

《実践報告》

## 量分数導入における「分割量分数」活用の検討

平井 哲 鳥海武尊 北島茂樹

### ■ 要約

本研究の目的は、児童がもっている分数概念をもとに、第3学年において量分数の導入授業を構想して実践するとともに、児童の量分数についての理解を分析し、指導の有効性を検討することである。そのため、量分数指導の導入において、児童が生活経験から有していると考えられる「分割量分数」を用いて実践を行った。そして、量分数の導入において、量分数の意味理解の視点から分析した結果、児童の理解に応じて「分割量分数」を用いることで、児童が単位量を明確にしながら分数に表せるようになることが明らかになった。

### ■ キーワード

分数指導, 量分数, 分割量分数

## 1. はじめに

平成20年告示の小学校学習指導要領より、分数指導は第2学年から行われている。第6学年で分数の乗除が行われるまで5つの学年に分けて段階的なカリキュラムが編成されていることから、児童の分数の習得には困難さがあるといえる。本研究では、特に量分数の導入に焦点をあて、量分数の概念を児童に習得させるため、既習内容、生活体験を生かした効果的な指導についての実践を行う。

### (1) 研究の背景

わが国の小学校算数科で扱う分数には、分割分数、操作分数、割合分数、量分数、商分数がある(長谷川, 2000)。分割分数とは、 $1/3$ や $2/3$ のように、ものを等分割することでできた分数で、等分したものをいくつか集めてその大きさをあらわす。また、量分数とは、 $1/2\text{L}$ のように、普遍単位を用いて、単位に満たない端数の大きさをあらわす分数である。算数科における分数指導では、同一学年(第3学年)で指導されてきた分割分数と量分数について、どちらから先に指導をすべきかなど、長い間議論がなされてきた(吉田, 2001)。例えば、分割分数を先に学んだ児童が、量分数を学ぶ

際にギャップがあり、基準量が任意単位から普遍単位に移行するだけであっても、児童は抵抗を示すことが指摘されている(黒崎・圓井, 2011)。

分数を導入する学年は、平成元年改訂の学習指導要領では第3学年であったが、平成10年改訂では第4学年、平成20年改訂では第2学年となっている。導入学年の変遷を見ても分数指導の困難さが背景にあることが伺える。分数指導が第4学年から行われた平成10年告示の学習指導要領では、第4学年で分数の意味、表し方、第5学年で分数の加法・減法、第6学年で分数の乗法・除法となっており、3年間で集中的に指導をすることになっていた。そのメリットとして、進んだ児童が集中的に、次々と発展的に分数概念を形成していくことが挙げられるが、一方で、スパイラルが廃止されることで、分数概念や分数計算の仕方を理解が十分でない児童に二度と学習するチャンスが訪れないというデメリットもある(黒崎・圓井, 2011)。平成20年告示の学習指導要領では、分数指導は第2学年から第6学年まで、系統的に5学年に渡って行われるようになった。このような段階的な分数指導は平成29年告示の学習指導要領でも継承され、第2学年で「簡単な分数」として分割分数、第3学年では導入から量分数の指導を行う流れとなっている。

平成20年度全国・学力学習状況調査における「小学校 算数A」の①(6)に、「 $2 \div 3$  (商を分数で表しましょう。)」という出題がされたが、児童の正答率は73.8%であった。一方、平成22年度全国・学力学習状況調査における「小学校 算数A」の②(2)に、「 $2\ell$ のジュースを3等分すると、1つ分の量は何 $\ell$ ですか。答えを分数で書きましょう」という出題がされたが、児童の正答率は40.6%であった。また、19.7%が $1/3\ell$ と回答している。この誤答については、児童は問題文の「3等分」という表現のみに着目しており、「商が1より小さくなる等分除「(整数)  $\div$  (整数)」の場面で除法が用いられることを理解しているが、量を等分したときの1つ分の量を分数で表すことができないと考えられる」(文部科学省・国立教育政策研究所, 2010, p.152)と指摘されている。このことから、第6学年になっても分割分数と量分数が混同している児童が多いことが考えられる。

## (2) 研究の目的と方法

本研究の目的は、児童がもっている分数概念をもとに、第3学年において量分数の導入授業を構想して実践するとともに、児童の量分数についての理解を分析し、指導の有効性を検討することである。本研究の目的を達成するため、次の3点を行う。

- 先行研究や学習指導要領の変遷をもとに量分数について整理する。
- 量分数についての整理をもとに、第3学年「分数」の導入授業を構想する。
- 授業実践を行い、量分数についての意味理解の視点から分析する。

## 2. 量分数の意味理解

### (1) 量分数の意味理解に関する先行研究

児童が2mの3等分を $\frac{1}{3}$  mと答えるなど、先述の平成22年度全国・学力学習状況調査の結果に類似した指摘は、これまでもされており、量分数をどのように指導したらよいか、という問題提起がなされている(森川, 1997)。

森川(1997)は、量のように現実場面で想起しやすいものを扱うことで、四則や大小関係の意味づけはできるものの、その背後には割合があることから、生活の中から量分数の概念形成をすることが、単純にはいかないことを指摘している。また、竹上(2020)は、児童が2ℓの3等分を $\frac{1}{3}$  ℓと答えてしまう実態を解消するために、分割分数をもとに量分数をはじめて扱う第3学年の分数の導入指導に着目し、児童に等分する対象を意識させる指導を構想した。その結果、分割分数は大きさが一意に決まらないが、量分数は大きさが一意に決まる特徴を意識させる指導を通して、「 $\frac{1}{4}$ はいろいろあるけど、 $\frac{1}{4}$ mは1つしかない」(竹上, 2020, p.151)など、「 $\frac{1}{4}$ m」の意味を理解する児童の姿が見られた一方で、2mの $\frac{1}{4}$ を $\frac{1}{4}$ mと考える児童も存在し、分割分数と量分数の違いの理解が困難であることが示唆された。

一方、松下(1997)は、1970年代に端を発する「ひも問題」(2mのひもを4等分した1つを児童が「 $\frac{1}{4}$ m」と答えてしまう問題)を例に、このつまずきに対する数学教育協議会の「割合分数(あるいは分割分数)と量分数の混同」という解釈に疑問を呈し、日常生活における分数を分割分数(あるいは割合分数)ととらえ、それとは独立した別個の意味体系として量分数を教えようとすることに、意味構成のコンテキストにおける問題があると指摘している。そして、子どもの想定する日常のコンテキストと教師の設定した学校のコンテキストとのズレを意識させ、分数の複数の意味間の連続性と非連続性を理解させるような指導を提案している。また、松下(1997)は、分数の日常生活での使用と切り離された量分数の難点を指摘する中で、上垣(1996)の「分割量分数」概念に触れている。「分割量分数」とは、古代数学における分数の使用例を概観し、分数を意味する用語や記号がどのように表現されてきたのかを明らかにする中で見いだされた概念であり、「ある量に対する分割操作の結果得られた量を表現するための数」(上垣, 1996, p.14)と定義される。

また、中西・西村(2016)は、分割分数から量分数への自然な移行を実現するための指導について、操作分数、分割分数、量分数の考え方が内包されている分割量分数の働きに着目した実践を行った。その結果、小学校第3学年の分数指導で、分割分数から分割量分数(個別単位)、分割量分数(個別単位)から量分数へと移行することで、児童が量分数を受け入れることができることが明らかになった。

### (2) 小学校学習指導要領における扱い

前節で述べたように、平成29年告示の小学校学習指導要領では、分数指導は第2学年で分数の素地として分割分数から始まり、第6学年の割合を表す分数まで、学年ごとに分数の見方を広げたり深めたりしていく。分数指導の扱いについてまとめると図1のようになる。



図1 平成29年告示の小学校学習指導要領における分数指導の扱い

また、内容については学年を越えて指導が工夫できるような仕組みとなっている。例えば第4学年では同分母の分数の加法及び減法を指導する。また、同じ第4学年で簡単な場合について、大きさの等しい分数があることを指導する。 $(1/2 = 2/4 = 3/6 \dots)$ したがって、第4学年で学習したことを組み合わせれば簡単な異分母分数の加法・減法についても指導することが可能であるが、それについては第5学年での指導としている。このように指導の際には、児童の実態に応じて前学年の内容に立ち戻ったり、学習指導要領の内容を越えたりすることが可能となっている。

しかし、量分数における概念形成については、児童の主體的な活動の中で定着されていくとは言いがたい。第3学年「分数」では、導入で図2のような提示がなされている。あらかじめもとの大きさを1mと決めておいて、そのテープを第2学年のときに行ったように分割させる。その後、同じページの下部で図3のように量分数が定義されている。

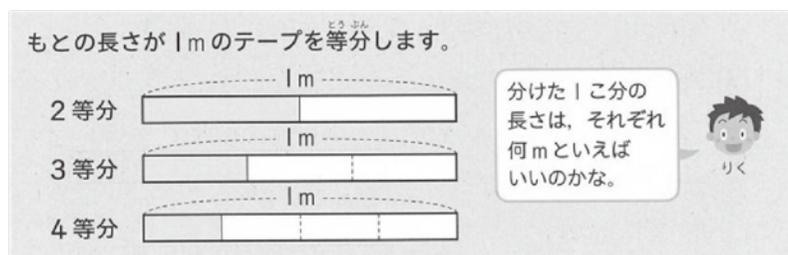


図2 小学校第3学年の教科書における分数指導の導入の問題 (藤井他, 2020, p.37)

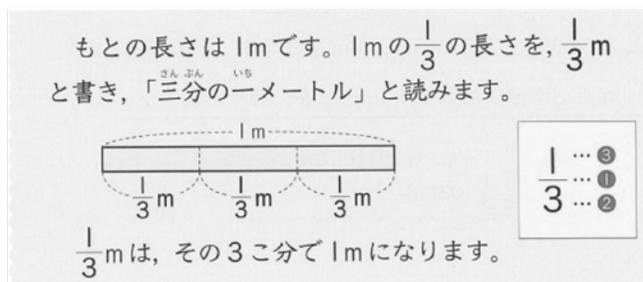


図3 小学校第3学年の教科書における量分数の定義 (藤井他, 2020, p.37)

児童は、第2学年で行った折り紙やテープなどの分割と同じように、1mのテープを分割する活動を行うが、今回は分割されたうちの1つ分を1/3ではなく「1/3 m」と表記しなければならない。もちろん、教師のほうは基準を意識させるよう「もとの1mのときにだけ単位 (m, ℓ など) を付ける」

ことを説明するが、生活の中で用いている量ではないこともあり、児童の定着が図られにくいことが考えられる。

### (3) 分割量分数

吉田(2001)は、わが国の分数概念が、分割分数や量分数、割合分数、商分数など、海外とは異なる独特の捉え方をされていることを指摘した上で、「折る」という子どもの生活経験を用いた授業において、子どもの生活的概念が概念発達の原動力になっていることや、「分割操作」を中心とした分割量分数の意味づくりをもとに、そこに暗黙的に存在する「量」を顕在化する分割量分数の意味づくりが行われることなどを見いだしている。ここで、「生活的概念は子ども自身の生活体験から非体系的に発達するものに対し、科学的概念は学校教育を通じて概念感の体系性を伴って発達する」(吉田, 2001, p.1)のものであり、数学的概念も数学に関係した科学的概念だといえる。

量分数の導入における問題点は、生活的概念としてどのようなものが素地となっているのか、分析をしていないことにあり(吉田2001)、第3学年の児童にとって、分数がどのような概念として形成されているかを考慮した上で、量分数の指導の導入が行われるべきである。また、松下(1997)は「分割量分数」について、「ある単位量を $a$ 等分したものの $b$ 個分の大きさを表す数」と定義することで、日常の分数と学校の分数のどちらにも適用でき、両者をつなぐことが可能になることを提案している。例えば、松下(1997)は、家族5人で同じくらいの大きさに分けたケーキを「1人 $1/5$ ずつ」と表したり、スーパーで売っているスイカを「 $1/4$ 切れ」と表したりすることを挙げており、日常生活で使用される分数は、そのコンテキストの中では、単なる分割分数ではなく量を表すこともできる分数である、分割量分数であると述べている。また、「分割量分数」について、普遍単位で表現されるとは限らないものの、量を表すという意味で、量分数であると述べている。そこで、本稿では「分割量分数」を、普遍単位で表される量分数の概念理解のための前段階として用いることとし、「日常生活における個別単位量(ピザ1枚、りんご1個等)を $a$ 等分したものの $b$ 個分の大きさを表す数」として扱う。そうした、生活の中にある分割量分数を授業で扱うことによって、次の効果が期待される。

- 分数に個別単位(個、枚など)を付ける分割量分数を用いることで、分数に普遍単位( $m$ 、 $l$ など)を付ける量分数についても児童が違和感なく受け入れられる。
- 物質的なイメージがわかりやすい分離量における分割量分数を用いることで、量分数と分割分数の概念の混同を避けられる。

## 3. 授業実践とその分析

### (1) 量分数の導入授業の構想

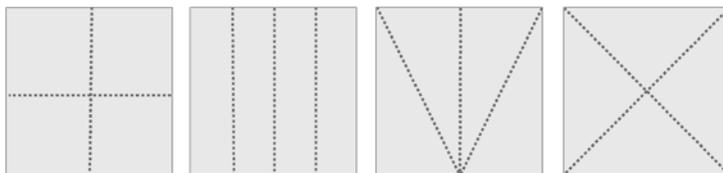
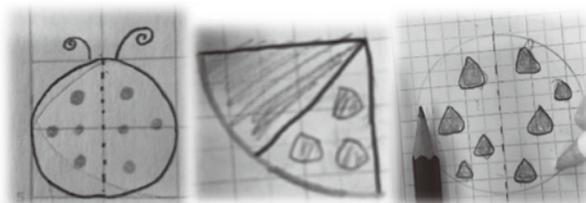
第3学年における分数指導を行う前の児童(都内私立小学校34名:集団A)に対して、分数における実態を把握するため、次の①と②の質問をした。

【① (折り紙を)折って $1/4$ にしてください。】

児童に折り紙を1枚ずつ配り、口頭で「折って $1/4$ にしてください。」と発問を行った。第2学年の内容である分割分数を理解しているか問う問題である。児童の反応は下の4つとなっていた。 $1/4$ の形は異なるが、児童は「同じ形でぴったり重なる」という共通点をもって互いに理解を図ることができた。授業の中で回りを確認し合いながら行ったこともあり、34名全員が図4にあるように、折り紙を $1/4$ にする活動を行うことができた。

【② ケーキ「 $1/2$ こ」をかきましょう。】

②については、口頭で「ケーキ『 $1/2$ 個』をかきましょう！」と教師が発問を行うとともに、黒板にも同じことを板書した。児童には一人一人、ノートに自分の考えをかかせた。児童は図5のように、まちまちのもとにするケーキ(単位量)をかき、その $1/2$ をかくことができた。円や扇形など、正確に $1/2$ となっていないものも含めると概ねかくことができている児童は26名であった。

図4 質問①に対して児童が作成した $1/4$ 図5 質問②に対して児童がかいたケーキ $1/2$ 個

2つの質問を通し、次のような実態があることが明らかになった。

- 第2学年のときに学習した分割分数については、十分に学習の定着が図られている。
- 「ケーキ $1/2$ 個」という分数の学習で行っていない分割量分数について、約8割の児童が理解し、表現することができる。

分割量分数については、第2学年までに学習した簡単な分数であれば、児童は受け入れることができることが、実態調査から明らかになった。そのため、授業の導入から用いることが可能であると判断した。その際、半具体物としてケーキや折り紙などを考えたが、一般的に形が円であることが周知されていることに加え、生活体験の中で分割したことがある児童が多いと考え、本実践ではピザを用いることにした。また、授業においては、導入で分割量分数に触れ、ある単位量(=本時ではピザ1枚分)を基準として考えることをクラス全体で共有した後に、普遍単位である量分数を授業の終末に適用問題として提示する展開とする。

(2) 量分数の導入授業

本実践は、実態調査を行った同じ学校の集団 B(35名)で行うこととした。集団 Bは、質問を行った集団 A(34名)とは、第2学年から第3学年に上がるときにクラス替えがあった同学年のクラスである。第2学年までの分数指導は、集団 A とそれぞれ同じクラスにおいて指導が行われていたことから、児童の実態に著しい違いはないと考える。

・本時の目標

任意単位及び普遍単位の量の大きさを表す分数(分割量分数及び量分数)について理解する。

・授業の実際

(紙をめくりながら)

何まいですか？

T: 何枚ですか？

C1: 1まい!

T: みんなの声が合いましたね。

では、次の問題です。

(紙をめくりながら)

何まいですか？

C2: また「まい」だ!

T: そうですね。

C3: 半分?

C4: でも「まい」だから…

C5:  $1/2$  まいだ。

T:  $1/2$  枚ってどういうことかな。

C6: 1まいを2こに分けたうちの1つ分。

T: なるほど。分数で表せるのですね。

では、次です。

(紙をめくりながら)

何まいですか？

C7: まだだ!

C8:  $1/4$  まい!

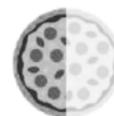
T:  $1/4$  枚というのは…

C9: 1まいを4こに分けたうちの1つ分!

(紙をめくりながら)

何まいですか？

C10: ずっと同じだ!



C11: …

C12:  $1/4$  まい?

C13:  $1/2$  まい?

C14: ある部分だけを見ればいいんだよ!

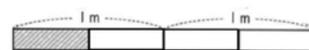
C15: そうか! だったら  $1/2$  まいだ!

C16: ない部分にだまされちゃった。

T: なるほど。(左側のピザを隠しながら) こちらの1つだけを見ると  $1/2$  枚とわかるのですね。

(紙をめくりながら)

何mですか？



C17: メートルになった!

T: これは何mですか?

C18:  $1/2$ mだ!

T: どうしてそう思うのですか?

C19: ピザで考えればいいよ。

C20: (右の1m)かいてないよ。

C21: 1mを2つに分けたうちの1つ分だ!

T: 1mを2つに分けたうちの1つ分を  $1/2$ m というのですね。

T: □の中には今度はどんな単位が入りそうですか?

C22: リットル!

C23: 本!

C24: グラム!

C25: さつ!

(3) 分割量分数の視点による分析

ピザの半分、分割量分数でいうところの1/2枚を提示した際、C3の「半分」については予想していた児童の反応であったが、児童間で「まい」という単位を意識するような声掛けが出てきたおかげで児童に混乱は見られなかった。また、当該小学校が採択している教科書では、第3学年の小数の指導は分数指導のあとにカリキュラムが組まれている。このことから、0.5枚という反応が出なかったことも、1/2枚という考え方がスムーズに児童に浸透した要因であると考えられる。

児童のズレを生み出すことが考えられたC12とC13の発言は、授業のポイントとなった。児童の反応では、「1/2枚」と「1/4枚」がほぼ同数であった。ここでC6、C9の発言が生かされることとなった。C13からC14の発言の間に、「2枚を4つに分けた？」や「あのピザ、必要ないのではないか」など、様々なつぶやきを行う児童が多くいた。これらの発言とまではいえないつぶやきが、他の児童の考えを深めたり広げたりしてC14の発想につながったと考えられる。C17では、発問を「まい」から「m」と変更したが、児童の中でこの単位の変化に戸惑いは見られなかった。スムーズに単位をmに変えて問題に取り組むことができた。さらに、C19、C20、C21の発言については、導入で分割量分数を扱ったことが活用されたと考えられる。

(4) 量分数の定着における成果

集団Bにおいて、単元の第5時間目に図6の問題を提示した。まず、児童は⊕の問題に着目し、「ピザのときに、ないところは隠して考えてもいいと思ったから、今回も左から1mまでの部分だけを考えると4/6mとなる」という発言によってクラスを理解を深めた。まさに第1時間目において、児童の意見が「1/2枚」と「1/4枚」と分かれた際、図7の図について行った検討が成果として現れた。

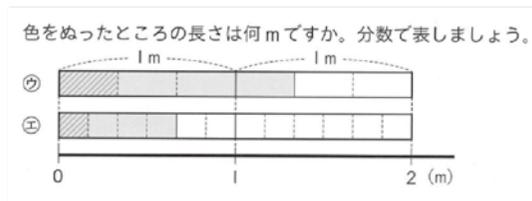


図6 量分数の意味理解の定着を図る問題（藤井他、2020、p.44）

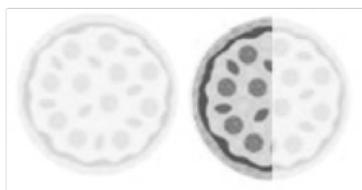


図7 分割量分数によるピザ1/2枚

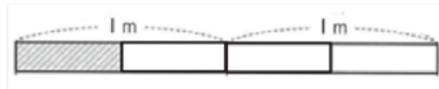


図8 量分数による $1/2m$

また、第6時間目では、1より大きい分数として、図9を提示した。第3学年では仮分数・帯分数については触れないので、図9については「 $1/4m$ が5つ分」という考え方をする。児童の理解にばらつきが出たため、立ち止まって児童の表現をもとに $1/4m$ を図示させて共有を図った。その後、教師のほうから「ピザで考えると何枚分ということが出来るかな。」と発問を行うと、ひらめいたように児童がピザ2枚を黒板にかいた。そこから何人かの児童につないでいき、図10のようにそれぞれを4等分したピザができあがった。分割量分数を活用するように促したのは教師であったが、 $5/4m$ のような1以上の量分数を指導する際にも、分割量分数を用いることができることが分かった。

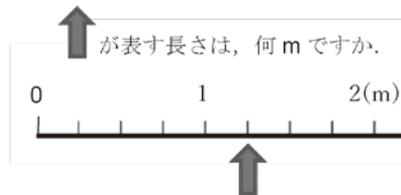


図9 1を超える量分数の問題

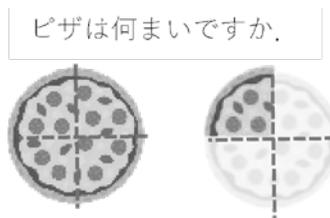


図10 1を超える分割量分数の問題

単元の学習が終了した後で図11のような問題に取り組ませた。この問題では、分割分数と量分数の概念について混同していないかどうかを問うている。この問題については、全国平均を79%と見込んで問題が作成してあると記載されているが、集団Bの平均正答率は88.6%であった。答案返却の際、想定される全国平均を1割程度上回ったことについて伝えると児童からは「ピザの考え方」という発言があり、クラスの中でもその児童の発言が分割量分数のことであると共有できた。第1時間目において扱った分割量分数(図7)から量分数(図8)の流れが、児童の量分数の定着を図るきっかけになったと考えられる。さらに第5時間目の図6を解く際、第1時間目の分割量分数についての振り返りを行ったことも理解を定着させる手だてになったのと考えられる。

色をぬったところの長さが $5/6$ mになっているテープは、**あ**、**い**のどちらですか。

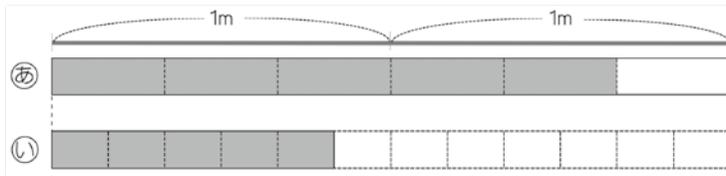


図11 5/6mのテープを選ぶ問題

#### 4. 考 察

分割量分数を第3学年において分数指導の際に用いることにより、量分数を、普遍単位の量の大きさを表す分数として概念理解させる成果があった。一方で、量分数導入の際に分割量分数を用いる場合、分割量分数は分数概念として普遍的とは考えにくいいため、扱いには次の点で留意する必要がある。

- 分離量で表す個体（ピザやケーキなど）について分割量分数を用いる際には、単分量（ピザ1枚や、ケーキ1ホールなど）を図示したり具体物を確認したりしながら、その集団の中である程度共通した量をイメージさせる。
- 分割量分数は単元導入の第1時間目のみで用いるのではなく、量分数の指導に入ってからでも考え方の根拠として活用できる場面を表1のように設定する。

表1 第3学年「分数」単元計画の例

小単元	ねらい	分割量分数の活用
分数の表し方	量分数について理解する。	○
	量分数の表し方を理解する。	
	分母と分子が表す大きさについて理解を深める。	
	単位分数をもとにした分数の大きさを理解する。	
	同分母の分数の大小について理解する。	○
	1より大きい分数があることを理解する。	○
分数のたし算ひき算	簡単な分数の加法の計算の仕方を理解する。	
	簡単な分数の減法の計算の仕方を理解する。	
まとめ	学習内容の理解を確認し、確実に身に付ける。	

○は本実践における扱い

分割量分数の概念については学年が上がるにつれて分数を量ではなく数として捉えていくうちに統合されていくと考える。そのため、分割量分数は、あくまで量分数の概念形成を補完するものとして捉えたい。例えば、単元の後半で行う同分母分数の簡単な加減においては、分離量における分割量分数の考え方は適さない。それは、児童の中で単分量のイメージが判然としないため、計算において図をもとに考えることに限界があるためである。したがって、表1のように分割量分数を積極的に扱うのは本単元の簡単な同分母分数の加減より前の時間までが適切であると考えられる。

## 5. おわりに

本研究では、第3学年の量分数指導において、第2学年での既習事項の分割分数だけでなく、児童がもっている分数概念をもとに、分割量分数を用いて導入授業を実践した。量分数の概念形成にとって分割量分数が有効であったことについては、分割量分数を、第1時間目で扱った後に、量分数の意味理解を図る場面や1を超える量分数について考える場面においても活用できたことが理由として考えられる。一方で、単元の後半からは量分数の加減が始まるように、分数を量ではなく数として捉えていく必要が出てくる。分数指導において、量から数へつなげる手段については、今後の課題と考えられる。

低学年で行われる算数は、多くの内容が児童の生活に即した内容となっている。それが、学年が上がるにつれ、算数が児童の生活から離れていってしまうことは否めない。そこで、分割量分数のように児童の生活と親和性の高いと考えられる手段を用いることによって、理解する上での支えになると考える。算数は、他教科に比べ特に系統性が強い教科であるため、各単元の指導では児童の実態に応じて前単元までに学習した内容に立ち戻ることも厭わない指導をしていくことが肝要である。また、実態によっては学習指導要領を超えた内容について、現学年の内容を活用しながら取り組ませることもできる。児童の実態に合わせた教師の柔軟な指導が期待される。

## 引用・参考文献

- 長谷川順一 (2000). 分数. 中原忠男編, 算数・数学科 重要用語300の基礎知識 (p.204). 明治図書出版.
- 藤井齊亮他 (2020). 新しい算数2下. 東京書籍.
- 黒崎東洋郎・圓井大介 (2011). 量としての分数から数としての分数への移行を図る分数指導の研究. 岡山大学教師教育開発センター紀要, 1, 37-46. <https://doi.org/10.18926/CTED/44375>
- 松下佳代 (1997). 意味構成のコンテクスト: 分数指導の再検討. 京都大学教育学部紀要, 43, 93-116.
- 文部省 (1998). 小学校学習指導要領. [https://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/cs/1319941.htm](https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/cs/1319941.htm) (2021.12.25参照)
- 文部科学省 (2008). 小学校学習指導要領. [https://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/syo/index.htm](https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/syo/index.htm) (2021.12.25参照)
- 文部科学省 (2017). 小学校学習指導要領解説 算数編. [https://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2019/03/18/1387017\\_004.pdf](https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2019/03/18/1387017_004.pdf) (2021.12.25参照)
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2008). 平成20年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書. [https://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukoku/02shou\\_chousakekka\\_houkokusho.htm](https://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukoku/02shou_chousakekka_houkokusho.htm) (2021.12.25参照)
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2010). 平成22年度 全国学力・学習状況調査【小学校】報告書. <https://www.nier.go.jp/10chousakekkahoukoku/02shou.htm> (2021.12.25参照)
- 森川幾太郎 (1976). 分数における子供の認識. 数学教育学会誌, 17(3・4), 46-62. [https://doi.org/10.34323/mesj.17.3-4\\_46](https://doi.org/10.34323/mesj.17.3-4_46)
- 中西正治・西村徳寿 (2016). 分割分数から量分数への指導に関する一考察. 数学教育研究, 45, 11-24.
- 竹上晋平 (2020). 分数の導入指導に関する研究: 分割分数と量分数との関係を考慮して. 学芸大数学教育研究, 32, 149-152.
- 上垣渉 (1996). 分数の起源に関する史的考察. 三重大学教育学部研究紀要, 47, 1-7.
- 吉田香織 (2001). 分数の生活的概念と教室における分数の意味づくり: Vygotsky 理論の視座から. 日本教科教育学会誌, 24(2), 1-10. [https://doi.org/10.18993/jcridajp.24.2\\_1](https://doi.org/10.18993/jcridajp.24.2_1)