

ロジスティック写像の fully developed chaos の時間平均

The Time Average of the Fully Developed Logistic Map Chaos

矢吹道郎

土屋 尚

YABUKI, Michiro

TSUCHIYA, Takashi

明星大学情報学部

明星大学名誉教授

概要

ロジスティック写像の fully developed chaos はエルゴード性を有していることから、不変測度を用いて、軌道の時間平均が $\frac{1}{2}$ であることが示されている。本論文では step average(SA) と呼ぶ新たなロジスティック写像の平均値の概念を導入し、軌道の数が無限の場合の平均値を求める。さらに統計的に初期値に対する平均値の分布の時間発展を調べることにより、エルゴード性を直接的に用いずに時間平均が $\frac{1}{2}$ であることを示す。

1 序論

ロジスティック写像

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n) \quad (1)$$

はカオス理論の分野では最もよく知られた系であろう。 x は状態を表す実数変数で、 n は繰り返しの回数を数える整数変数である。外部から制御できる実習パラメータ a を変えることにより系が最終的に落ち着く状態が、固定点、2 の倍数の同期状態、カオス状態と分岐を起こしながら変化することもよく知られている。特に $a = 4.0$ では fully developed chaos と呼ばれる単位区間 $[0, 1]$ を埋め尽くすカオス状態が現れる。カオス理論の教科書は現在では数多く出版されている。ロジスティック写像について詳しく解説しかつ比較的新しいものとして文献 [1] を挙げておく。

本研究では、fully developed chaos の平均値について考える。最終的な無限の繰り返しの結果の平均値、すなわち時間平均はエルゴード性を前提に $\frac{1}{2}$ であることは知られているが、ここでは有限のステップ数における平均について考えることから出発する。すなわち、時間平均および位相平均とは異なる、ロジスティック写像の第 3 の平均値と呼ぶべき平均値、Step Average(以後 SA と略記する) を導入する。これは、与えられたすべての軌道のある繰り返し平均値である。現在までに系 (1) を含む力学系研究では、直接的に扱われてこなかった量である。

次節で、数値的に系 (1) の $a = 4.0$ の場合の平均値を計算するというはどのような意味かを再考し、よく知られた時間平均、位相平均とは違った、繰り返し数 n における系の平均値としての SA を導入する。この平均値を表す表式を、積分を用いて提示する。第 3 節では、平均値の分布が繰り返しに対してどのように変化していくかを示し、その結果が delta 関数となりある値に収束することを示す。最終節でそれらの結果をまとめ、エルゴード性をいわずに時間平均が $\frac{1}{2}$ となることを示す。

2 Step Average

式 (1) の m 番目の初期値に対する N ステップまでの平均を

$$\langle x_{n,m} \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{n,m} \quad (2)$$

と表す。

$$x_{1,m} = f^{(1)}x_{0,m} \quad (3)$$

であり、平均の中に初期値 $x_{0,m}$ 自身は含まれない定義である。 $f^{(1)}()$ は式 (1) の写像を 1 回施すことを示している。式 (2) で与えられる時間平均はその初期値 $x_{0,m}$ に依存することはよく知られている。しかし繰り返し数 $N \rightarrow \infty$ とし

た極限においてはほとんどすべての初期値に対して、時間平均と位相平均が等しくなるエルゴード性が式 (1) において $a = 4.0$ の場合には成り立つことも知られている。

位相平均とは、式 (1) で $a = 4.0$ の場合に対して得られている不変測度

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (4)$$

を用いて、

$$\int_0^1 x\rho(x)dx = \frac{1}{2} \quad (5)$$

によって求められる値である。つまり $a = 4.0$ の場合のロジスティック写像の時間平均は厳密に $\frac{1}{2}$ に等しいことがわかる [2]。

しかし、この結果は無限に大きい繰り返し数 N に対するもので、数値的にこの結果を確かめるには、式 (2) を多くの初期値に対応する軌道を平均する方法がとられる。すなわち

$$\langle\langle x \rangle_N \rangle_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{n,m} \right] \quad (6)$$

という、 M 個の初期値より出発した M 本の軌道にわたって、各時間平均を平均するのである。

本研究では M 個の初期値は単位区間 $[0, 1]$ を M 等分した各小区間の右端の値を小さい方から順に番号づけしたものとす。式 (6) で与えられた平均値は、

$$\langle\langle x \rangle_M \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{n,m} \right] \quad (7)$$

と、平均をとる順序を交換してもまったく等価である。すなわち、 n ステップ目の系の状態量をすべての軌道にわたって平均したものを考えているすべてのステップにわたって平均しても式 (6) と同じ平均値が得られる。式 (7) の右辺のカッコの中身を我々はここで SA(Step Average) と呼ぶことにする。

初期値の取り方を上に述べたように $[0, 1]$ の M 等分とすれば、無限に細かく等分した極限における SA は

$$\langle x_n \rangle_{M \rightarrow \infty} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{n,m} \right] = \int_0^1 f^{(n)}(x_{0,m}) dx_{0,m} \quad (8)$$

となる。つまり連続となった変数 $x_{0,m}$ について n 回繰り返した写像関数を単位区間にわたって積分したものである。従って $n = 1$ ならば、

$$\int_0^1 4x_{0,m}(1-x_{0,m}) dx_{0,m} = \frac{2}{3} \quad (9)$$

であり、 $n = 2$ については、

$$\int_0^1 f^{(2)}(x_{0,m}) dx_{0,m} = \frac{8}{15} \quad (10)$$

となる。この計算は、 n が大きくなるに従って $f^{(n)}(x_{0,m})$ を具体的に積分することは繁雑な作業となる。しかしながら、幸いにして積分区間が $0 \sim 1$ であり、多項式 $f^{(n)}(x_{0,m})$ のすべての係数は fully developed chaos (すなわち $a = 4$) においては整数であるため、多項式の各次数の係数がわかれば、 $0 \sim 1$ の積分結果を有理数として得ることが可能である。

当然のことながら積分結果の分子分母は整数であるにしても、 n が大きくなるにしたがって、項数およびその値は膨大な大きさとなる。これについて、我々は 2 進での多倍長整数計算を可能とする GMP(GNU Multiple Precision Arithmetic Library)[3] を用いて、各次数の係数を求め、ステップ n に対する積分結果を求めた。計算量および値が膨大であるため、得られたのは、 $n = 17$ までである。結果を表 1 に示す。表 1 より、 $n = 17$ までは、

$$\langle x_n \rangle_{M \rightarrow \infty} = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n} - 1} \quad (11)$$

表1 ステップ vs SA

n	SA	n	SA
1	$\frac{2}{3}$	10	$\frac{524288}{1048575}$
2	$\frac{8}{15}$	11	$\frac{2097152}{4194303}$
3	$\frac{32}{63}$	12	$\frac{8388608}{16777215}$
4	$\frac{128}{255}$	13	$\frac{33554432}{67108863}$
5	$\frac{512}{1023}$	14	$\frac{134217728}{268435455}$
6	$\frac{2048}{4095}$	15	$\frac{536870912}{1073741823}$
7	$\frac{8192}{16363}$	16	$\frac{2147483648}{4294967295}$
8	$\frac{32768}{65535}$	17	$\frac{8589934592}{17179869183}$
9	$\frac{131072}{262143}$		

と表されることが明らかである。式 (11) は、 $n > 17$ に対しても成り立つと推定される。 $f^{(n)}(x_{0,m})$ のグラフは 2^n 次関数で、 $[0, 1]$ の間に 2^n のラップ数 (すなわち関数の単調な区間をできるだけ長くとったときの、考えている全区間内の単調な区間の個数) を持つ激しく 0 と 1 の間を上下する関数であるから、 n が大きくなると計算は難しくなるが、連続関数であることは明らかで、積分は可能である。つまり式 (11) の結果が大きな n に対して成り立つと仮定することは自然である。であるならば、式 (11) より、

$$\langle x_n \rangle_{M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{2^{2^n - 1}}} = \frac{1}{2} \quad (12)$$

となる。各ステップの平均値は式 (12) より、単調に $\frac{2}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に近付いて行くことも明らかである。

ステップに対する平均値の変化を図 1 に示す。各ステップの平均は急速に $\frac{1}{2}$ に近付くため、図 1 では、 $\frac{1}{2}$ からの差分、すなわち、 $\frac{1}{2(2^{2^n} - 1)}$ を示している。

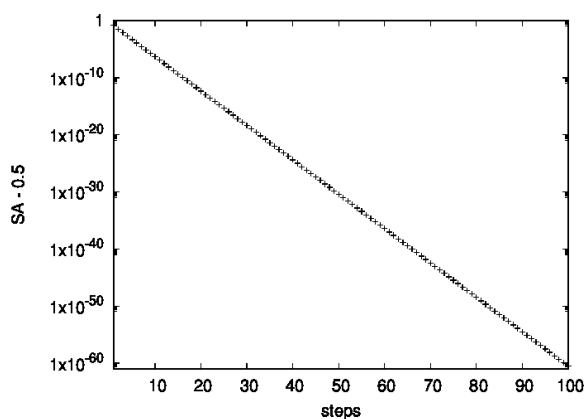


図1 ステップ vs (SA-0.5)

図 1 から明らかなように、 $\frac{2}{3}$ より繰り返しにしたがって、常に正の値で単調に $\frac{1}{2}$ に近付いていく。しかし、その差は微小であるため、実際に数値計算により式 (8) の結果に近付くには膨大な M 、すなわち初期値を用いる必要がある。これはラップ数が大きいため、積分に必要な $dx_{0,m}$ が微小になるためである。このため数値計算では計算量が膨大になり、現実的な時間で積分を行うことができない。結果として平均値を正確に求めることは非常に困難である。倍精度計算を用いて、 $M = 10^{10} + 1$ (ここでは x_0 を $0 < x_0 < 1$ の範囲で平均分割しているために、軌道が 0 に落ち込む x_0 を取らないようにするために M の値を 10^{10} ではなく $10^{10} + 1$ としている。) として数値計算により平均値を求めた結果を図 2 に示す。図 1 に合わせて平均値と $\frac{1}{2}$ の差分で示しているが、誤差のため本来正であるべき値が負となって

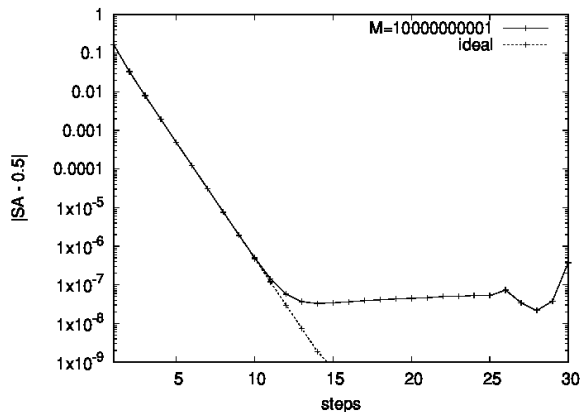


図2 ステップと $|SA - 0.5|$ の関係 (数値計算結果)

しまうため、絶対値を取って示している。図2からわかるように、 $M = 10^{10} + 1$ の軌道を用いても、17ステップはおろか、せいぜい11ステップ程度までしか式(11)に近付くことができないことがわかる。

本節では、 $n = 17$ まで数値的に確かめてある無限に大きい M に対する SA の表式(11)が、それ以上の n に対しても成り立つと仮定すれば、上から単調に $\frac{1}{2}$ に収束すること、および、大きい有限の M の場合の SA を数値的に得ることの難しさを示した。

3 平均値の分布

本節では数多くの軌道に対する時間平均の分布について考察する。

$a = 4$ の logistic map chaos はそのランダム性から、軌道の平均値の分布が最終的にガウス分布であると主張している文献がある [4]。実際に $N = 1000, M = 10^6 + 1$ の場合の分布は図3となり、確かにガウス分布に見える。

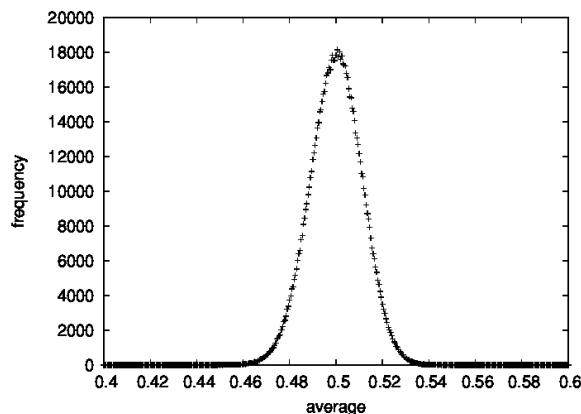


図3 $N = 1000$ の場合平均値の分布 ($M = 10^7 + 1$)

我々はこれとは反対に、ステップが低い場合の分布から始める。ステップが低い場合として、 $M = 10^7 + 1$ の時の $N = 25$ と $N = 45$ の平均値の分布を図4および図5示す。図における bin の幅は 5×10^{-5} である。図4、5からわかるように、ステップ $N = 25$ では中央値を中心に左に偏りが見られ、 $N = 45$ の場合ではその偏りが少なくなっている。

そこで我々はこの非対称性に注目し、 $M = 10^7 + 1$ とした時のステップに対する分布形状の skewness の変化を数値的に調べた。あくまで数値的に得られるすべての軌道の統計的計算を行っており、式(11)で与えられる理想値は用いていない。300ステップまでの skewness の結果を図6に示す。(形状は $\frac{1}{2}$ より小さい側に広がっている形であるため、

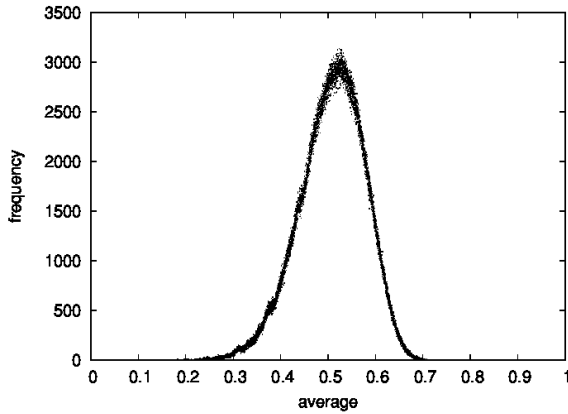


図4 $N = 25$ の場合の平均値の分布 ($M = 10^7 + 1$)

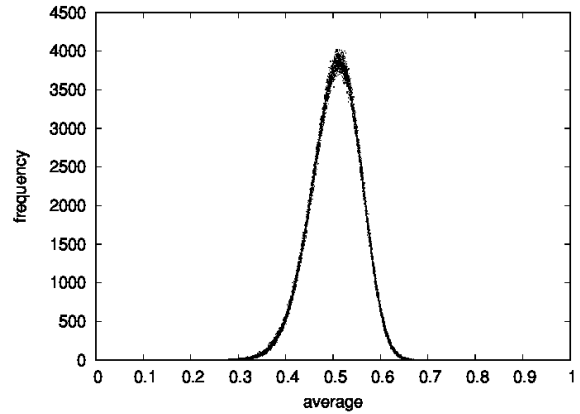


図5 $N = 45$ の場合の平均値の分布 ($M = 10^7 + 1$)

skewness の値は負となる。図6では対数をとるために skewness の値を正として示している。) 図6より、skewness

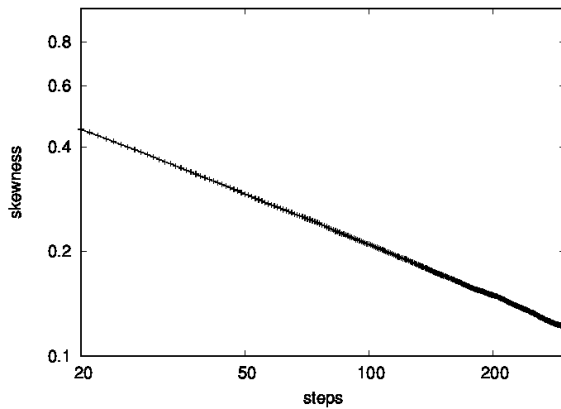


図6 ステップ VS 分布の skewness ($M = 10^7 + 1$)

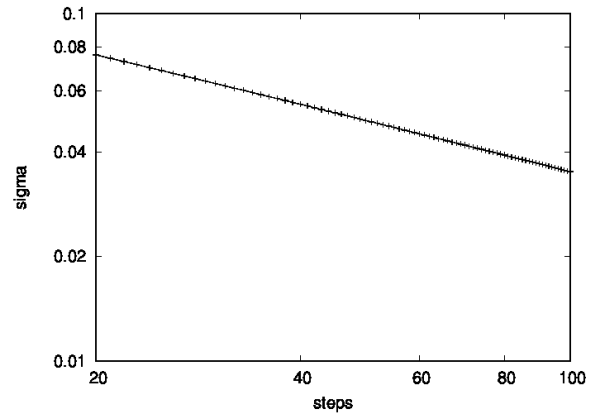


図7 ステップ VS 分布の標準偏差 ($M = 10^7 + 1$)

は直線的にマイナスの値から最終的に 0、すなわち左右対称の形に近付いていっていることがわかる。(ここでは 300 ステップまでを示したが、1000 ステップまでこの直線が維持されることは確かである。) すなわち $n \rightarrow \infty$ において左右対称となると考えられるが、それまでは常に $\frac{1}{2}$ より小さい側に広がった形状を持っているといえる。

同じく平均値の分布の形状における標準偏差を図7に示す。図7においては、結果は直線的に減少しており、標準偏差もまた $n \rightarrow \infty$ において 0 となると考えられる。すなわち $n \rightarrow \infty$ においては平均値の分布は delta 関数となり、すべての軌道の平均がある 1 点に近付いていくことになる。この値は前節の結果から $\frac{1}{2}$ である。

4 結言

本論文では、fully developed chaos であるロジスティック写像に対して、SA という概念を導入し、各ステップの平均が積分により求まることを示した。さらに、各ステップの多項式の係数を求め、積分を行い、目的とするステップの SA を求める式を導出した。この結果、ステップ n に対する SA が、17 ステップまでは

$$\frac{2^{2n-1}}{2^{2n} - 1}$$

で表されることを示した。また 18 ステップ以降もこの表式が成り立つという自然な仮定をすれば、ロジスティック写像の fully developed chaos の SA は常に $\frac{1}{2}$ より大きく、単調に減少して、無限ステップにおいて $\frac{1}{2}$ となることを示した。また、時間平均の分布の skewness と標準偏差が無限ステップにおいてどちらもゼロとなることを実験的に示した。

以上のことから、ロジスティック写像の fully developed chaos においては、無限ステップにおけるすべての軌道の時間平均が $\frac{1}{2}$ であるということになる。すなわち、直接エルゴード性を用いることなく、軌道の時間平均が $\frac{1}{2}$ となることを示した。

本論文で主題とした fully developed chaos とは直接関係しないが、 $a = 2$ の場合には、式 (11) に対応する SA がすべてステップ数 n に足して厳密に求められることを以下に示す。

$a = 2$ に対するロジスティック写像の厳密解は、

$$x_n = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2x_0)^{2^n}] \quad (13)$$

である。 n ステップ目のすべての初期値 x_0 に渡る平均値は、

$$\int_0^1 x_n dx_0 = \int_0^1 \frac{1}{2} dx_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x_0)^{2^n} dx_0 \quad (14)$$

で与えられる。ここで $1 - 2x_0 = X$ とおくと、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_n dx_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_1^{-1} X^{2^n} dX \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2^n + 1} - \frac{(-1)^{2^n + 1}}{2^n + 1} \right\} \end{aligned}$$

ここで $2^n + 1$ は奇数であるので、常に $(-1)^{2^n + 1} = -1$ となり、

$$\int_0^1 x_n dx_0 = \frac{2^{n-1}}{2^n + 1} \quad (15)$$

となる。 $a = 2$ では厳密解を利用することによって、すべての n に対して平均値が求められた。 $a = 4$ の場合も厳密解は知られているが、 $a = 2$ に対して示したような手法では解を求めること、すなわち式 (11) の一般的証明には成功していない。

参考文献

- [1] Shlomo Sternberg, “Dynamical Systems”, Dover Publications, 2010.
- [2] 長島弘幸、馬場良和, 「カオス入門 現象の解析と数理」, 培風館, 1992.
- [3] Torbjörn Granlund, “GNU MP: The GNU Multiple Precision Arithmetic Library”, version 6.1.2 (2016), ‘<http://gmplib.org>’.
- [4] Ugur Tirnakli, Christian Beck, Constantino Tsallis, “Central limit behavior of deterministic dynamical systems”, Phys. Rev. E 75, 040106(R) (2007).