

一般線型モデルの多変量正規分布に関する諸定理と、 関連問題の幾何学的考察

宇喜多義昌* 平川孝三郎** 小野英夫***

§ 1, Summary.

$X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $\mu = \sum_{i=1}^m a_i p_i$, $\Sigma > 0$ のとき, X の $p. d. f.$ $n(x | \mu, \Sigma)$ のグラフ

$z = n(x | \mu, \Sigma)$ は, R^{p+1} 空間内で, R^p 空間を定義域とする超曲面を表す. これを R^p 内での等高線, 等高曲面で表示する. このことから

(1) X の分布状態.

(2) $P_S X$ の分布状態. ($P_S X$ は X のベクトル空間 S への正射影ベクトル)

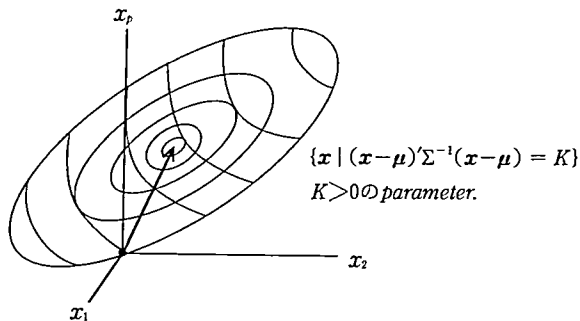
(3) 多変量正規分布に関する諸定理やそれらの関連問題の結論.

等が, 図形的考察によって容易に得られることを示す.

§ 2, $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ のとき, 曲面 $z = n_p(x | \mu, \Sigma)$ の等高線表示について.

(2, 1). $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ のとき, $z = n_p(x | \mu, \Sigma)$ の等高線表示は, R^p 内で, 中心 μ で Σ の固有ベクトルを主軸とする楕円体系で表される.

図 1



(2, 2). $X \sim N_p(\mu, \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p))$ のとき, $z = n_p(x | \mu, \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p))$ の等高線表示は R^p 内で,

* 理工学部非常勤講師 数学

** *** 理工学部教授 教職 数学

本研究は平成6年度科学研究費(一般研究C)過程番号0668-0293の「標本分布の漸近展開近似の精度と, 標本の大きさ, 次元数との関係」(代表者 塩谷実)の研究成果として発表するものである.

$$\left\{ \mathbf{x} | (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_p} \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = K, \quad K > 0 \text{ で parameter} \right\}$$

すなわち

$$\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\lambda_1} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{(x_p - \mu_p)^2}{\lambda_p} = K > 0$$

この楕円体方程式を中心 $\boldsymbol{\mu}$ の標準形という。楕円体の主軸方向が直交座標軸 x_1, \dots, x_p と一致するものである。

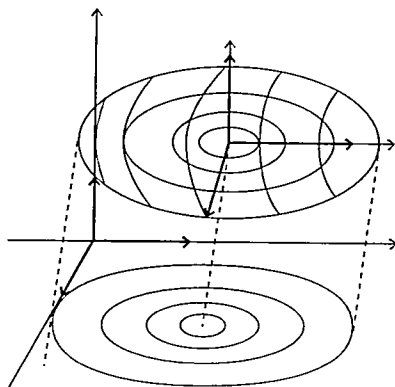
$$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_p))$$

$$\iff \begin{cases} X_i \sim N(\mu_i, \lambda_i), & (i = 1, 2, \dots, p) \\ X_i \perp\!\!\!\perp \end{cases}$$

このとき X の (X_1, X_2, \dots, X_k) ($k < p$) への周辺分布 すなわち,
 $P_{s(e_1, e_2, \dots, e_k)} X \sim N_k(P_{s(e_1, e_2, \dots, e_k)} \boldsymbol{\mu}, \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_k))$ のとき,

$$\iff \begin{cases} P_{e_i} X \sim N(P_{e_i} \boldsymbol{\mu}, \lambda_i), & (i = 1, 2, \dots, k) \\ P_{e_i} X \perp\!\!\!\perp \end{cases}$$

図 2 の 1



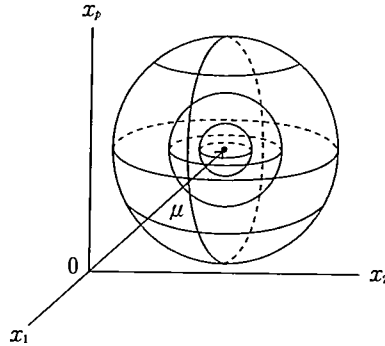
(2, 3). $X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda))$ のとき, $z = n(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda))$ の等高線表示は R^p 内で,

$$\left\{ \mathbf{x} | (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = K > 0, \quad K > 0 \text{ で parameter} \right\}.$$

すなわち, $(x_1 - \mu_1)^2 + (x_2 - \mu_2)^2 + \dots + (x_p - \mu_p)^2 = \lambda K > 0$.

これは中心 $\boldsymbol{\mu}$ で半径 $\sqrt{\lambda K}$ の球方程式で K を parameter とする同心球群を表す。

図2の2



$$\begin{aligned}
 & X \sim N_p(\mu, \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)), \\
 & \iff \begin{cases} X_i \sim N(\mu_i, \lambda), & (i = 1, 2, \dots, p) \\ X_i \perp \end{cases} \\
 & \longrightarrow \|X\|^2/\lambda \sim \chi_{f=p}^2(2\lambda_p = \frac{\|\mu\|^2}{\lambda}) \dots\dots\dots (2,3.1)
 \end{aligned}$$

ここに $2\lambda_p$ は非心率を示す.

このとき X の (X_1, X_2, \dots, X_k) への周辺分布を求めると,

$$\begin{aligned}
 & P_{s(e_1, e_2, \dots, e_k)} X \sim N_k(P_{s(e_1, e_2, \dots, e_k)} \mu, \text{diag}(\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_k)) \\
 & \iff P_{e_i} X \sim N_k(P_{e_i} \mu, \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\
 & \quad P_{e_i} X \perp \\
 & \longrightarrow \|P_{s(e_1, e_2, \dots, e_k)} X\|^2/\lambda \sim \chi_{f=k}^2\left(2\lambda_p = \frac{\|P_{s(e_1, e_2, \dots, e_k)} \mu\|^2}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

また, 任意の k 次元ベクトル空間 S_k への X の正射影ベクトル $P_{S_k} X$ の分布は,

$$\begin{aligned}
 & P_{S_k} X \sim N_k(P_{S_k} \mu, \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)) \dots\dots\dots (2,3.2) \\
 & \underline{\|P_{S_k} X\|^2/\lambda \sim \chi_{f=k}^2\left(2\lambda_p = \frac{\|P_{S_k} \mu\|^2}{\lambda}\right)},
 \end{aligned}$$

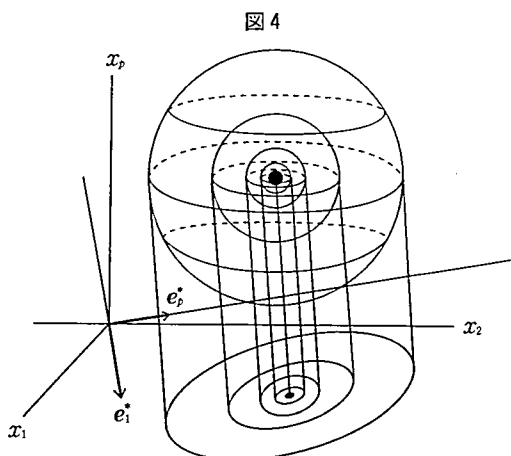
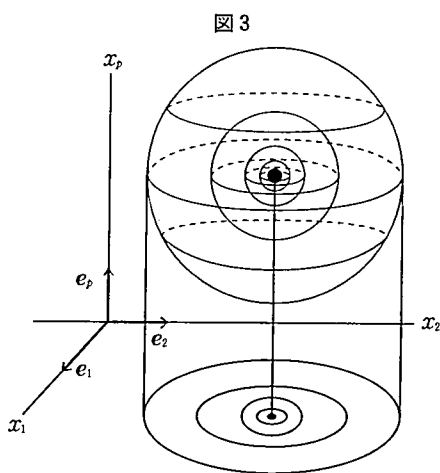
(2,3.2) は, 下の図3と図4より, 明らかであるが, 解析的に証明する.

S_k の中に, $e_1^*, e_2^*, \dots, e_k^*$ なる互いに直交する単位ベクトルをとり, 直交座標系 $(0 - e_1^*, e_2^*, \dots, e_k^*)$ で $P_{S_k} X$ を表すと,

$$P_{S_k} X = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{e_1^*} X = e_1^{*'} X \\ P_{e_2^*} X = e_2^{*'} X \\ \vdots \\ P_{e_k^*} X = e_k^{*'} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^{*'} \\ e_2^{*'} \\ \vdots \\ e_k^{*'} \end{bmatrix} X \equiv Q_k' X$$

$$Y \equiv Q_k' X \sim N_k(Q_k' \mu = P_{S_k} \mu, Q_k' \lambda I_k Q_k = \lambda I_k)$$

($X \sim N_p(\mu, \lambda I_p)$) のとき, 半直交行列 Q_k' で X から Y へ変換するとき, 上記の定理を得る)



$$\|P_{S_k} \mathbf{X}\|^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_k^2, \quad Y_i \perp, Y_i \sim N(\mathbf{e}_i' \boldsymbol{\mu}, \lambda) \text{ より}$$

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_k^2 \sim \lambda \chi_{f=k}^2 (2\lambda_p = \|P_{S_k} \boldsymbol{\mu}\|^2 / \lambda) \text{ を知る.}$$

§ 3. $X \sim N_p(\sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i p_i, \sigma^2 I_p)$ の場合の仮説検定問題の幾何学的考察と Examples.

$E(X) \equiv \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i p_i$ より, $\boldsymbol{\mu} \in s[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m] \equiv S[A]$ である.

この $S[A]$ を推定空間 (Estimation Space) といい, R^p の中で $S[A]$ の直交補空間を $S[A]^\perp$ とかき, 誤差空間 (Error Space) という.

$\dim S[A] = f (\leq m)$ なら, $\dim S[A]^\perp = p - f$, である.

基本定理 1. $\|P_{S[A]^\perp} \mathbf{X}\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_{p-f}^2(0)$ である.

証明. $P_{S[A]^\perp} \mathbf{X} \sim N_{p-f}(P_{S[A]^\perp} \boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I_{p-f})$, $P_{S[A]^\perp} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ から,

$$P_{S[A]^\perp} \mathbf{X} \sim N_{p-f}(\mathbf{0}, \sigma^2 I_{p-f}).$$

(2,3,2) と同様に

$$\|P_{S[A]^\perp} \mathbf{X}\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_{p-f}^2$$

検定問題

$S(H) \subset S[A]$ であるベクトル空間 $S(H)$, $\dim S(H) = k$ とする.

帰無仮説: $S(H) \perp \boldsymbol{\mu} (= \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i p_i)$ の検定を行う,

$$P_{S(H)} \mathbf{X} \sim N_k(P_{S(H)} \boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I_k).$$

$$\text{ゆえに } \|P_{S(H)} \mathbf{X}\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_k^2 \left(2\lambda_p = \frac{\|P_{S(H)} \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2} \right) \dots\dots\dots (1)$$

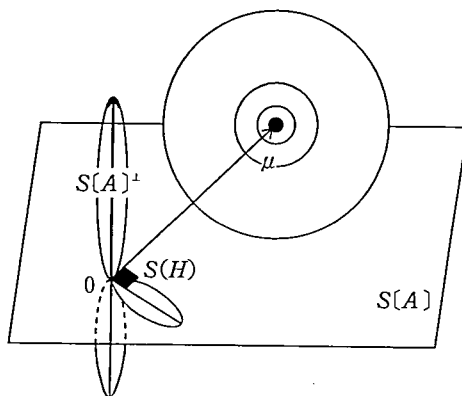
$$\text{一方基本定理 1 より, } \|P_{S[A]^\perp} \mathbf{X}\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_{p-f}^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{しかも明らかに } \|P_{S(H)} \mathbf{X}\|^2 / \sigma^2 \perp \|P_{S[A]^\perp} \mathbf{X}\|^2 / \sigma^2 \dots\dots\dots (3)$$

よって, $S(H) \perp \mu$ が真のとき, $\|P_{S(H)}X\|^2/\sigma^2 \sim \chi_k^2(0)$ となり,

$$\frac{\|P_{S(H)}X\|^2/k}{\|P_{S(A)^\perp}X\|^2/(p-f)} \sim F_{p-f}^k(0). \quad (\text{under } S(H) \perp \mu \text{ is true}).$$

図 5



Example 1. $X_i = a + m(t_i - \bar{t}) + e_i$, $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $e_i \perp (i = 1, 2, \dots, n)$ すなわち X の t_1, t_2, \dots, t_n に対応する X_1, X_2, \dots, X_n が t に関して 1 次回帰であり, 誤差 e_i は同一の分散をもって, 独立な正規分布をするとする.

$$H; \quad m = 0 \Leftrightarrow \mu (= a1 + m(t - \bar{t}1_n)) \perp S(t - \bar{t}1_n)$$

$$\|P_{(t-\bar{t}1_n)}X\|^2 = \frac{[(t-\bar{t}1_n)'X]^2}{\|t-\bar{t}1_n\|^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})X_i\right]^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

$$\begin{aligned} \|P_{S(1, t-\bar{t}1_n)^\perp}X\|^2 &= \|X\|^2 - \|P_1X\|^2 - \|P_{(t-\bar{t}1_n)}X\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})X_i\right]^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

要因	S. S.	f	M. S. S.	
回帰	$\frac{\left[\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})X_i\right]^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = A$	1	A	$\frac{A}{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - A}{n-2}} \sim F_{n-2}^1$ (under $m=0$ is true)
誤差	$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - A$	$n-2$	$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - A}{n-2}$	
全変動	$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$			

Example 2. $X \sim N_p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i, \sigma^2 I_p\right)$ のとき, k 個の独立な p_1, p_2, \dots, p_m の 1 次式

$l'_1 p, l'_2 p, \dots, l'_k p$ が estimable のとき, それぞれの

- (1) BLUE $C'_1 X, C'_2 X, \dots, C'_k X$ が 1 意に存在し, $C_1, C_2, \dots, C_k \in S(A)$ である.
- (2) C_1, C_2, \dots, C_k は 1 次線形独立である.
- (3) $S(C_1, C_2, \dots, C_k) \equiv S(C)$, $\dim S(C) = k$, $S(C) \subset S(A)$ である.

ことが知られている. さて,

$$H; \quad l'_1 p = l'_2 p = \dots l'_k p = 0 \iff E(C'_i X) = C'_i \mu = l'_i p = 0 \\ i = 1, 2, \dots, k$$

の検定は, $S(C) \subset S(A)$ で, $S(C) \perp \mu$ の仮説検定である,
故に

$$\left\{ \begin{array}{l} \|P_{S(C)} X\|^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_k \left(2\lambda_p = \frac{\|P_{S(C)} \mu\|^2}{\sigma^2} \right) \\ \|P_{S(A)^\perp} X\|^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{p-\dim S(A)}(0) \end{array} \right\} \perp$$

よって

$$\frac{\|P_{S(C)} X\|^2 / k}{\|P_{S(A)^\perp} X\|^2 / (p - \dim S(A))} \sim F_{p-\dim S(A)}^k \quad (\text{under } H \text{ is true})$$

として検定される.

§ 4. $X \sim N_p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \equiv \mu, \Sigma\right)$ の場合で, Σ が (1), (2), (3) の場合.

- (1) Σ の固有根 λ_1 に対応する単位固有ベクトルは $e(1)' = \left(\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ である.
- (2) Σ の他の固有根 λ が $r \geq 2$ の重根で, 対応する r 次元の固有空間を $S(\lambda | \Sigma)$ とする.
- (3) $S(\lambda' | \Sigma) = S(H) \oplus S(E_{\lambda'})$

$$\begin{aligned} \text{ここに } S(H) &\subset S(A), \dim S(H) = l \\ S(E_{\lambda'}) &\subset S(A)^\perp, \dim S(E_{\lambda'}) = r - l \end{aligned}$$

の場合を考察する.

この場合 $H; s(H) \perp \mu$ の仮説検定に F 検定を持込むことが出来る.

§ 2. の (2, 1) で見たように, $z = n_p(x | \mu, \Sigma)$ の等高線表示は, 中心 μ の Σ の固有ベクトルを主軸とする楕円体系であるから, $X \rightarrow Y$ に変換して, $V(Y) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ とし, $Y_i \perp$, $Y_i \sim N(E(Y_i), \lambda_i)$ にする, すなわち,

$$\text{変換 } Y = P'X, \text{ ただし, } P \text{ は } p \times p \text{ の直交行列で, } P'\Sigma P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \text{ なる行列とする.}$$

これから

図 6

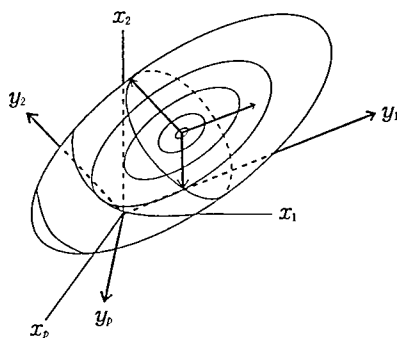
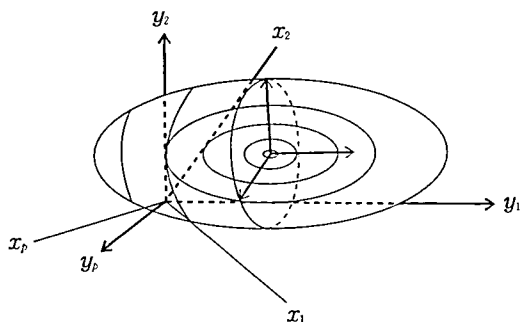


図 7



$$Y \sim N_p \left[(P'\mu, \quad P'\Sigma P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix}) \right] \text{ となり,}$$

$Y_i \sim N(p_i'\mu, \lambda_i), \quad Y_i \perp (i = 1, 2, \dots, p).$ となる.
 Y の p . d. f. のグラフは図 7 のようになる.

(1)から, $p_1' = \frac{1}{\sqrt{p}}(1, 1, \dots, 1)$ であり, $p_1'X = Y_1$ は, X の p_1 上への正射影の長さ (正, 負の符号をもつ) で, 新座標系 $(0-y_1, y_2, \dots, y_p)$ での第 1 座標を示す.

$$(2)から, P'\Sigma P = \text{diag}(\lambda_1, \underbrace{\lambda', \lambda', \dots, \lambda'}_r, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$$

$$\hat{Y} \equiv \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{r+1} \end{bmatrix} = P_{S(\lambda'|\Sigma)}X \sim N_r(P_{S(\lambda'|\Sigma)}\mu \equiv \nu, \lambda'I_r)$$

すなわち $(Y_2, \dots, Y_{r+1})'$ の p . d. f. のグラフは空間 $S(\lambda'|\Sigma)$ 内で, 中心 ν をもつ同心球群となる. (図 8, 図 9)

$$\hat{Y} = P_{S(\lambda'|\Sigma)}X \quad \text{から} \quad P_{S(H)}\hat{Y}, \quad P_{S(E_{\lambda'})}\hat{Y} \text{ をつくと,}$$

図 8

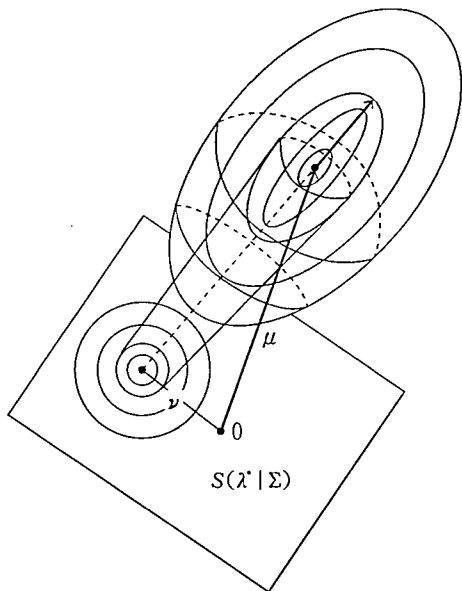
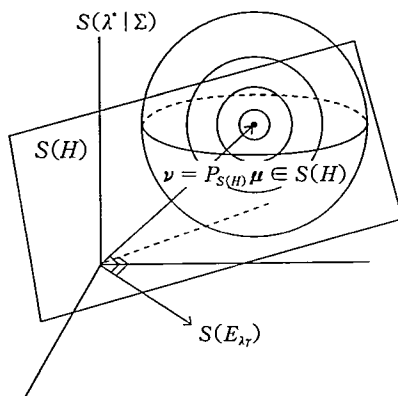


図 9



$$P_{S(H)}\hat{Y} \sim N_l(P_{S(H)}\nu, \sigma^2 I_l) \rightarrow \|P_{S(H)}\hat{Y}\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_l^2 \left(2\lambda = \frac{\|P_{S(H)}\nu\|^2}{\sigma^2} \right)$$

$$P_{S(E_{\lambda'})}\hat{Y} \sim N_{r-l}(\mathbf{O}, \sigma^2 I_{r-l}) \rightarrow \|P_{S(E_{\lambda'})}\hat{Y}\|^2 / \sigma^2 \sim \chi_{r-l}^2(0).$$

$$\text{ここに } P_{S(\lambda' | \Sigma)}\mu = P_{S(H) \oplus S(E_{\lambda'})}\mu = P_{S(H)}\mu + P_{S(E_{\lambda'})}\mu$$

$$\therefore P_{S(\lambda' | \Sigma)}\mu \equiv \nu = P_{S(H)}\mu, \quad (P_{S(E_{\lambda'})}\mu = \mathbf{O})$$

$$\therefore P_{S(H)}\nu = P_{S(H)}(P_{S(H)}\mu) = P_{S(H)}\mu \equiv \nu$$

である.

さて,

$$P_{S(\lambda' | \Sigma)}\mathbf{X} = P_{S(H)}\mathbf{X} + P_{S(E_{\lambda'})}\mathbf{X}, \quad S(H) \perp S(E_{\lambda'}) \text{ より}$$

$$\|P_{S(\lambda' | \Sigma)}\mathbf{X}\|^2 = \|P_{S(H)}\mathbf{X}\|^2 + \|P_{S(E_{\lambda'})}\mathbf{X}\|^2 \text{ となり、}$$

$$\|P_{S(E_{\lambda'})}\mathbf{X}\|^2 / \lambda^* \sim \chi_{r-l}^2(0)$$

$$\left. \begin{aligned} \|P_{S(H)}\mathbf{X}\|^2 / \lambda^* &\sim \chi_l^2 \left(2\lambda_p = \frac{\|P_{S(H)}\mu\|^2}{\lambda^*} \right) \end{aligned} \right\} \text{ 独立となる.}$$

ゆえに

$$\frac{\|P_{S(H)}\mathbf{X}\|^2 / l}{\|P_{S(E_{\lambda'})}\mathbf{X}\|^2 / (r-l)} \sim F_{r-l}^l \quad (\text{under } S(H) \perp \mu \text{ is true})$$

Example 3. $X \sim N_n(a\mathbf{1} + m(t - \bar{t}\mathbf{1}), \sigma^2[(1-\rho)I_n + \rho E_{nn}] \equiv \Sigma)$

ここに $E_{nn} \equiv \mathbf{I}_n \mathbf{I}_n' = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ で, $|\rho| < 1$ を考察する.

このときの Σ は, 固有根として, $\lambda_0 = \sigma^2[1 + (n-1)\rho]$ (単根),

$\lambda_1 = (1-\rho)\sigma^2$, ($n-1$ 重根) をもつ,

λ_0 に対する Σ の単位固有ベクトルは $e(\mathbf{1})' = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)$ であり,

λ_1 に対する Σ の固有ベクトル空間は $S(\mathbf{1})^\perp$ である.

推定空間 $= S(\mathbf{1}, t - \bar{t}\mathbf{1})$, 誤差空間 $= S(\mathbf{1}, t - \bar{t}\mathbf{1})^\perp$ で, よって,

$S(\mathbf{1})^\perp = S(\mathbf{1}, t - \bar{t}\mathbf{1})^\perp \oplus S(t' - \bar{t}\mathbf{1}) = \text{誤差空間} \oplus S(H)$, $S(H) \subset \text{推定空間}$,

よって

$H; \quad S(t - \bar{t}\mathbf{1})^\perp \mu = (a\mathbf{1} + m(t - \bar{t}\mathbf{1})) \iff m = 0$ の仮説検定が行えて,

その要領

$$\|P_{S(t-\bar{t}\mathbf{1})^\perp} X\|^2 = \frac{[(t-\bar{t}\mathbf{1})'X]^2}{\|t-\bar{t}\mathbf{1}\|^2} = \frac{[\sum X_i(t_i-\bar{t})]^2}{\sum (t_i-\bar{t})^2} \sim \lambda_1 \chi_1^2 \left(2\lambda_p = \frac{\|P_{(t-\bar{t}\mathbf{1})}\mu\|^2}{\lambda_1} \right)$$

$$\|P_{S(\mathbf{1}, t-\bar{t}\mathbf{1})^\perp} X\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 - \frac{[\sum_{i=1}^n X_i(t_i-\bar{t})]^2}{\sum_{i=1}^n (t_i-\bar{t})^2} \sim \lambda_1 \chi_{n-2}^2(0).$$

よって, $\|P_{(t-\bar{t}\mathbf{1})}\mu\|^2 = 0 \iff m = 0$, が真のときは,

$$\frac{\frac{[\sum_{i=1}^n X_i(t_i-\bar{t})]^2}{\sum_{i=1}^n (t_i-\bar{t})^2}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 - \frac{[\sum_{i=1}^n X_i(t_i-\bar{t})]^2}{\sum_{i=1}^n (t_i-\bar{t})^2}} \sim F_{n-2}^1$$

をなすことから検定される.

Example 4. X の平均ベクトル $E(X) = a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{f}_1(t) + a_2\mathbf{f}_2(t)$ で, ここに $\mathbf{f}_1(t)$ は t の 1 次, $\mathbf{f}_2(t)$ は t の 2 次で, $\mathbf{1}_n, \mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t)$ は互に直交する 直交多項式とする.

また $V(X) = \sigma^2[(1-\rho)I_n + \rho E_{nn}]$ とする.

すなわち

$$X \sim N_n[a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{f}_1(t) + a_2\mathbf{f}_2(t), \sigma^2[(1-\rho)I_n + \rho E_{nn}]]$$

のときも

$H_2' \quad a_2 = 0$ を帰無仮説とする F_{n-3}^1 検定

$H_{1,2} \quad a_1 = 0, a_2 = 0$ を帰無仮説とする F_{n-3}^2 検定をうる.

図10

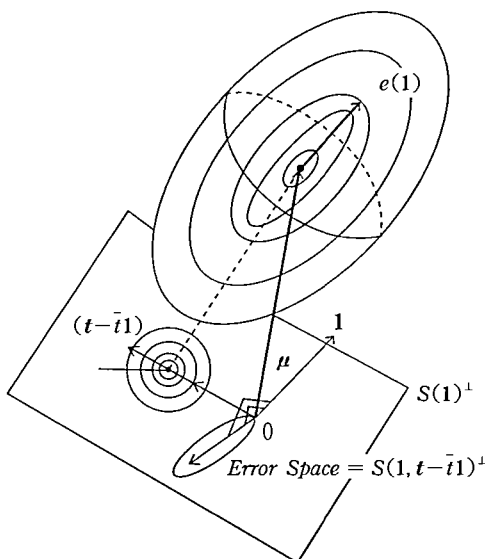
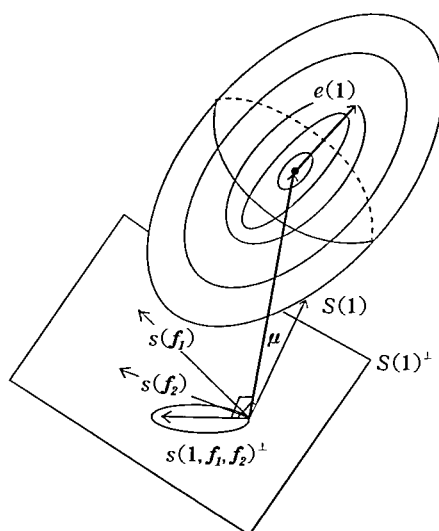


図11



§5. $X_i \sim N_p(R_i 1_p + \mu, \Sigma)$, $i = 1, 2, \dots, n$ の無作為標本 X_1, X_2, \dots, X_n から
の帰無仮説検定問題

\hat{X} をつぎのように定義する

$$\hat{X}' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_n & 0 & \cdots & 0 & I_p \\ 0 & 1_n & 0 & I_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1_n & I_p \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \cdots & \parallel \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b_1 & \cdots & b_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ \parallel \\ \hat{e} \end{bmatrix}$$

$$\hat{e} \sim N_{np}[O_{np}, \text{diag}(\Sigma, \Sigma, \dots, \Sigma) \equiv \hat{\Sigma}]$$

ここに

$\Sigma 1 = \lambda_0 1$ とする (λ_0 は Σ の固有根で, 1 は対応する固有ベクトルである)

Σ の λ_0 でない他の固有根 λ^* と, λ^* に対応する単位固有ベクトルを c^* とすると,
H: $c^{*'} \mu = 0$ を Null Hypothesis とする検定法を考察する.

また λ^* が r 重根なら λ^* に対応する固有ベクトル空間 $S[\lambda^* | \Sigma]$ に対して

H_r : $S[\lambda^* | \Sigma] \perp \mu$ を Null Hypothesis とする検定法も考察する.

初めに $S[a_1, a_2, \dots, a_n] \equiv S[A]$, $S[b_1, b_2, \dots, b_p] \equiv S[B]$ とすると

$$S[A] \cap S[B] = S(1_{np}) \text{ であり,}$$

$$S[A] = S(1_{np}) \oplus S[A^-],$$

$$S(B) = S(1_{np}) \oplus S(B^-) \text{ とすると,}$$

$$R^{np} = \underbrace{S[A^-] \oplus S(\mathbf{1}_{np}) \oplus S[B^-]}_{\text{推定空間}} \oplus \underbrace{S(A, B)^\perp}_{\text{誤差空間}} \quad \text{となる。}$$

λ_1 (単根) に対応する固有ベクトルを \mathbf{c}_1 とすると,

λ_1 は $\hat{\Sigma}$ については n 重根で, 対応する固有空間は n 次元で

$$S[\lambda_1 | \hat{\Sigma}] \equiv S[C] = S \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{c}_1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & \mathbf{c}_1 & & 0 & & \\ \vdots & 0 & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{c}_1 & & \end{array} \right] = S \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{c}_1 & C_1^- \\ \mathbf{c}_1 & \\ \vdots & \text{直交} \\ \mathbf{c}_1 & \\ \parallel & \\ \hat{\mathbf{c}}_1 & \end{array} \right] = S(\hat{\mathbf{c}}_1) \oplus S(C_1^-).$$

少しの考察で

$$S[\hat{\mathbf{c}}_1] \subset S[A, B]$$

$$S[C_1^-] \subset S[A, B]^\perp$$

であり

$$P_{S[C_1^-]} \hat{X} \sim N_n \left[\begin{pmatrix} n\mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 I_n \right]$$

ゆえに

$H; \mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu} = 0$ を帰無仮説とする検定は

$$\frac{\|P_{\hat{\mathbf{c}}_1} \hat{X}\|^2}{\|P_{S[C_1^-]} \hat{X}\|^2 / (n-1)} \sim F_{n-1}^1$$

λ^* が r 重根なら, λ^* に対応する固有空間 $S[\lambda^* | \Sigma]$ の中に互に直交する r 個の単位ベクトル $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ が得られ,

$$H_1; \mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu} = 0$$

$$H_{1,2}; \mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu} = 0, \mathbf{c}_2' \boldsymbol{\mu} = 0, (\text{同時検定})$$

\vdots

$$H_{1,2,\dots,r}; \mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu} = 0, \mathbf{c}_2' \boldsymbol{\mu} = 0, \dots, \mathbf{c}_r' \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (\text{同時検定})$$

固有根		$\lambda^* (r \text{ 重根})$			
		$S(\hat{\mathbf{c}}_1)$ 1 次元	$S(\hat{\mathbf{c}}_2)$ 1 次元		$S(\hat{\mathbf{c}}_r)$ 1 次元
			誤差空間 (部分空間)		
		$S(C_1^-)$ dim $= n-1$	$S(C_2^-)$ dim $= n-1$		$S(C_r^-)$ dim $= n-1$

例えば $H_{1,2}$ の検定には

$$\frac{\|P_{S(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)} \hat{X}\|^2 / 2}{\|P_{S(C_1^-, C_2^-, \dots, C_r^-)} \hat{X}\|^2 / r(n-1)} \sim F_{r(n-1)}^2$$

ここに

$\|P_{S(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)} \hat{X}\|^2 = \|P_{\hat{\epsilon}_1} \hat{X}\|^2 + \|P_{\hat{\epsilon}_2} \hat{X}\|^2$ である。また

$$\begin{aligned} \|P_{S(C_1^-, C_2^-, \dots, C_r^-)} \hat{X}\|^2 &= \sum_{i=1}^r \|P_{S(C_i^-)} \hat{X}\|^2 = \sum_{i=1}^r \{\|P_{S(C_i)} \hat{X}\|^2 - \|P_{\hat{\epsilon}_i} \hat{X}\|^2\} \\ &= \sum_{i=1}^r \{(c_i' X_1)^2 + (c_i' X_2)^2 + \dots + (c_i' X_n)^2 - (c_i' X_1 + c_i' X_2 + \dots + c_i' X_n)^2 / n\} \end{aligned}$$

として計算すると簡単である。

Example 5.

本紀要例えば1995, 理工学部研究紀要

宇喜多, 他2名著: *Random Vector x の母平均 μ の多重比較 $c_i' \mu = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) の2つの検定方式の有効性の比較part II.*

の§3. 4次元Cyclic Vector x について $c_i' \mu$ の検定 (p.4 ~ p.6) を見られたい。

§6. 結び

本小文は引用論文(4)(5)(6)(9)(10)(11)(14)(15)(16)(17)の1988年より1996年に亘る論文の諸定理を幾何学的に考察したもので, 諸定理そのものの発見ではない。しかし諸定理の発見とその定理の真であることを解析的, 代数的に説明するのは, 10篇の論文で見る通り相当厄介である。しかし本論文のように分布に対して, 幾何学的考察を加えると, それ等の結論の正しいことが比較的簡単にして(図形によって)直観的に理解される。

また分散分析法, 回帰分析法とゆーくりつど幾何とは密接な関係にあることを本文は示していると思う。

最後に本小文のAbstractは第64回日本統計学会(1996)講演報告集に掲載されているし, 当学会で研究発表されたものである。

引用図書

- (1) S. F. Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.
- (2) A. M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis", Marcel Dekker, Inc.
- (3) T. W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis", John Wiley & Sons.
- (4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版。
- (5) 宇喜多義昌 (1988), 多変量統計解析, $\|P_{sx}\|^2$ とその分布の研究, 序説—明星大学出版部。
- (6) 宇喜多義昌 (1987), 多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部。

- (8) M. Siotani, 他 2 名 (1985), Modern Multivariate Statistical Analysis, (American Sciences Press.)

引用論文

- (1) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学研究紀要（理工学部）。1987（第23号）
- (2) Y. Ukita & K. Noda : About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1987.
- (3) Y. Ukita & K. Noda : Testing Hypothesis on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI 45th Contributed Papers) 1987.
- (4) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Modelの場合の仮説検定について，明星大学研究紀要－理工学部。1988（第24号）
- (5) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Modelの場合のF－検定法の応用，明星大学研究紀要－理工学部，1989（第25号）
- (6) 宇喜多義昌：Generalized Linear Modelの場合の仮説検定について（Ⅱ），明星大学研究紀要－理工学部1989（第25号）
- (7) Y. Ukita "The Decomposition of The Principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The Linear Model.", (東京理科大学研究専攻科雑誌. No1, Vol.5, 1984)
- (8) Y. Ukita, K. Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis $c'\mu=0$, And Its Application to The Regression Theorem.", (Japan China Symposium on Statistics) 1989.
- (9) 宇喜多義昌：Generalized Linear Modelの場合の仮説検定について，明星大学研究紀要－理工学部1990（第26号）
- (10) 宇喜多義昌，小野英夫：一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察，明星大学研究紀要－理工学部1991（第27号）
- (11) 宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫：Generalized Linear Modelをもつ2要因2水準の要因実験で，反復実験の場合の統計的仮説検定問題について，明星大学研究紀要－理工学部1992（第28号）
- (12) Y. Ukita, K. Noda, and E. Miyaoka : "UMP Invariant Test for a Generalized Linear Model.", (Journal of Multivariate Analysis, Vol.40 No1 January 1992).
- (13) Y. Ukita, K. Noda, and E. Miyaoka : "On F-TESTS AND LINEAR HYPOTHESIS IN A GENERAL LINEAR MODEL.", (Communication in Statistics Theory and Methods 21 (7) 1992)
- (14) 宇喜多義昌，塩谷実：Cyclic Random Vector x の母平均 μ の多重比較 $H; c_i'\mu = 0 (i = 1, 2, \dots, l)$ に関するUMP-Testについて。明星大学研究紀要－理工学部1993（第29号）（平成4年度科学研究費研究成果論文）
- (15) 宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫：Random Vector x の母平均Vector μ の多重比較 $c_i'\mu = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ の2つの検定方式の有効測定の比較。明星大学研究紀要－理工学部1994（第30号）（平成5年度科学研究費研究成果論文）
- (16) 宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫：Random Vector x の母平均Vector μ の多重比較 $c_i'\mu = 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ の2つの検定方式の有効測定の比較，PartⅡ（同上 紀要31号）（平成6年度科学研究費研究成果論文）
- (17) 宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫：General Linear Modelの場合の回帰係数に関する仮説検定の研究（同上 紀要32号）（平成7年度科学研究費研究成果論文）