

空気力学教育における翼の前縁サクシオンと誘導抵抗の一解説法

森 下 悦 生¹

Airfoil Leading Edge Suction and Wing Induced Drag in Aerodynamics Educational Methodology

Etsuo Morishita¹

The leading edge suction of an airfoil and the induced drag of a three-dimensional wing are the difficult concepts not only for the engineering students but also for the teaching staff. In this paper, an accurate estimation of the leading edge suction is introduced based on the conformal mapping. Although the induced drag of a three-dimensional wing is widely taught based on the famous lifting-line theory by Prandtl, the experiment on the induced drag is seldom found in the aerodynamics textbooks. A simple kite-flying in the wind tunnel might be a rational educational tool for the understanding of the induced drag. A preliminary experimental procedure is explained.

キーワード：流体力学，空気力学，翼，前縁サクシオン，誘導抵抗

Keywords : fluid dynamics, aerodynamics, airfoil, leading edge suction, induced drag

1. はじめに

航空分野の流体力学を我国では空気力学と呼称しており、特に翼理論に関する部分が重要である。翼理論は複素関数論に基づく等角写像法⁽¹⁾などによって扱われる。一方、より簡便で実用的な計算法として薄翼理論⁽²⁾があり、設計や工学教育の観点から重要である。最も簡単な平板翼の解は、等角写像法でも薄翼理論でも同じであるが、工学的な立場から平板表面の圧力分布を積分すると、揚力のみでなく抵抗成分が算出される。これは無限小厚の平板の前縁サクシオンにより相殺される、という説明がなされる。等角写像法では、ブラジウスの定理⁽³⁾により厳密に説明される。前縁サクシオンの直接計算は報告されているが、近似的な解析であると見受けられる^{(4),(5)}。ここでは、等角写像法の一つである、シュワルツ・クリストッフェル変換^{(1),(6)}を利用して、無限小厚の前縁と後縁に作用する空気力が正確に算定できることを示す。

三次元翼の誘導抵抗は、速度の逆二乗に比例するというもので、低速で水平定常飛行を続けようとする、抵抗が増大するというものである。講義では、プラントルの揚力線理論により、後流渦からの吹き降しにより、揚力の後傾成分が生じるという説明がなされる。しかし、教育課程の空気力学実験において直接測定されることは、著者の経験の範囲ではなく、その空気力学的な概念を学生が具体的に把握することは稀であると推察する。ここでは、風洞における牽引飛行により、誘導抵抗を簡易測定する試みについて紹介する。

2. 前縁サクシオン

2.1 厚さの無い平板翼

図1のように、流速 U_∞ のポテンシャル一様流中に迎角 α でおかれた翼厚 $t=0$ の二次元平板翼には、揚力 L が一様流に垂直に発生する。図1のように、揚力 L は平板表面に垂直な圧力積分のみならず、前縁サクシオンを加え合わせることで求められる。厚さのない平板翼では、翼を囲む検査面の運動量積分から前縁サクシオンを算定可能である。しかし、厚さが無いため、表面圧力の直接積分で求める方法は、近似法の論文^{(4),(5)}以外では通常解説されていない。また、近似的な薄翼理論では、迎角 α が小さいという前提で、揚力 L を表面圧力の積分で近似して、前縁サクシオンは算定されない。

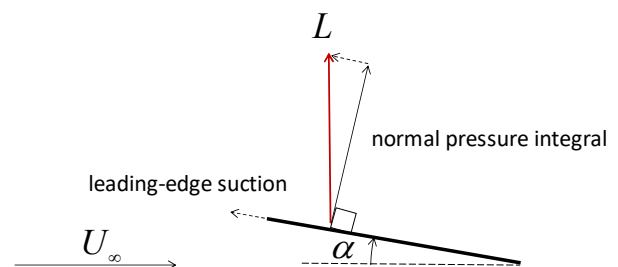


図1 平板翼

Fig.1 Flat plate airfoil

2.2 シュワルツ・クリストッフエル変換と有限厚平板翼

流体力学の教科書に現れるシュワルツ・クリストッフエル変換は、内部流れに適用する場合が主である。著者は、従来研究⁽⁶⁾を発展させて、図2のように、単位円周りのポテンシャル流を任意の多角形や、多角形で近似した翼型に適用できることを示した⁽⁷⁾。図2のように平板を矩形断面で近似する場合、当該変換は、

$$d\zeta = A2e^{i\frac{\pi}{2}} \left[\sin(\beta+\theta)\sin(\beta-\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot d\theta \quad (1)$$

ここで、 $A(\equiv Ke^{i\kappa})$: 複素定数、 $\beta : z_i (i=1\sim 4)$ の偏角、 θ : 偏角、である。図2のような場合、 $\kappa=0$ となり、 $A=K$ と β を適切に与えれば、図2(b)のように z 面の単位円は、 ζ 面の有限厚さの平板に写像される。 ζ 面の複素共役速度 $u-iv$ は、

$$\frac{\left(\frac{dw}{dz}\right)}{V_\infty} = \frac{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)}{V_\infty} = \frac{\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)}{V_\infty} \quad (2)$$

ここで、 w は z 平面で $(1,0)$ を後方淀み点とする、単位円周りのながれの複素ポテンシャルであり、

$$w = U_\infty \left(ze^{-i\alpha_z} + \frac{1}{ze^{-i\alpha_z}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (3)$$

$$\Gamma = 4\pi U_\infty \sin \alpha_z \quad (4)$$

$$V_\infty = \frac{U_\infty}{K} \quad (5)$$

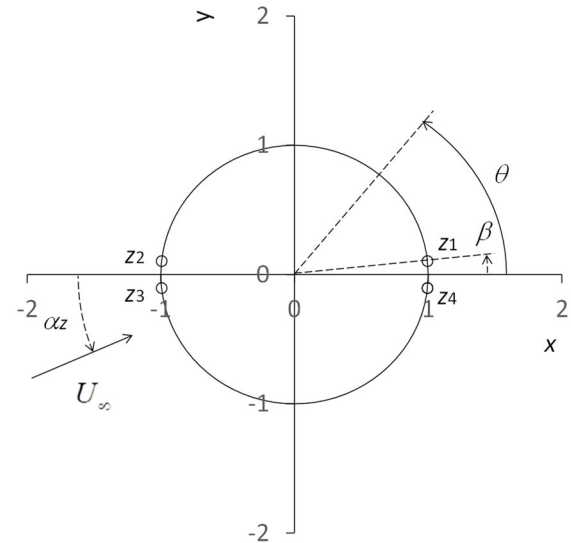
$$\alpha = \alpha_z + \kappa \quad (6)$$

例えば、図2のように $\beta = \pi/30$ 、翼弦長 $c=1$ で、翼の後縁淀み点が、 $(\xi, \eta) = (0.5, 0)$ の ξ 軸上にあるものとする (1) 式より(Mathematica⁽⁸⁾)、

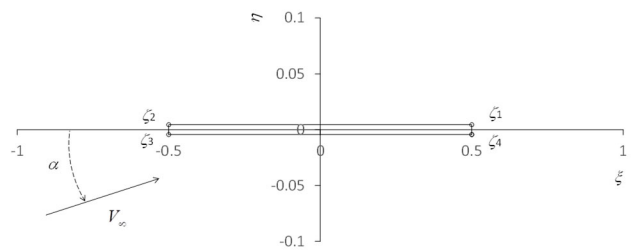
$$K = \frac{c}{2 \cdot \int_{\beta}^{\pi-\beta} |\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)|^{\frac{1}{2}} d\theta} \Bigg|_{c=1, \beta=\frac{\pi}{30}} \approx 0.256$$

$$t = 2K \int_{-\beta}^{\beta} |\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)|^{\frac{1}{2}} d\theta \approx 0.0088$$

で、翼厚 $t(t=c) \approx 0.0088$ の平板が得られ、(1) ~ (6) 式から、平板表面速度が図3のように得られる。



(a) z -平面の単位円 unit circle in z -plane



(b) ζ -平面の平板翼 flat plate in ζ -plane

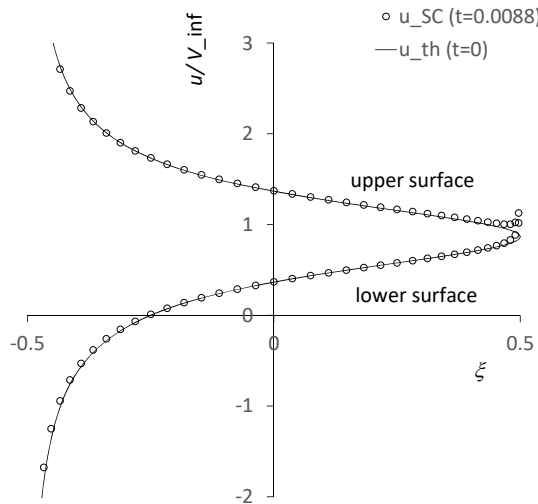
図2 シュワルツ・クリストッフエル変換
Fig.2 Schwartz-Christoffel transformation

図3には、シュワルツ・クリストッフエル変換で得られる u_{sc} と、比較のために、厚さのない平板の理論解 u_{th} も併せて示している。

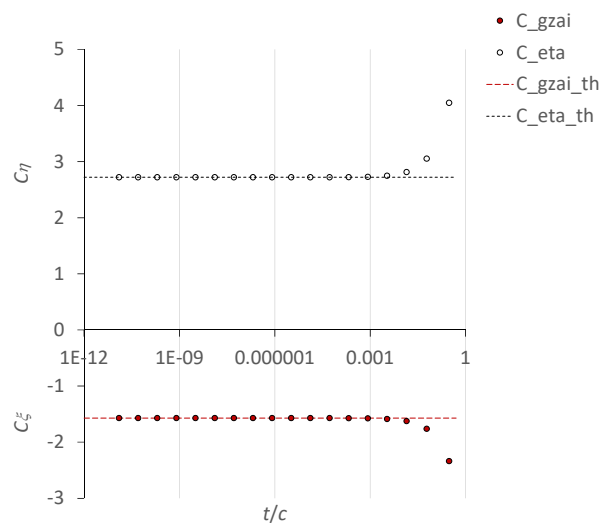
$$\frac{u^2}{V_\infty^2} d\xi \left(\text{or } \frac{v^2}{V_\infty^2} \right) = 2K \frac{|\sin(\theta - \alpha_z) + \sin \alpha_z|^2}{|\sin(\theta + \beta)\sin(\theta - \beta)|^{\frac{1}{2}}} \cdot d\theta \quad (7)$$

から⁽⁷⁾、前縁サクシオン係数 C_ξ は(Mathematica⁽⁸⁾)、

$$C_\xi = \int_{\text{後縁面 } -\beta \leq \theta \leq \beta} \frac{v^2}{V_\infty^2} d\xi - \int_{\text{前縁面 } \pi - \beta \leq \theta \leq \pi + \beta} \frac{v^2}{V_\infty^2} d\xi \\ = 0.00661702 - 1.61384 \approx -1.607$$



(a) 平板上下表面速度 upper and lower surface velocity u



(b) 前縁・後縁表面速度 front and rear surface velocity v

図 3 平板表面速度 $\alpha = \pi / 6, t \approx 0.0088$

Fig.3 Flat plate surface velocity $\alpha = \pi / 6, t \approx 0.0088$

表面に垂直な空気力は、圧力係数 C_η で表され、

$$C_\eta = \int_{\text{上面}} \frac{u^2}{V_\infty^2} d\xi - \int_{\text{下面}} \frac{u^2}{V_\infty^2} d\xi$$

$$= 3.78058 - 0.996788 \approx 2.784$$

揚力係数 C_l と抵抗係数 C_d は、

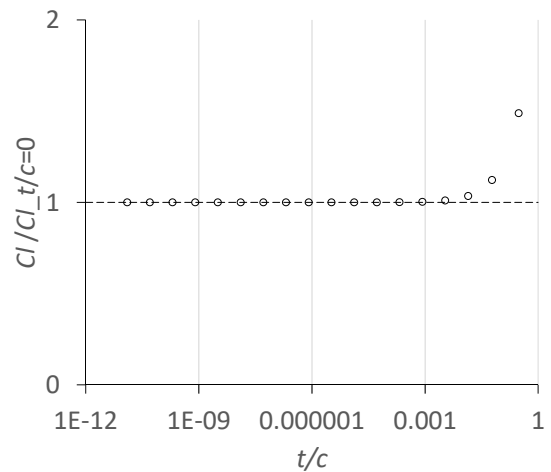
$$C_l = -C_\xi \sin \alpha + C_\eta \cos \alpha \approx 3.214$$

$$C_d = C_\xi \cos \alpha + C_\eta \sin \alpha \approx 0$$

厚さのない $t=0$ の平板の理論値は、 $\alpha = \pi / 6$ で

$$C_l = 2\pi \sin \alpha = \pi \approx 3.142$$

(a) 空力係数 suction and pressure coefficient C_ξ, C_η



(b) 揚力係数 lift coefficient C_l

図 4 翼厚の影響 $\alpha = \pi / 6$

Fig.4 Thickness effect

となり、 $t \approx 0.0088$ の厚さの場合がやや大きい。これは、前後縁の厚さ、および後縁の厚さ中央部分でクッタ条件を与える効果であり、例えば、図 3(a)のように後縁近傍で差異が生じるためである。

図 4 のように、さらに平板の厚さ t を零に漸近させると、平板の解析解に一致することが分かる。このようにして、前縁サクシオンは、有限厚さの平板の、前・後縁の微小面積における圧力積分でも説明できる。微小有限厚さの平板では、厳密には、前縁のみならず、後縁の寄与も生じていることに留意する必要がある。

3. 誘導抵抗

3.1 風洞における牽引飛行

空気力学の風洞実験は、三分力天秤や六分力天秤に模型を固定して行うのが通常である。ここでは、図5に示されるように、デルタ翼の模型翼を、一本の糸で先端を牽引して模擬飛行させる場合について考える。風洞における試行錯誤により、風の風圧中心近傍に錘を懸架して、空気力と釣り合うよう設定する。これは、糸と翼の機軸が同一直線上くる条件となる。図3において翼と懸垂錘の合計の重量が W である。糸は滑車を介して電子秤上の重量 W_0 の錘により牽引されている。通風中の電子秤の読みが W_1 であれば、 $W_0 - W_1$ が糸の張力 T に対応する。あるいは、初期値を0に設定すれば、読み $W_1 (< 0)$ の絶対値が張力 T となる。この実験の主旨は、飛行体の重量 W が、風速によらず一定のため、水平定常飛行の条件を模擬することにある。

図5における力の釣り合いは、

$$L = W - T \cos \theta \tag{8}$$

$$D = T \sin \theta \tag{9}$$

ここで、 D : 抵抗、 g : 重力加速度の大きさ、 L : 揚力、 α : 迎角、 $\theta (= \pi/2 - \alpha)$: 糸の角度、である。実験中の翼の位置から角度 θ が求まり、電子秤の読みから T が分かるので、揚力 L と抵抗 D が得られる。

翼としてのデルタ翼は、翼弦長 $c = 21\text{cm}$ 、翼幅 $b = 25\text{cm}$ 、アスペクト比 $AR \approx 2.4$ 懸架錘を加えた機体重量は $W = 62\text{gf}$ である。

明星大学機械工学系の翼列風洞の $25\text{cm} \times 75\text{cm}$ 吹き出し口において、牽引飛行実験を行い、図6の結果が得られた。レイノルズ数は、 $Re \approx 6.4 \times 10^4 \sim 1.7 \times 10^5$ の範囲である。これは、明星大学機械工学系授業科目プロジェクト IV の受講者と共に行った実験である。

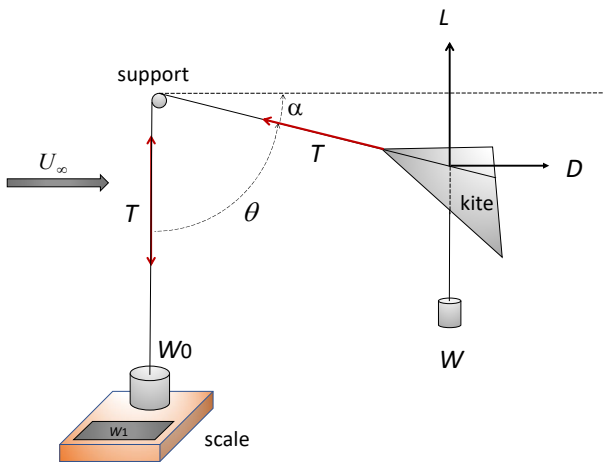
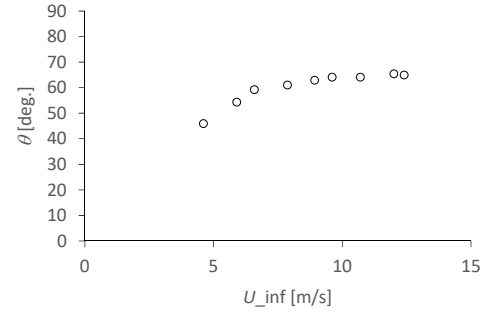
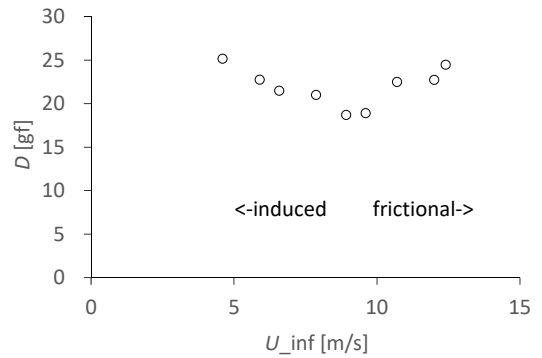


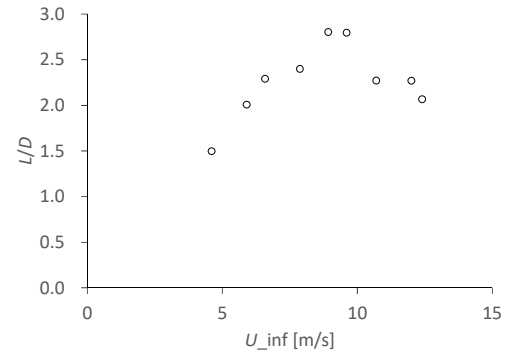
図5 風洞における牽引飛行
Fig.5 Traction flight in wind tunnel



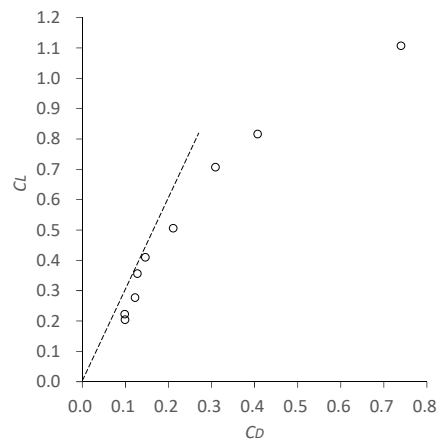
(a) 機軸角度 body angle θ



(b) 抵抗 drag D



(c) 揚抗比 lift-to-drag ratio L/D



(d) 抵抗極線図 drag polar

図6 牽引飛行実験 $AR \approx 2.4$, $Re \approx 6.4 \times 10^4 \sim 1.7 \times 10^5$
Fig.6 Traction flight experiment

実験結果の理解として、機体の重量 W が一定なので、風速 U_∞ を増大させると、 θ が増大、迎角 α が減少すること、迎角 α が大きい低速側でも抵抗 D が大きく、ある風速で抵抗 D が最小値をとり、高速側で再び増大することである。揚抵比 L/D は、抵抗と逆の傾向となっている。図 6 (d) の抵抗極線図(drag polar)では、原点から引いた接線のこう配が最大揚抵比 $(L/D)_{\max}$ を与える。

3.2 誘導抵抗の理解

誘導抵抗は、プラントルの揚力線理論により、後流渦の吹き降しによる誘導迎角により、揚力の後傾成分として解説されており、理論の結果から飛行速度の逆二乗に比例する、すなわち、低速側で増大する抵抗として説明されている。

本報告における牽引飛行実験では、機体の重量を実験中一定に設定できるため、図 6 のように、低速側での抵抗増大を検出できている。ただし、エンジンの推力に相当する糸の張力 T の成分が揚力に加わる状態の模擬となっている。

機体を固定した通常の風洞試験では、迎角の変化とともに、例えば揚力一定の条件を設定する必要があり、容易な実験とは言えない。

図 6 の結果のように、低速側では、迎角 α が大きく、翼面の流れに垂直な投影面積が大きく、翼前面と背面の差圧 Δp がそのまま抵抗になり得る。一方、高速側では、迎角 α が小さく、流れに垂直な投影面積は小さいが、翼両面の摩擦抵抗が速度 U_∞ の乗に比例して増大する。このように考えて、低速側の誘導抵抗と高速側の摩擦抵抗の増大を定性的に理解することも可能である。

揚力 L と機体重量 W に関して、空気の密度を ρ として、

$$L \propto \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot \sin \alpha \propto W$$

である。機体重量 W が一定値であることに留意して

$$\sin \alpha \propto \frac{W}{U_\infty^2}$$

すなわち、低速域では急激に迎角が大きくなる必要がある。また、差圧 Δp に伴う翼面に作用する法線力を N とすると、近似的に $L \approx N \cos \alpha \approx N$ であり、

$$D \approx N \sin \alpha \approx L \sin \alpha \propto \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \cdot \sin^2 \alpha \propto \frac{W^2}{U_\infty^2}$$

定性的にはあるが、誘導抵抗が飛行速度 U_∞ の二乗に逆比例し、低速側で増大することが説明できる。

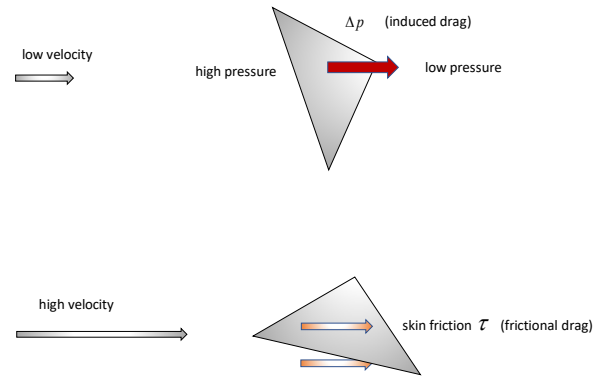


図 7 誘導抵抗と摩擦抵抗
Fig.7 Induced and frictional drag

4. まとめ

空気力学を学ぶ過程で、厚さのない平板翼の前縁サクシオンや、三次元翼の誘導抵抗は、直ちに理解することが難しい項目である。

本報告では、シュワルツ・クリストッフ変換を利用して、厚さはあるが、極めて薄い平板翼の前縁サクシオンを正確に算定する方法を示し、従来から説明されている解析解に一致することを明らかにした。平板の表面圧力の直接積分から前縁サクシオンの値が示せることは、圧力積分から空気を算定するという工学的な立場から、極めて有意義なことである。

誘導抵抗は低速側で増大するという、直感とは結びつきにくい物理現象である。本報告のように、機体の重量を一定に保って牽引飛行実験を行えば、低速側で翼の流れに垂直な受圧面積が増大するという観察事実から、理解がより容易になるものと考えられる。

参考文献

- (1) 守屋富次郎: 空気力学序論, 培風館, pp.73-79 (1970)
- (2) Anderson, J.D., Jr.: Fundamentals of Aerodynamics, McGraw-Hill, pp.266-282 (1001)
- (3) Warsi, Z.U.A. : Fluid Dynamics-Theoretical and Computational Approach, pp.145-148(1998)
- (4) Jones, R.T. : "Leading-Edge Singularities in Thin-Airfoil Theory", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.17, pp.307-310 (1950)
- (5) Lighthill, M.J. : "A New Approach to Thin Airfoil Theory", The Aeronautical Quarterly, Vol.3, No.3 pp.193-210 (1951)
- (6) Fukatsu, R. : "Aerofoil Theory with Flaps (in Japanese)", Imperial University of Tokyo Aeronautical Lab. Rep. No.55, pp.47-64 (1929)
- (7) Morishita, E. : "Schwartz-Christoffel Transformation applied to Polygons and Airfoils", International Journal of Pure Mathematics, Vol.2, pp.1-13 (2015) ISSN: 2313-0571
- (8) Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 11.3, Champaign, IL (2018).