

# 超複素数による曲線の数理量記述の覚書

## A memorandum on numerical quantities of the curve by the hyper complex number

川原万人

KAWAHARA, Takahito

### 要旨

自動車の意匠設計で利用される滑らかな曲線の連続性を評価するための曲線の数理量について検討した結果を記すことが本稿の目的である。はじめに平面曲線の曲率が単位長さ当たりの接線の方向の変化であることから、平面曲線を複素数で記述し曲率を導出する。つぎに曲率の逆数に曲率半径以外の解釈である曲率弧長を提示し、その変化率は角度を基準とすることが自然であること示す。つづいて空間曲線の曲率と捩率がやはり単位長さ当たりの接線や接触平面の法線の方向の変化であることから、四元数で曲線を記述し曲率、捩率を導出する。最後に空間曲線の捩率と曲率を実部と虚部とする複素数を導入し、平面曲線の曲率と曲率半径の関係に等しい接常螺旋に関する方程式を提示する。

### 1. はじめに

現代の自動車の意匠設計では、全体として滑らかな立体表面を複数の曲面の繋ぎ合わせによりコンピュータ上で構築し、数理モデルとして定義することが求められている。この滑らかさの確保には、設定された誤差の範囲で、複数の曲面の繋ぎ合わせ部分において少なくとも法線方向とガウス曲率および平均曲率の一致が必要である。そのような個々の曲面の形成に必要なのは、曲面の1断面となる2曲線の滑らかな接続である。本稿では、この曲線の滑らかな接続に関しての重要な指標である曲線の曲率と曲率半径の定義を改めて検討し、意匠設計で重要視される角度の変化とこの二つの指標の関係を図形的に記述する方法を考案しようとした研究の現時点における結果を記す。

ところで本論では、式の可読性を良くすることを目論んで、表記や関数の使い方について、参考文献の“いいとこどり”をした。ここでそれらを示しておく。まず、曲線は平面曲線、空間曲線共に曲線の弧長  $s$  をパラメータとする関数  $c$  で表す。平面曲線はガウス平面で捉えることとする。したがって、平面曲線  $c$  はその弧長  $s$  を変数とする関数  $x$  と  $y$  で次のように書き下す。

$$c = x + i y \quad (\text{i})$$

空間曲線は純虚四元数空間で捉えることとする。空間曲線  $c$  はその弧長  $s$  を変数とする関数  $x$  と  $y$ 、 $z$  で次のように書き下す。

$$c = i x + j y + k z \quad (\text{ii})$$

$s$  による微分はプライム記号で表す。たとえば、平面曲線  $c$  の1階微分は次のようである。

$$c' = x' + i y' \quad (\text{iii})$$

$s$  から少し離れた値  $s+\Delta s$  を変数とする関数  $c$  の値を、 $s$  のときの  $c$  の値と区別するために  $c_{+\Delta s}$  と記述する。これにより例えば、 $s$  と  $s+\Delta s$  の区間の  $c$  の平均変化率は次のように書く。

$$\frac{c_{+\Delta s} - c}{\Delta s} \quad (\text{iv})$$

1文字で表される複素数の共役数は、その文字と文字右側上付きのアスタリスクで表す。

$$cc^* = (x + i y)(x - i y) \quad (\text{v})$$

1文字で表される四元数の共役数も同様とする。

複素数の自然対数はある方向を示す角度を求める際に使うことから、偏角については0以上  $2\pi$  未満の範囲で主値だけを考えることにする。また、四元数の対数の計算では、実軸と純虚四元数により定まる平面をガウス平面として考えるので、実質的に複素数の対数の計算と同じである。つまり四元数の対数についても偏角については前記と同様の範囲で主値だけを考える。

四元数どうしの掛け算と割り算は2数の順序により結果が異なるが、本稿では、注目する値に対して右から掛け算または割り算を行うことにする。その順序を明確化するため、四元数の割り算やその結果としての分数にはスラッシュ記号を使い、実数の割り算や分数には通常の分数記号を使う。あわせて、四元数の分数の分母の実数化では、分子分母ともに共役四元数を右から掛けることにする。

## 2. 平面曲線の曲率

平面曲線のある点における曲率とは、その点における曲がり方を維持した場合、その点における接線の方が弧長当たり弧度法による角度でどれだけ変化するかを示したものである。したがって、単純には曲率  $\kappa$  は  $c$  の接線の方角を定める偏角  $\theta$  を  $s$  で微分すれば求まる。つまり、

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds} \Im \ln c' = \Im \frac{c''}{c'} = x'y'' - x''y' \quad (1)$$

である。(1)の途中式で明らかのように計算上は  $c''$  を  $c'$  の偏角分  $c'$  が実軸と一致するように回転する。また、 $c''$  と  $c'$  は、

$$|c'| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1 \quad (2)$$

から、

$$x'x'' + y'y'' = 0 \quad (3)$$

より直交する。つまりこの回転により、 $c''$  を虚軸に一致させたのであるから、 $\kappa$  の絶対値は、 $c''$  の絶対値に等しい。

一方で、接線の角度の変化という観点からは、つぎの式でも  $\kappa$  は表せる。

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \frac{\ln c'_{+\Delta s} - \ln c'}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln \left( \frac{c'_{+\Delta s}}{c'} \right)^{\frac{1}{\Delta s}} \quad (4)$$

これは、(2)を用いて

$$\begin{aligned} \left( \frac{c'_{+\Delta s}}{c'} \right)^{\frac{1}{\Delta s}} &= (x'_{+\Delta s}x' + y'_{+\Delta s}y' + i(x'y'_{+\Delta s} - x'_{+\Delta s}y'))^{\frac{1}{\Delta s}} \\ &= \left( \left( \frac{x'_{+\Delta s}x' - x'^2 + y'_{+\Delta s}y' - y'^2 + 1}{\Delta s} \right) \Delta s + i \left( \frac{x'y'_{+\Delta s} - x'y' + x'y' - x'_{+\Delta s}y'}{\Delta s} \right) \Delta s \right)^{\frac{1}{\Delta s}} \quad (5) \end{aligned}$$

とすることで、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln \left( \frac{c'_{+\Delta s}}{c'} \right)^{\frac{1}{\Delta s}} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln ((x'x'' + y'y'')\Delta s + 1 + i(x'y'' - x''y')\Delta s)^{\frac{1}{\Delta s}} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln (1 + i(x'y'' - x''y')\Delta s)^{\frac{1}{\Delta s}} = x'y'' - x''y' \quad (6) \end{aligned}$$

が得られ、当然のことながら、(1)と同じ結果を得る。

ところで、(4)は接線の方向がある点の近傍で1回転するような曲線では対数の性質により適用できない。具体的には曲率の大きさが  $2\pi$  以上となる曲線では曲率が求められない。しかし、式が計算できるとして変形した結果では、どのような曲線でも曲率が定まる。このことから、接線の方向の変化が  $\pm 2\pi$  を超えても決定可能な関数が必要である。しかし、本稿ではこの点の指摘のみに留めておく。

### 3. 平面曲線の曲率半径

曲率の逆数は曲率半径であることは周知のとおりである。曲率半径を  $\rho$  とすると、

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\theta} \quad (7)$$

である。 $\rho$  の値の図化では、曲線のある点における接触円が用いられる。または、曲線の法線を曲線が曲がる方向にその大きさの分だけ伸ばした直線が用いられる。しかし、(7)の右辺を見れば、曲率の逆数は1radあたりの弧長であるとした方が直接的である。この解釈に拠るとき、曲率の逆数を曲率弧長と呼ぶことにする。曲率弧長は離散的に考えると、曲面評価におけるゼブラパターンの投影と同様の評価を、曲線に対して行うことができる。

曲率弧長の変化率は  $s$  で微分して得るのではなく、角度である  $\theta$  で微分して得ることが自然である。これは、

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \rho' \quad (8)$$

となり、接線の方向に関わる角度に応じた曲率弧長の変化率は、曲率弧長の大きさに影響されることが分かる。単純には、弧長に応じた曲率の変化率の変化に比べると、曲率弧長の大きいところ、言い換えれば直線に近い部分では曲率弧長の変化が強調され、丸みの強い部分は変化が軽減される。つまり、曲線を拡大すると曲率の弧長の変化が強調され、縮小すると変化が穏やかになる。曲率弧長の変化率は曲線の拡大縮小の影響を示す指標となることが予想される。

### 4. 空間曲線の曲率と振率

空間曲線においては、その接線の方向を示す平面曲線の偏角のような角度は定義できない。しかし、近傍の2点における接線は求まるから、その2接線の成す角の極限值として曲率を導くことができる。ここで、二つの純虚四元数がしめす2方向の間の角度は、一方を他方で割った値の自然対数の虚部で示されるから、 $c'_{+\Delta s}$  と  $c'$  が成す角の  $\Delta s$  が0に限りなく近づく際の極限值を考えると、

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \frac{\ln(c'_{+\Delta s} / c')}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln(c'_{+\Delta s} / c')^{\frac{1}{\Delta s}} \quad (9)$$

である。平面曲線の曲率の計算と同様の計算により、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln(c'_{+\Delta s} / c')^{\frac{1}{\Delta s}} \\ = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln(1 + (i(y'z'' - y''z') + j(z'x'' - z''x') + k(x'y'' - x''y'))\Delta s)^{\frac{1}{\Delta s}} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで  $q_\kappa$  を、

$$q_\kappa = i(y'z'' - y''z') + j(z'x'' - z''x') + k(x'y'' - x''y') \quad (11)$$

とおくと、四元数空間の実軸と  $q_\kappa$  が成すガウス平面を定義でき、その虚数単位を  $\iota$  とすると、(10)の右辺は、

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln(1 + \iota |q_\kappa| \Delta s)^{\frac{1}{\Delta s}} = |q_\kappa| \quad (12)$$

となる。つまり空間曲線の曲率  $\kappa$  は、

$$\begin{aligned} \kappa = |q_\kappa| &= \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2} \\ &= |c'' / c'| = |c'' c'^*| = |c''| |c'^*| \end{aligned} \quad (13)$$

である。この値も  $c''$  の大きさに等しいことは明らかである。

同様に、捩率を求めよう。 $c'$  と  $c''$  により定まる平面の、大きさ1の法線を  $n$  とすると、

$$n = \frac{c' c''}{\kappa} \quad (14)$$

である。捩率  $\tau$  は曲率と同様に、

$$\tau = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \frac{\ln(n_{+\Delta s} / n)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Im \ln(n_{+\Delta s} / n)^{\frac{1}{\Delta s}} = |n' / n| \quad (15)$$

で求められる。ここで、

$$\begin{aligned} u &= (y'z'' - y''z') \\ v &= (z'x'' - z''x') \\ w &= (x'y'' - x''y') \end{aligned} \quad (16)$$

とすると、

$$u'^2 + v'^2 + w'^2 = \kappa^2, \quad u'u'' + v'v'' + w'w'' = \kappa\kappa' \quad (17)$$

となり、

$$|n'/n| = \left| \frac{1}{\kappa^2} (i(vw' - v'w) + j(wu' - w'u) + k(uv' - u'v)) \right| \quad (18)$$

であるので、さらに整理することで、

$$\tau = |n'/n| = |\Re c''' / c'' / c'| = \frac{1}{\kappa^2} \left| \det \begin{pmatrix} x''' & x'' & x' \\ y''' & y'' & y' \\ z''' & z'' & z' \end{pmatrix} \right| \quad (19)$$

となる。 $x$ 、 $y$ 、 $z$ による四元数的な書き下しは、記述が煩雑になるので、ここではあえて行列式を使った。

## 5. 曲率と捩率による接常螺旋の定義

平面曲線の曲率の逆数からは、前述の通りある点における接円を描くことができるが、これはある点における曲線の曲がり方である曲率がいたるところで等しい曲線を示していることに他ならない。空間曲線では、曲線の曲がり方に曲率と捩率があるのだから、平面曲線の接円と同様の曲線を考えるならば、曲率と捩率が一定の曲線を描くことが自然である。いたるところ曲率と捩率が一定の曲線は常螺旋である。そこで、空間曲線の接常螺旋を定義することにしよう。

半径  $r$  の円柱の表面に巻き付く、円柱周りの回転  $1\text{rad}$  毎の母線に平行な方向の変位（ピッチ）が  $p$  である常螺旋の曲率と捩率は次のとおりである。

$$\frac{r}{p^2 + r^2}, \quad \frac{p}{p^2 + r^2} \quad (20)$$

この常螺旋が  $c$  の曲率  $\kappa$ 、捩率  $\tau$  の点で曲線に接するとき、次の条件を満たす。

$$\kappa = \frac{r}{p^2 + r^2} \quad , \quad \tau = \frac{p}{p^2 + r^2} \quad (21)$$

つまり、 $r$  と  $p$  は次のように表される。

$$r = \frac{\kappa}{\tau^2 + \kappa^2} \quad , \quad p = \frac{\tau}{\tau^2 + \kappa^2} \quad (22)$$

結果、接常螺旋を定める円柱とピッチが  $\kappa$  と  $\tau$  で定まる。この円柱は接円柱と呼ぶことにしよう。

ここで、複素数

$$\tau - i\kappa \quad (23)$$

を導入すると、その逆数は、

$$\frac{1}{\tau - i\kappa} = \frac{\tau + i\kappa}{\tau^2 + \kappa^2} = p + i r \quad (24)$$

となり、接常螺旋の決定に必要な二つの実数が得られ、またその大きさは、

$$|p + i r| = \sqrt{p^2 + r^2} \quad (25)$$

であるから、円柱の母線が 1rad 分移動してできる表面に巻き付いた接常螺旋の曲線長に等しい。つまり、(24)は平面曲線の曲率と曲率弧長の関係を空間曲線に適用した方程式である。この方程式では捩率が 0 のとき、平面曲線における曲率と曲率弧長の関係も満たす。

## 6. おわりに

平面曲線については、曲線を複素数で記述することから始めて、曲率を導出する過程を示した。また、曲率の逆数は曲率半径としてのみではなく、1rad あたりの弧長とみなせることを示した。さらに、この弧長の変化率が曲線の拡大縮小の影響を数量化できる可能性を示した。このことは、三角法や一角法による図面であっても、意匠設計においては原寸図と縮尺図では形状の印象が異なって見えることの物理的な証明につながる可能性がある。

空間曲線についても、曲線を純虚四元数で記述し曲率と捩率を導出する過程を示した。また、曲率と捩率を虚部と実部に持つ複素数を導入することにより平面曲線における曲率と曲率弧長の関係に相当する接螺旋の方程式を示した。しかし、平面曲線の曲率弧長の変化率として提示したものに相当する変化率は示せてはいない。これは、曲率と捩率を虚部と実部に

持つ複素数の意義が理解できていないためである。そもそもは直交する二方向の角度の変位を示す、この角度に係る複素数については、引き続き検討を行う予定である。

あわせて、デザインに関わる実用的な課題として、CADで空間曲線の特徴を示す際に接常螺旋を用いることを検討する予定である。

## 参考文献

- [1] 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何，裳華房．（1991）
- [2] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников：超複素数入門（浅野洋[監訳]，笠原久弘[訳]），森北出版．（1999） - Гиперкомплексные Числа, Издательство. (1973)
- [3] 井上正雄：微積分ハンドブック，聖文社．（1995）
- [4] John H. Conway, Derek A. Smith：四元数と八元数（山田修司[訳]），培風館．（2008） - On Quaternions and Octonions, A K PETERS, LTD.. (2003)
- [5] 堀源一郎：ハミルトンと四元数，海鳴社．（2007）
- [6] Dmitry Fuchs, Serge Tabachnikov：メビウスの作った曲面（蟹江幸博[訳]），岩波書店．（2012） - MATHEMATICAL OMNIBUS, American Mathematical Society. (2007)
- [7] George A. Jennings：幾何再入門（伊里正夫・伊里由美[訳]），岩波書店．（1996） - MODERN GEOMETRY WITH APPLICATIONS, Springer. (1994)
- [8] 中内伸光：じっくり学ぶ曲線と曲面，共立出版．（2008）
- [9] 飽本一裕：今日から使える複素関数，講談社．（2008）
- [10] 宮岡礼子：曲がった空間の幾何学，講談社．（2017）