\log\alpha_i,\,\log(1-\alpha_i)\right](1+\zeta_i) - \frac{1}{2}\log\sum\zeta_i$$

と置けば、f の上界を

$$f(\boldsymbol{y}_a,\boldsymbol{y}_{na};\boldsymbol{\zeta})\le\frac{\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i}{(2\pi)^{\frac{\|I\|-1}{2}}\prod_{i\in I_a}\sqrt{\zeta_i}}\times \exp\left\{-Z(\zeta;\alpha)\left(1+\sum\zeta_i\right)-R(\zeta;\alpha)\right\}$$

とすることができる。ここで、任意のαに対して$Z(\zeta;\alpha)>0$であることと、$\log\sum\zeta_i=o(1+\sum\zeta_i)$であることを用いれば、上式の右辺は、$\zeta_i\to\infty$となる$i$があれば、０に収束する。$I_a^c\neq\emptyset$であるので、そのような$i$は存在して$f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\zeta})\to 0$である。

2. すべての$i\in I_a^c$について、$y_i=0$または$y_i=\zeta_i$である場合

この場合、$\prod_{i\in I_a^c}\binom{\zeta_i}{y_i}=1$となるので、⑽式において、$I=I_a$と置いた場合にあたる。$0<\sum_{i\in I_a^c}y_i<\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i$のとき、$\beta=\sum_{i\in I_a^c}\alpha_i/M\in(0,1)$を用いて$\sum_{i\in I_a^c}y_i=\beta\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i$と表すことにし、すると、$\beta$は$\boldsymbol{\zeta}_{na}$から独立で、⑽式は

$$f(\boldsymbol{y}_a,\boldsymbol{y}_{na};\boldsymbol{\zeta})=(\text{const.})\left(\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i\right)\times\left(\frac{\sum_{i\in I_a}\zeta_i+\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}y_i+\beta\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i}\right)^{-1}\to 0$$

と表せ、右辺はあるiについて$\zeta_i\to\infty$と取った時の極限である。ここで$(\text{const.})=\prod_{i\in I_a}\binom{\zeta_i}{y_i}$である。収束性は、Stirlingの公式を再び適用することによって確かめることができる。一方、$\sum y_i=0$または$\sum y_i=\sum\zeta_i$のとき（すなわち$\boldsymbol{y}_{na}=\boldsymbol{0}$または$\boldsymbol{y}_{na}=\boldsymbol{\zeta}$）には、⑽式は、ある$i$について$\zeta_i\to\infty$と取ると、

$$f(\boldsymbol{y}_a,\boldsymbol{y}_{na};\boldsymbol{\zeta})=(\text{const.})\left(\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i\right)\to\infty$$

となる。さらに$(\text{const.})+\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i=o(\prod_{i\in I_a^c}\zeta_i)$であるから、ある$i$について$\zeta_i\to\infty$と取ると、

$$\frac{f(\boldsymbol{y}_a,\boldsymbol{y}_{na};\zeta)}{1+\sum_{i\in I}\zeta_i}\to\infty$$

である。

定義により$l_i=\zeta_i\mathrm{d}l_i$であるから、以上の結果を用いて、⑻式は

$$\delta(x_1,\ldots,x_M)=\frac{1}{1+\sum\zeta_i}\frac{\prod\binom{\zeta_i}{y_i}}{\binom{\sum\zeta_i}{\sum y_i}}\frac{1}{\mathrm{d}l_1\cdots\mathrm{d}l_M} =\frac{1}{\prod_{i\in I_a^c}l_i}\frac{f(\boldsymbol{y}_a,\boldsymbol{y}_{na};\zeta)}{1+\sum\zeta_i} \to\begin{cases}\infty & \text{if } \boldsymbol{y}_{na}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\zeta}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{12}$$

となる。ここから、$\boldsymbol{y}_{na}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\zeta}$と任意の$\boldsymbol{y}_a$が、

超関数$\delta(x_1,\ldots,x_M)$の非0の収束点としての候補となる。

(9)式については、以下の通り。補題7より$\sum_{y_1=1}^{\zeta_1}\cdots\sum_{y_M=1}^{\zeta_M}\Upsilon\left(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\zeta}\right)=1$は、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\to 0$となるにしたがって$\int_0^{l_1}\cdots\int_0^{l_M}\delta(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}l_1\cdots\mathrm{d}l_M=1$を意味する。一方、$\delta(\boldsymbol{x})>0$となるのは、$\boldsymbol{y}_{na}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\zeta}$の近傍のみである。

$$\sum_{\boldsymbol{y}:\delta(\boldsymbol{x})>0}\Upsilon(\boldsymbol{y}_a,\boldsymbol{y}_{na};\boldsymbol{\zeta})=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{M}\zeta_i}\times\sum_{y_{m+1}=0}^{\zeta_{m+1}}\cdots\sum_{y_{m+a}=0}^{\zeta_{m+a}}\frac{\prod_{i\in I_a}\binom{\zeta_i}{y_i}}{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}y_i}}=1$$

(10)式の定義より、$i\in I_a$について与えられた$y_i=x_i$に対して、

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{\zeta}_{na};\boldsymbol{\zeta})}{f(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{0}_{na};\boldsymbol{\zeta})}\equiv\frac{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}x_i}}{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}x_i+\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i}}$$

である。これは$\sum_{i\in I_a}x_i>\sum_{i\in I_a}\zeta_i/2$ならば、すべての$i\in I_a^c$に関して$\zeta_i\to\infty$と取るにしたがって発散し、$\sum_{i\in I_a}x_i>\sum_{i\in I_a}\zeta_i/2$ならば0に収束する。$\sum_{i\in I_a}x_i=\sum_{i\in I_a}\zeta_i/2$ならば恒等的に1に等しい。また、同様に、任意の$\boldsymbol{x}_a\neq\boldsymbol{\zeta}_a$に関して、任意の$i\in I_a^c$について$\zeta_i\to\infty$ととれば、任意の$\boldsymbol{x}_a\in[\boldsymbol{0},\boldsymbol{\zeta}_a]\cap\mathbb{Z}$に対して

$$\frac{f(\boldsymbol{\zeta}_a,\boldsymbol{\zeta}_{na};\boldsymbol{\zeta})}{f(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{\zeta}_{na};\boldsymbol{\zeta})}=\frac{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}x_i+\sum_{i\in I_a^c}\zeta_i}}{\prod_{i\in I_a}\binom{\zeta_i}{x_i}}\to\infty$$
$$\frac{f(\boldsymbol{\zeta}_a,\boldsymbol{0}_{na};\boldsymbol{\zeta})}{f(\boldsymbol{x}_a,\boldsymbol{0}_{na};\boldsymbol{\zeta})}=\frac{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}x_i}}{\binom{\sum_{i\in I}\zeta_i}{\sum_{i\in I_a}\zeta_i}\prod_{i\in I_a}\binom{\zeta_i}{x_i}}\to\infty$$

となり、任意の$\boldsymbol{\zeta}$に関して

$$\frac{f(\boldsymbol{\zeta}_a,\boldsymbol{\zeta}_{na};\boldsymbol{\zeta})}{f(\boldsymbol{0}_a,\boldsymbol{0}_{na};\boldsymbol{\zeta})}\equiv 1$$

が成立する。シュワルツの超関数の定義に従い、任意のテスト関数ϕに対して$\langle\Upsilon_n,\phi\rangle\to\langle\delta,\phi\rangle$となる線形（汎）関数列$\{\Upsilon_n\}$を考えると（汎関数と関数を同一視して、$\Upsilon_n[\phi]:=\int_{\mathbb{R}^M}\Upsilon_n(\boldsymbol{x})\,\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ととる）、上記の$f$の比から、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\zeta}$以外の点の局所積分値は0に収束する。このことから、$f(\boldsymbol{0})\equiv f(\boldsymbol{\zeta})$であることを考えると、候補点のうち$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\zeta}$がそれぞれ確率1/2に収束する。ここから(9)式が導かれる。

補題8の結果を、2変数の場合($m=M=2$)について図示したのが、図2である。同様の漸近的な性質は、2変数のうち1つを有界に置いたときにも観察される。なお、$M=1$かつ$I_a=\emptyset$のとき、δは連続一様分布関数となる。

定理9． $G(\Omega^\infty,v)$において、$i\in I_w$かつ$j\in J_i$なる任意のs_{ij}に対して

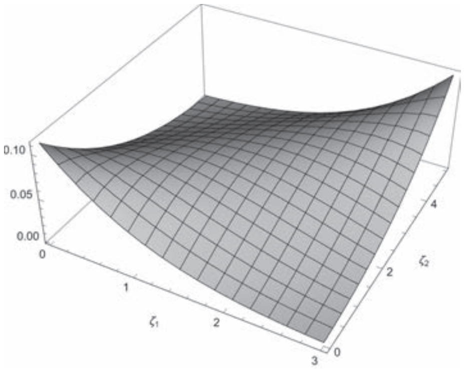
$$\iota\left(s_{ij}\right)\mathrm{d}l=\frac{v\left(\left\{s_{ij}\right\}\right)}{2}+\frac{v(\Omega)-v\left(\Omega\setminus\left\{s_{ij}\right\}\right)}{2}\tag{13}$$

を割り当て、$i\in I_m$かつ$j\in J_i$なる任意のs_{ij}に対して

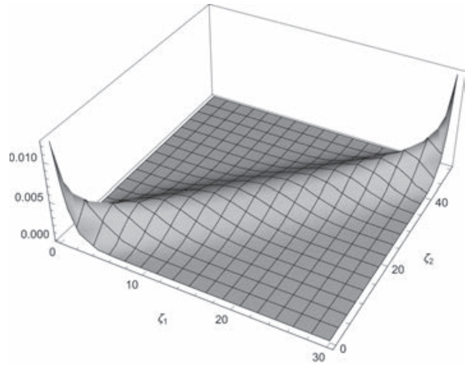
$$\iota(s_{ij})=\frac{v(\Omega)-\int_{s\in I_w}\iota(s)\,\mathrm{d}l}{\sum_{i=m+1}^{m+M}l_i}\tag{14}$$

を割り当てる配分は*Shapley*値である。

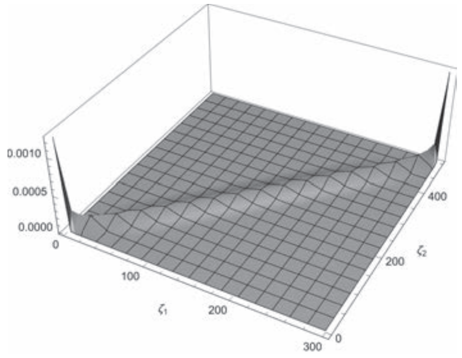
証明. $\hat{\imath}\in I_a^c$かつ$\hat{\jmath}\in J_{\hat{\imath}}$なる任意のプレイヤー$s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$を選び、$s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$を含むような任意の提携$S\ni s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$を選ぶ。提携$S$の各属性グループの人数を$n_1,\ldots,n_M$で表すものとすると、$n_{\hat{\imath}}:=\left\|S\cap S_{\hat{\imath}}^{(n)}\right\|\geq 1$である。不可欠性の仮定3により、$S\in\mathscr{O}$ならば$s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$の提携$S$に対する貢献は$v(\{s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}\})$となり、そうでなければ$v(S)-v(S\setminus\{s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}\})$である。$s_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}$の提携$S$への貢献に対する



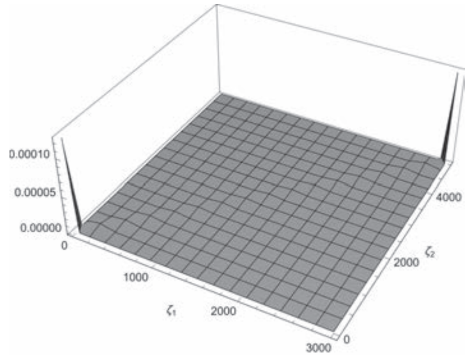
(a) $\zeta_1 = 3$, $\zeta_2 = 5$



(b) $\zeta_1 = 30$, $\zeta_2 = 50$



(c) $\zeta_1 = 300$, $\zeta_2 = 500$



(d) $\zeta_1 = 3000$, $\zeta_2 = 5000$

上の各図は(7)式の値をプロットしたものである。$\delta(x_1, x_2) \approx \Upsilon(x_1, x_2)/(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)$の値は、原点と$(x_1, x_2) = (\zeta_1, \zeta_2)$で無限大に発散し、それ以外の点では0に収束する。

図2：Υ関数の漸近的な性質

Shapleyのウェイト[*2] $\gamma_n(S)$ は

$$\begin{aligned}
&\gamma_n(S)\\
&= \frac{(\sum_{i=1}^{M} n_i - 1)!(\sum_{i=1}^{M} N_i - \sum_{i=1}^{M} n_i)!}{(\sum_{i=1}^{M} N_i)!}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{M} N_i\right)^{-1} \binom{\sum_{i=1}^{M} N_i - 1}{\sum_{i=1}^{M} n_i - 1}^{-1}
\end{aligned}$$

である。いま、一般性を失うことなく、$\hat{\imath} = 1$であるものとしよう。グループ内無名性の仮定2により、$(\|S \cap S_i\|)_{i=1}^{M} = (n_1, \ldots, n_M)$なるプロファイルを持つ任意の$S$は、同一の$\gamma(S)$と提携値を持つ。$s_{1\hat{\jmath}}$を含み$(n_1, \ldots, n_M)$なるプロファイルを持つ提携$S$を構成する組み合わせは

$$\mathscr{N}(S) := \binom{N_1 - 1}{n_1 - 1} \cdot \binom{N_2}{n_2} \cdots \binom{N_M}{n_M}$$

通りある。$\Gamma(S) := \mathscr{N}(S)\,\gamma(S)$と書くことにすると、ゲーム列中の各ゲームのShapley値は、定義により

[*2] Shapley（1953）311ページ参照。

$$\iota\big(s_{1\hat{\jmath}}\big)\,\mathrm{d}l_1 = v\big(\{s_{1\hat{\jmath}}\}\big)\sum_{S\in\mathscr{O}}\Gamma(S) + \sum_{S\notin\mathscr{O}}\Gamma(S)\left[v(S) - v\big(S\setminus\{s_{1\hat{\jmath}}\}\big)\right] \quad (15)$$

で与えられる。一方、命題7によれば、$\Gamma(S)$ は $\Gamma(S) = \Upsilon(n_1-1, n_2, \ldots, n_M; N_1-1, N_2, \ldots, N_M)$ を満たす確率質量関数である。補題8により、Υ は $n_1 = 1, n_2 = \cdots = n_M = 0$ と $n_1 = N_1, \ldots, n_M = n_M$ の近傍以外では、各点近傍の積分値が0に収束するから、$\iota\big(s_{1\hat{\jmath}}\big)\mathrm{d}l_1$ に与える影響は漸近的に消滅する。$\boldsymbol{n} = (1, 0, \ldots, 0)$ なるプロファイルを持つ S は $\mathscr{O}$ に属し、$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}$ なるプロファイルを持つ S は $\mathscr{O}^c$ に属すことから、任意の提携 $S \subseteq 2^{\Omega}$ に関して、$v(S) - v\big(S\setminus\{s_{1\hat{\jmath}}\}\big)$ が有界であるならば、(15)の極限分布は

$$\iota\big(s_{1\hat{\jmath}}\big)\,\mathrm{d}l_1 = v\big(\{s_{1\hat{\jmath}}\}\big)\int_{S\in\mathscr{O}}\delta\,\mathrm{d}l_1\cdots\mathrm{d}l_M + \int_{S\in\mathscr{O}^c}\delta\left[v(S) - v\big(S\setminus\{s_{1\hat{\jmath}}\}\big)\right]\mathrm{d}l_1\cdots\mathrm{d}l_M$$

となって命題が導かれる。

次に、$\hat{\imath} \in I_a \subseteq I_m$ の場合を考える。$\hat{\imath}$ は管理者族に属するので、他の管理者族が提携に参画済みであるとき、このプレイヤーの提携への参画を以て、初めてその提携は本質的となる。このとき、管理者族プレイヤーが提携に与える提携値の増分は、いかに非質量族の測度を小さくしたとしても非連続的である。したがって、補題8において示されたような Υ が0に各点収束する点において、当該プレイヤーが提携値に影響を与えないことは保証されない。

さて、労働者族のすべての属性グループのプレイヤー数が同時に0ではないという条件の下で、管理者族が与えられた提携に参画する仕方は、全部で $(\sum_{i=m+1}^{m+M}\zeta_i)!$ 通りある。このうち、他に提携に参画していない管理者プレイヤーがいれば、当該プレイヤーの提携への貢献は非本質的である。$\hat{\imath}$ が最後に提携に参画するような、すなわち $\hat{\imath}$ の提携への貢献が本質的となるような提携の構成方法は $(\sum_{i=m+1}^{m+M}\zeta_i - 1)!$ 通りあるので、

$$\sum_{S\in\mathscr{O}^c}\Gamma(S) = \frac{\left(\sum_{i=m+1}^{m+M}\zeta_i - 1\right)!}{\left(\sum_{i=m+1}^{m+M}\zeta_i\right)!} = \frac{1}{\sum_{i=m+1}^{m+M}\zeta_i} = \frac{\mathrm{d}l_m}{\sum_{i=m+1}^{m+M} l_i}$$

となる。ここで、$\mathrm{d}l_m$ は管理者族の測度を表し、$\hat{\imath}$ の属性グループが質量族に属するとき $\mathrm{d}l_m = 1$、そうでないときは $\mathrm{d}l_m = \mathrm{d}l$ である。上式の値は、I_a^c のプレイヤー数が異なる任意の提携について同一であるから、Shapley値が全体合理性を満たすという性質を用いると、各管理者は、労働者族への賃金支払後の残余を同じ比率で分配する。すなわち、(14)式を得る。

4　おわりに

定理9の結果によれば、管理者プレイヤーの報酬は、個別の属性グループの影響を受けない。これは、管理者族に属するプレイヤーが1人でも欠けると、提携が非本質的になるという仮定に代えて、各管理者プレイヤーそれぞれが独立した属性グループを為すものとして考察して構わないということを意味する。すなわち、すべての管理者プレイヤーが独立した属性グループに属するものと定義すれば、仮定3のうち、(a)は必要がない。ここで考察の対象としているモデルにおいては、管理者の業務の属性によって、複数の管理者をグループ化したとしても、その業務の属性によって、管理者プレイヤーの報酬には変化がない。

また、管理者族に対する報酬(14)は、管理者族と質量族との関係を考察する上で示唆的である。すなわち、管理者族が質量族に属そうとも非質量族に属そうとも、報酬がどちらかの族にすべて吸収されてしまったりして、モデルが破綻を来すようなことはない。また、モデルにおいて管理者族を構成する際に、必ずしも唯一の質量的な存在として定義する必要はないという結果は、多様な管理者からなる現実の企業を叙述する上で自由度が飛躍的に高まる。ここで得られた結果では、管理者間における報酬は、一種の平等性を保持しているが、これは不可欠性の仮定３の構成の仕方に依存している。たとえば、管理者が生産性に非連続的な影響を与えるという仮定は維持したまま、その大きさが異なるとすれば、平等性の結果は必ずしも貫徹しない。社長と主任の報酬が異なるというような現実的な性質を取り込むことは、十分可能である。

参考文献

Kannai, Yakar（1966）“Values of Games with a Continuum of Players,” *Israel Journal of Mathematics,* Vol. 4, No. 1, pp. 54–58.

Modigliani, F. and M. H. Miller（1958）“The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment,” *American Economic Review,* Vol. 48, pp. 261–297, June.

Shapley, Lloyd S.（1953）“A Value for *N*-Person Games,” in Kuhn, Harold William and Albert William Tucker eds. *Contributions to the Theory of Games,* Vol. II of Annals of Mathematics Studies, pp. 307–317, Princeton: Princeton University Press.

Stole, L. A. and J. Zwiebel（1996）“Organizational Design and Technology Choice under Intrafirm Bargaining,” *American Economic Review,* Vol. 86, No. 1, pp. 195–222, March.

Yokota, Koji（2009）“Production Theory with Convex Labor Friction,” CBC Discussion Paper 123, Otaru University of Commerce, Otaru, Japan.

横田宏治（2022）「保健衛生部門における賃金水準の妥当性について―資本コストの効率性による評価」，『明星大学経済学研究紀要』，第54巻，第１号，29–41頁，６月.