

2つの独立な係数を持つロジスティック写像

Logistic map with two independent coefficients

土屋 尚 矢吹道郎
TSUCHIYA, Takashi Michiro, Yabuki
明星大学名誉教授 明星大学情報学部

要旨

2つの独立な係数を持つロジスティック写像をとりあげる。この系が広く知られた1係数のロジスティック写像と位相同型であることを証明することにより、系の力学的性質を決める分岐パラメータは系の1次の項の係数のみであり、2次の項の係数にはよらないという直感に反する結果を提示する。2係数の写像の吸引圏は1係数のそれとは違い、より単純である。

1 序論

著者の1人(土屋)は別の共同研究者と共にロジスティック写像の状態変数が有限にとどまる全領域、すなわち可変パラメータを r としたとき $-2 \leq r \leq 4$ の範囲の分岐図(図2に再現されている)を提示した[1]。そしてそこに現れる2つのbranches、つまり1つは $1 \leq r \leq 4$ で見られるよく知られた分岐図、もう一方は $-2 \leq r < 1$ に現れる分岐図、の同値性を主張した。そこでの方法は発見的に見い出された変数変換を用いるものであった、後に位相同型という概念を用いてそれら2つのbranchesの同値性を示す論文を発表した[2]。本稿では2つの独立な可変パラメータ b と a を持つ写像

$$x_{n+1} = bx_n - ax_n^2 \quad (1)$$

を考える。よく知られたロジスティック写像を2つのパラメータで記述する系に拡張したにすぎない。実際、次節で示されるように写像(1)は1パラメータのロジスティック写像

$$x_{n+1} = rx_n - rx_n^2 \quad (2)$$

と同型である。写像(1)の右辺の $a > 0, b > 1$ に対するグラフは図1のようである。写像(1)と(2)は同型なのであるから、直感的に予想することは、パラメータ b を動かしても、パラメータ a を変化させても本質的に図2*1に再現されているロジスティック写像(2)の分岐図と同型の分岐図が得られるであろうということである。ところが、実際には図2に対応する分岐図を生ずる写像(1)の分岐パラメータは b のみであり、 a ではないのである。この直感に反する結果は次節において厳密に証明されるが、次のような簡単な考察により十分に納得することができよう。

写像(1)の固定点 x^* (1周期点と呼んでもよい)のひとつは図1からも明らかなように

$$x^* = \frac{b-1}{a} \quad (3)$$

である。この1周期状態が安定なのは、この点における写像のグラフの傾きの絶対値が1より小さいとき、すなわち

$$|b - 2ax^*| < 1 \quad (4)$$

であり、1を越えれば不安定となり1周期状態は実現しなくなる。不等式(4)に(3)にを代入すれば明らかなように

$$1 < b < 3 \quad (5)$$

となり、なるほど a にはよらず b のみで決まる。もうひとつの固定点0に対しても同様に

$$-1 < b < 1 \quad (6)$$

*1 ここには分岐図だけでなく、状態変数 x_n が有限にとどまるいわゆる吸引圏(BA)も同時に描かれている。BAについては第3節で議論される。

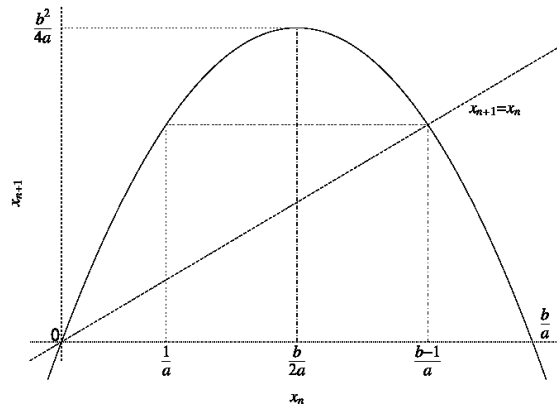


図1 写像(1)の右辺の $a > 0, b > 1$ に対するグラフ

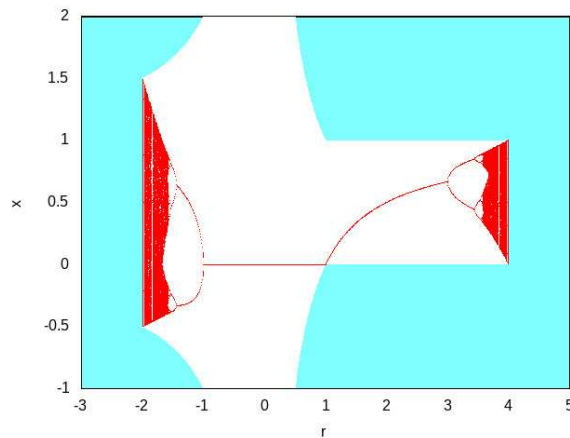


図2 1つのパラメータ r によって規定されるロジスティック写像(2)の分岐図と吸引圏(白く残された領域)

となる。力学系として最も重要な概念である固定点が現れるか現れないかを定めるパラメータが、(1)では a ではなく b であることがわかった訳であるから、上にのべた直感に反する結果も充分予想されることとなったであろう。

次節において、(1)と(2)が同型となる条件を、位相同型性 (topological conjugacy) という概念を使い厳密に求める。第3節では(1)の状態変数 x_n が有限におさまる領域、すなわち吸引圏 (basin of attraction(BA)) を係数 b 及び a の関数としてそれぞれ求め図示もする。

次節では(1)の分岐図も示すが、それはもちろん(2)と(1)とが同型であることを示唆するのに充分なだけ似かよっている。しかし、 b の関数として表される吸引圏は(2)の場合と違い発散を伴わないごく単純な図形となる。

写像(1)が自然に現れる生態学的な応用例についての議論を最終節で行う。

2 同型性

写像(1)と(2)が同型となる条件及びその変換関数を具体的に求める。ロジスティック写像(2)と同型となる2次写像については Gulick の教科書 [3] に詳しく論じられていて、今の我々の結果も彼の公式を使うことでも得られるのであるが、ここでは(2)と(1)に特化してあらためて計算をしておし、(2)の r に対応する(1)の分岐パラメータは b のみであり、 a ではないことを示すことにする。同型性とはどういう要請を満たすことをいうのかをより明確に示すためである。

同じ1次元空間における2つの関数

$$f(x) = bx - ax^2 \tag{7}$$

$$g(x) = rx - rx^2 \quad (8)$$

の間の位相同型関係を論ずる。位相同型変換関数 $h(x)$ はアフィン型^{*2}

$$h(x) = \alpha x + \beta \quad (9)$$

を仮定する。位相同型となる条件は

$$h(f(x)) = g(h(x)) \quad (10)$$

と表される。すなわち、関数 f と g が位相同型であるとは、 x の関数 f を h で変換した結果が、 x の関数 h を変数とした関数 g の結果と一致することであるという主張である。

式 (7)、(8)、(9) を (10) に代入すれば

$$\alpha f(x) + \beta = rh(x) - r(h(x))^2 \quad (11)$$

という関係式が得られ、これが任意の x に対して成り立つためには

$$\alpha(b - r + 2r\beta) = 0 \quad (12)$$

$$\alpha(a - r\alpha) = 0 \quad (13)$$

$$\beta(1 - r + r\beta) = 0 \quad (14)$$

という関係がなければならない。変換 $h(x)$ はアフィンを仮定したがより簡単な線形であってもよい。しかし α が 0 であっては定数となって変換の意味はなくなるため、 $\alpha \neq 0$ でなければならない。よって、(13) より

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad (15)$$

となる。式 (14) からは 2 つの場合すなわち

$$\beta = 0 \quad (16)$$

と

$$\beta = \frac{r-1}{r} \quad (17)$$

が生じるが、(16) を (12) に代入することにより

$$r = b \quad (18)$$

となる。これを (15) に使うことで

$$h(x) = \frac{a}{b}x \quad (19)$$

という線形変換が得られる。式 (17) の場合は、これを (12) に代入することで

$$r = 2 - b \quad (20)$$

となり、さらに (15) より

$$\alpha = \frac{a}{2-b} \quad (21)$$

となる。式 (20) を (17) に使えば

$$\beta = \frac{1-b}{2-b} \quad (22)$$

であるから、結局アフィン変換としては

$$r = 2 - b$$

^{*2} アフィン型関数 (9) を線形変換と呼ぶ場合も多いが、ここでは (9) と線形変換 (例えば (19)) を区別することが必要なので、(9) の形をアフィンと呼び、定数項 β のない形を線形と呼ぶことにする。

$$h(x) = \frac{a}{2-b}x + \frac{1-b}{2-b} \quad (23)$$

となることがわかる。いずれの場合も (2) での分岐パラメータ r に対応するパラメータは b および b の関数 $(2-b)$ であり a には依存しないことが示された。

実際に分岐図を描いてみる。式 (1) で $a = 5.0$ に固定し、 b を $-2 \leq b \leq 4$ の範囲で変化させた結果が図 3(a) である。 $x_0 = 0.1$ である。図 2 で示されたロジスティック写像 (2) の分岐図との同型性が見てとれる。

$a < 0$ の代表的な場合として $a = -3.0$ に固定し、 b を $-2 \leq b \leq 4$ の範囲で変化させた結果を示したのが図 3(b) である。(図 3 には次節で論じられる吸引圏 (BA) もあらかじめ示されているが、ここでは分岐図にのみ注目する。)

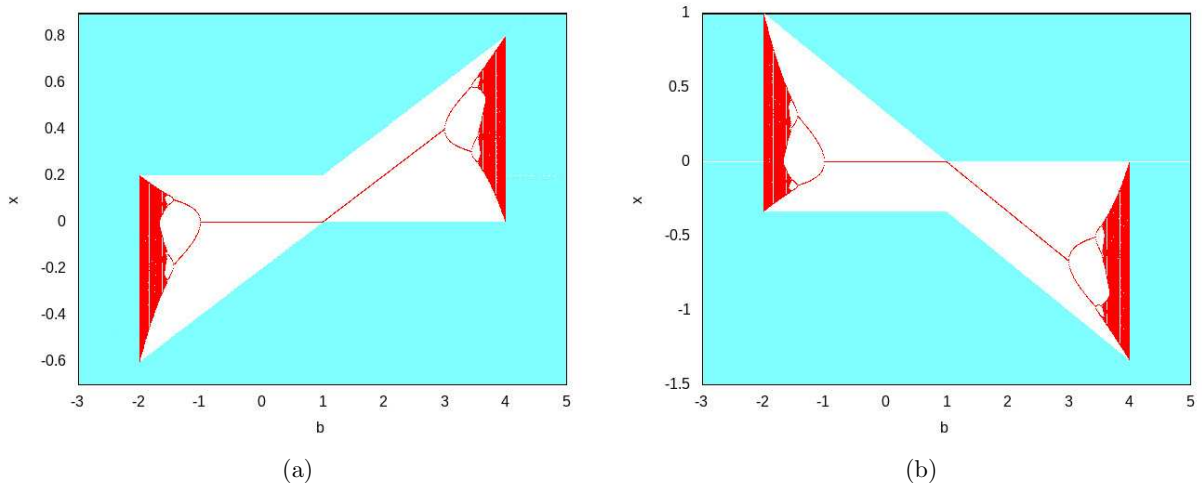


図 3 写像 (1) の分岐図と吸引圏。 $a = 5.0$ に固定 (a), $a = -3.0$ に固定 (b)。分岐図は初期値 $x_0 = 0.1$ ((a) の場合), $x_0 = -0.1$ ((b) の場合)、くりかえし数 1000 までではじめの 500 回の結果は捨てられている。白く残された領域が吸引圏 (第 3 節参照) である。

逆に b を固定し a を $-3 \leq a \leq 5$ の範囲で動かしてみてもパラメータ b の値に対応する力学的性質がずっと維持されるだけであり、なるほど a は分岐パラメータではないことがわかる。図 4 に $b = -2.0$ すなわち、最も発達したカオス状態に対応する場合の x_n の a に対するグラフを示した。次節で求める吸引圏の中全体に拡がるカオス状態が a を変化させてもつづくことがわかる。もし $b = 2.0$ をとれば (18) よりロジスティック写像の 1 周期点に当ることがわかり、それは (3) より $\frac{b-1}{a}$ であるから数値計算の結果も $\frac{1}{a}$ の定数倍の曲線として現れる。

写像 (1) と (2) は同型であるにもかかわらず、(1) の 2 つのパラメータは全く別の働きをしているという直感的にはわかりにくい対応なのである。通常のカオス理論の分野の考え方は、標準的 1 次元 2 次写像 (2) を理解することが 1 次元離散力学系のほぼ全てを理解することであるという印象を与えているが、パラメータを 1 つ増やすだけでもこのような予想し難いことがおこるのである。

3 吸引圏

写像の状態変数が有限にとどまりつづける状態変数の領域を吸引圏 (BA) と呼ぶ。十分なくりかえし数 n の後には軌道は周期状態またはカオス状態に吸引されていくからである。1 パラメータのロジスティック写像の BA は分岐図と共に図 2 で示しておいた。本節では 2 パラメータ系 (1) の BA も同様に正しく求められることを示す。結果は既に図 3(a), (b) で分岐図と共に示してあるように直線で囲まれた図形となる。

写像 (1) の $a > 0$, $1 < b$ の場合、図 1 により明らかなように写像への入力の範囲は $[0, \frac{b}{a}]$ であり、出力の範囲は $[0, \frac{b^2}{4a^2}]$ である。 $\frac{b^2}{4a^2} < \frac{b}{a}$ である範囲は、 $0 < b < 4$ であり、今考えているのは $1 < b$ であるから、 b の関数として見た BA は $1 < b < 4$ である。この範囲の b にたいしての BA は、

$$B: \left[0, \frac{b}{a}\right]$$

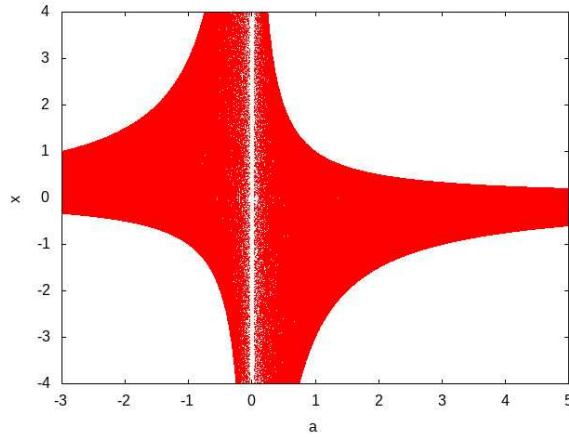


図4 パラメータ a を $-3 \leq a \leq 5$ の範囲で変化させたときの写像 (1) の状態変数 x_n のくりかえし数 $501 \leq n \leq 1000$ の値。 $b = -2.0$, $x_0 = 0.1$ に固定してある。点群をかこむ 4 本の曲線が吸引圏の境界である。 $a = 0$ では $x_{n+1} = -2.0x_n$ で発散する。

である。(以下 BA を $B: [,]$ で表す。) よってパラメータ a を固定すれば BA の上限はパラメータ b によって決まる直線であり、下限は 0 すなわち b 軸であり b の値の上限は 4 という図 3 に示した単純な図形となる。逆に b を固定すれば上限は $\frac{1}{a}$ に比例する双曲線となる。

しかし $a > 0$ であっても $0 < b < 1$ の場合は、写像 (1) の右辺のグラフは図 5(a) に示されているように、固定点が負となりその preimage $\frac{1}{a}$ の方が 0 点 $\frac{b}{a}$ より大きくなるため BA は

$$B: \left[\frac{b-1}{a}, \frac{1}{a} \right]$$

となる。さらに $a > 0$ で $-2 < b < 0$ の場合の写像のグラフは図 5(b) に示すように異なった象限に移るのであるが、BA はやはり

$$B: \left[\frac{b-1}{a}, \frac{1}{a} \right]$$

である。パラメータ a を固定したときの BA の上限下限が直線であることに代わりはない (図 3(a))。

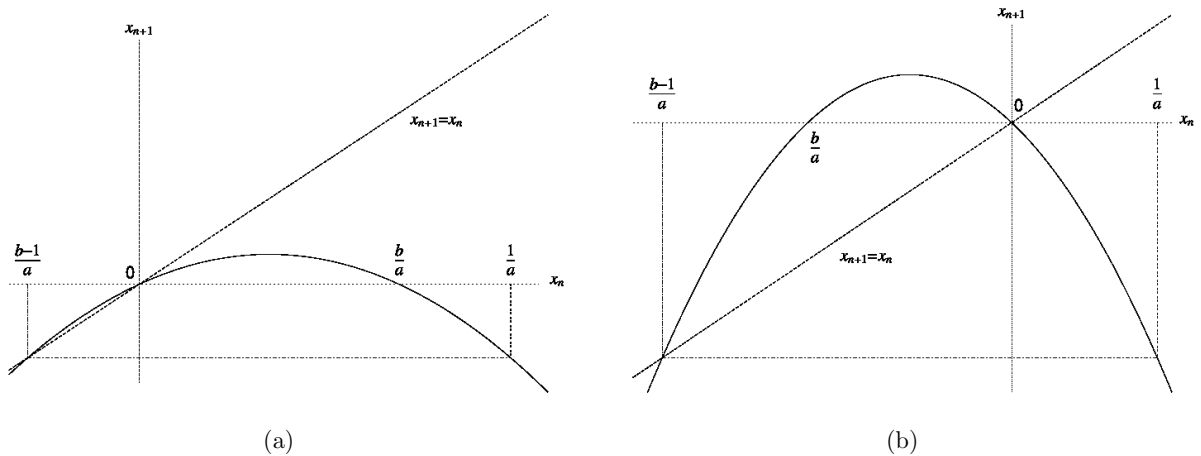


図5 写像 (1) の右辺の $a > 0, 0 < b < 1$ の場合のグラフ (a) と写像 (1) の右辺の $a > 0, -2 < b < 0$ の場合のグラフ (b)。

$a < 0$ に対して同様の考察を行うことで $1 < b < 4$ では

$$B: \left[\frac{b}{a}, 0 \right]$$

$0 < b < 1$ 及び $-2 < b < 0$ に対して結果的には同一の表現

$$B: \left[\frac{1}{a}, \frac{b-1}{a} \right]$$

という BA が求められる。典型的な $a < 0$ の例として $a = -3.0$ にとつた BA が図 3(b) に示されている。

この第 3 節で得た写像 (1) の吸引圏に関する事実を一目瞭然たらしめるものとして 2 つの 3 次元グラフ図 6(a)、(b) で本節をしめくくる。すなわちパラメータ a を固定したときのパラメータ b の変化に対する吸引圏 (図 6(a)) と、逆に、 b を固定して a を変化させた時の吸引圏 (図 6(b)) である。

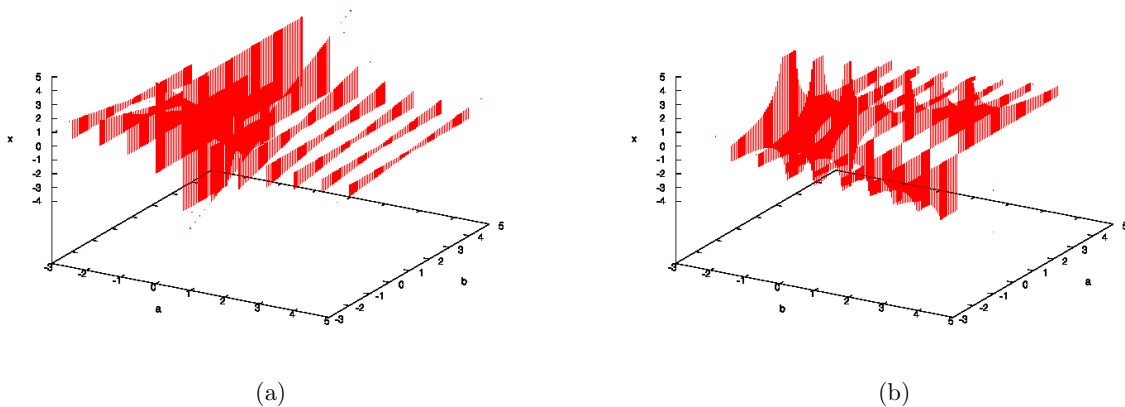


図 6 (a): 写像 (1) の 2 次項の係数 a を固定して、1 次項の係数 b を -2 から 4 まで変化させたときの吸引圏。
 $a = -3.0$ から 5.0 までを 10 等分した a の値に固定してある。(b): 写像 (1) の係数 b を固定して、係数 a を -3 から -5 まで変化させた時の吸引圏。

4 応用及び議論

この最終節では写像 (1) がいかなる場合に現実的な系を表現し得るかを考えてみたい。May が紹介して以来 [4]、力学系ことにカオス理論の標準的な系として教科書にも必ずのロジスティック写像 (2) は、Verhulst の微分法的と呼ばれる飽和状態を実現する生態学の方程式をオイラー差分化して得られる差分方程式を、適当に変数変換することで 1 つのパラメータによって制御される単位区間から単位区間に写像される写像である。Verhulst の式は 2 つのパラメータをもちそれを差分化した式はしたがって 3 つのパラメータをもつものであったので、(2) がいかに扱いやすい式となったかは容易に理解されよう。Verhulst の式は、無限に発散する解を与える Malthus の考えを微分方程式で表した式に工夫を加え人口や個体数が頭打ちになるようにしたものである。このように微分方程式から出発しそれを差分化したり、変数変換を施したりせずはじめから差分系として以上の流れを表したらどうなるかという考えにより得られたのが写像 (1) なのである。少なくともそのような解釈が可能なのである。

Malthus の考えを差分方程式で表せば b を増殖率として

$$x_{n+1} = bx_n \tag{24}$$

となる。もちろん $b > 1$ ならば x_n は発散し、 $0 < b < 1$ ならば 0 に収束する。すなわち生物の個体数を考えていれば絶滅する。無限大に向かうのは個体数を考えている限り適当ではないから、Verhulst が考えたように増殖率が個体数に依存して減少するとすればその最も簡単な形は

$$b \rightarrow b - ax_n \tag{25}$$

とするものであろう。ここに a はもうひとつのパラメータ (個体数を考えている限りは正の) である。しかも a は b とは独立のパラメータとする。すると (24) は

$$x_{n+1} = (b - ax_n)x_n \quad (26)$$

となる。つまり (1) である。すなわち我々の考えてきた写像 (1) は通常は微分方程式の形式で与えられる Malthus、Verhulst の流れをはじめから差分形で表した結果ということができる。しかも、一度得られてしまえば、係数に制限のない単なる方程式なのであるから b, a を正に限ることなく解析したのが本論文の内容なのである。

本稿第 2 節で得たのは写像 (2) と (1) の間の位相同型変換関数であった。文献 [1] 及び [2] で得ていたのは通常のロジスティック写像、すなわち (2) 自身の中の変換関係であった。当然考えなければならないのは写像 (1) 同士の間の変換関係である。これについては興味深い知見が得られつつあるので、近く発表する予定である。

参考文献

- [1] T. Tsuchiya and D. Yamaguchi, “The Complete Bifurcation Diagram for the Logistic Map”, Z.Naturforsch. 52a, pp.513-t16, (1997).
- [2] 土屋尚, “1 次元 2 次写像間の 2 種の位相共役関数”, 明星大学研究紀要-情報学部-第 16 号 (2016), pp.19-29.
- [3] D. Gulick, “Encounters with Chaos”, McGraw-Hill (1992), Ch.2.
- [4] R.May, “Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics”, Nature 261(1976), pp.459-467.