

柔軟で薄いシート的高速気流中における挙動に関する研究 (第一報) 微小擾乱的挙動の理論的評価法

山口 信行*

(1) 前書き

気流中でその前縁を保持されて吹き流された布、紙、フィルム等では自然にばたつきが発生する現象が観察されることがある。旗のばたつきがその最も普通に見かけられる例である。また、印刷機、フィルム製造機等の産業機械では、薄くかつ柔軟な枚葉シートあるいは連続帯状シート（紙、プラスチック・フィルム、布、等）を空気中で高速走行させ、あるいは高速でハンドリングする操作が多い。このような状況ではシートのばたつきが発生しやすく、その品質に重大な影響が出やすい。

このようなばたつきはシートの挙動と気流の運動の干渉によって自励的に発生するが、これをコントロールすることができれば、例えば印刷機の場合を例にとれば、印刷の品質の向上、印刷の高速化、印刷された紙の質の向上（折れやしわの減少その他）の上で大きな意味がある。すなわち現在進みつつあるこの種の機械の高速化や製品品質の向上にとって、高速気流中でのシート挙動の安定化は不可欠であろう。

このような状況から、シート挙動の予測技術の研究に対する必要性は産業界では非常に高い。しかし、シートの剛性、慣性力、空気力、運動様式、等が複雑に干渉し合う現象であるため、取扱いが困難であり、これまで現場的対応によって状況の改善や改良が進められてきたにすぎなかった。従って、このばたつき現象を力学的に解明することは、これらの機械類の開発、設計、改良、そして運転にとって非常に有益であり、今後の技術向上に不可欠であろう。

さらにこの技術は、フィルムやテープ等を利用するさらに広い技術分野（例えば情報機器）や超薄板のハンドリング等にもわたる広い分野にも展開できるものと考えられる。

この問題は、気流の影響を受けつつ大きく変形し、またその変形が気流に影響を与える、という空力弾性的現象の一つの極限であることが大きな特徴である。従来、断面形状を保ったまま全体として並進または振じれ運動をする物体はかなりの研究が積み重ねられてきているが、このように変形しやすいものについての研究はほとんどなされていない。最近ようやく [1, 2] の報告が発表され始めたばかりである。旗のように剛性の無いもののばたつき現象については多少の検討はあるが、ある程度の剛性を持つシートに関する工学的取扱いにまでは一般化されていない。

このような観点から、明星大学理工学部機械学科流体工学研究室では、高速気流中での柔軟シートの挙動の定量的予測とコントロールを最終的な目標として、研究を開始している。まず気流中で吹き流されたシートの微小振動、それに影響する因子、そしてその影響

* 理工学部機械工学科 教授 流体力学

の様子に関する実験的および理論的な予測法の構築を試みつつある。

その第一段階として、一様気流中にその前縁を保持され、吹き流されている二次元のシートの微小擾乱運動としての振動的挙動に着目して、その運動の基礎式を導き、振動状況の算出と安定限界の評価のための計算手法を作成したので、本稿にてその考え方の骨子を報告する。

(2) 計算と対象の概要と前提

紙やプラスチック・シート等のように、柔軟ではあるが多少の曲げ剛性を持つ材質の二次元のシート面が流体の流れの中におかれた場合のばたつきに関する計算手法をつぎの前提において導く (図1 (a) 参照)。

- i) シートは長さ L_s 、一様厚み t_s 、幅は一定で十分広いものとし、単位幅で代表される二次元的状况とする。シートの密度は ρ_s とする。
- ii) 流れは上流で一様で、速度は U_a とする。この主流方向を x 方向とする。これに垂直な方向を y 方向とする。シート面は平均的には x 軸上を直線状に吹き流されている。
- iii) この状況で、シート面は円周波数 ω で y 方向に定常的微小振動を行うものとする。その変位を $y_s(x)$ とする。

以上の状況を手法上次のように取り扱うことにする (図1 (b) および図2 参照)。

- a) シートの質量や流体力は連続な分布系であるが、これを短い区間に分割して、節点での量により近似表現し、かつ接続する方法を利用する。
- b) 流れは本質的にポテンシャル的とし、微小振動するシートの上に存在する非定常束縛渦と非定常流出渦の分布によって表現する。ただし流体粘性による摩擦張力は想定する。
- c) シートの運動は微小振動する柔軟な梁の運動として取り扱う。ただしシートは剛性を持つが、流れに対しては厚みは無視できるとする。

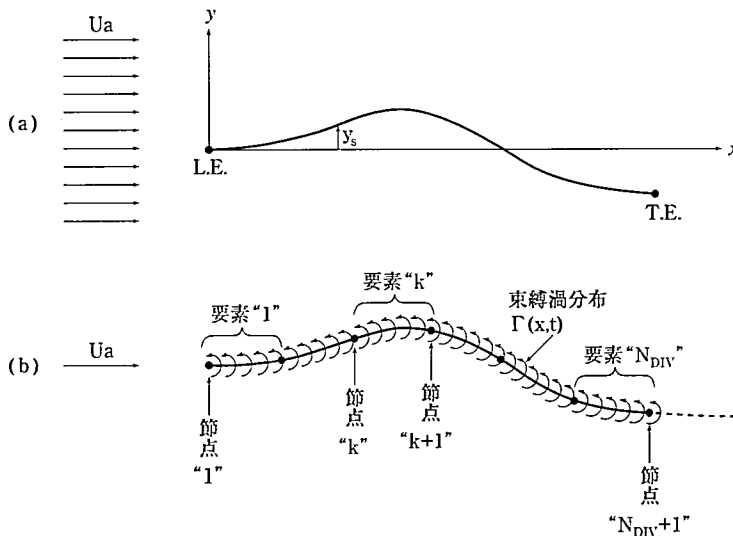


図1 シート流れと挙動の近似的表現

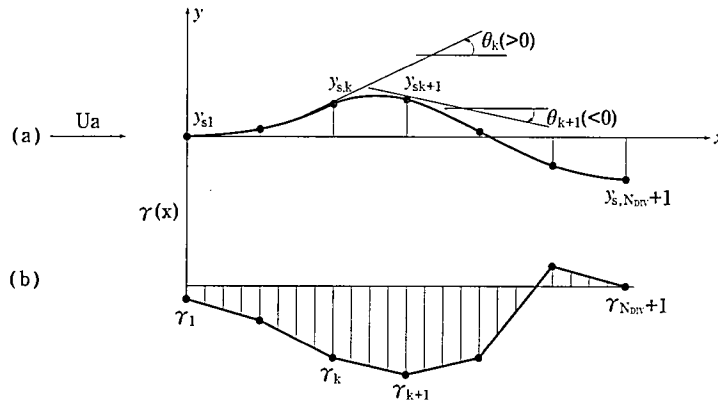


図2 シート流れの区間分割近似

- d) シートに作用する力は、渦により誘起されるシート上下面の圧力差、流れの摩擦により発生する張力、そしてシート要素の運動による慣性力であるとする。
- e) 流れとシート運動は、各要素の代表点（例えば中点）においてシートの傾斜と相対流れ方向が一致するという条件により整合させられる。
- f) 振動は微小であり、その2次以上の項は無視できるとする。
- g) シートのたわみは、曲げ変形のみ注目することとし剪断変形については無視できるものとする。

次節以降でこれらの詳細な式を導く。

(3) 流れの記述

(3-1) 流れの状況と近似

流れをポテンシャル理論に基づいて記述し、シート面に付着した非定常束縛渦の分布とそれらからの放出渦とによって流れ場を決定する。まずそれらの渦の分布と強さを想定し、それにより誘起される流れ場を導く。

図1(a)に示される運動をしているシートを同図(b)に示されるような N_{Div} 個の微小シート要素に分割する。各要素は等しい長さを持つものとする。隣り合う要素の接続点を節点と呼ぶことにする。各要素には前縁側から順次1, 2, ..., N_{Div} と名付ける。番号 k の要素の前縁と後縁の節点の番号は、各々、 k と $k+1$ である。節点番号1はシートの前縁、 $N_{Div}+1$ は後縁を示す。これらの番号を添字に使って各位置における変数の値を示す。

シートの全面にわたって束縛渦は連続的に分布しているが、それを要素毎に分割し、その区間毎に直線状分布で与えられる折れ線で近似する(図2)。すなわち各要素の両節点における渦強さをつないだ直線片によりその分布は表現されるものとする。シートの y_s 座標は非常に小さいと仮定されているので、これらの渦は x 軸上に存在するものと近似され、境界条件も x 軸上で適用される。

要素 k の範囲上に分布する束縛渦の時間的変化により発生する放出渦は、その要素の後縁の節点 $k+1$ から放出されるものとする。

(3-2) 束縛渦

シート面を表現する非定常束縛渦の強度分布を $\Gamma(x, t)$ と表し、円周波数 ω で定常的に変動しているものとする。 t は時刻を表す。これを変数分離し、かつ主流速度 Ua で無次元化し、次の形で表現する。 x 以外の変数の表現は時刻に関する複素数表示とし、また上添記号*で無次元複素振幅を表す。

$$\Gamma(x, t) = \gamma(x) \exp(j\omega t) \quad (1.1)$$

$$\gamma(x) = Ua \gamma^*(x^*) \quad (1.2)$$

ここで j 虚数単位

$\gamma(x)$ シート面束縛渦強度振幅分布 ($0 \leq x \leq L_s$)

$\gamma^*(x^*)$ 無次元渦強度振幅分布 ($0 \leq x^* \leq 1$)

$x^* = x/L_s$ 無次元 x 座標 (1.3)

x 以外の変数に関しても、以下、この形式の変数分離と基準化表示を行う。

束縛渦 $\gamma(x)$ を、節点 i ($i = 1, 2, \dots, N_{DIV} + 1$)における渦強さで代表させ、添字 i をつけて表す。

$$\gamma_i = \gamma(x_i) \quad \text{または} \quad \gamma_i^* = \gamma^*(x_i^*) \quad (1.4)$$

またシート分割要素 i の長さ Δx_i および無次元長 Δx_i^* を次式で表す。

$$\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i) / L_s \quad \text{または} \quad \Delta x_i^* = x_{i+1}^* - x_i^* \quad (1.5)$$

要素 i の上での渦強度分布を次のように直線近似表現する (図2参照)。

$$\gamma(x) = \gamma_i + (\gamma_{i+1} - \gamma_i)(x - x_i) / \Delta x_i \quad (1.6a)$$

$$\gamma^*(x^*) = \gamma_i^* + (\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*)(x^* - x_i^*) / \Delta x_i^* \quad (1.6b)$$

(3-3) 放出渦

各要素の循環変化に由来する放出渦はその要素の後端節点から放出されとする。時刻 t において要素 k の全束縛渦量 $G_k(t)$ は次式で与えられる。

$$G_k(t) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Gamma(x, t) dx \quad \text{on } k \quad (1.7)$$

これは、(1.1) 式を利用して、次式で近似できる。

$$G_k(t) = (1/2) (\gamma_k + \gamma_{k+1}) \Delta x_k \exp(j\omega t) \quad (1.8)$$

時刻 t においてこの $k+1$ 点から放出される要素 k の放出渦 (図3) を $\Gamma_{wk}(x_{k+1}, t)$ と表記する。この放出渦が主流に乗って速度 Ua で移流するとして、渦の保存則により、短い時間 Δt に対して次式が成り立つ。

$$(dG_k(t)/dt) \Delta t + (Ua \Delta t) \Gamma_{wk}(x_{k+1}, t) = 0$$

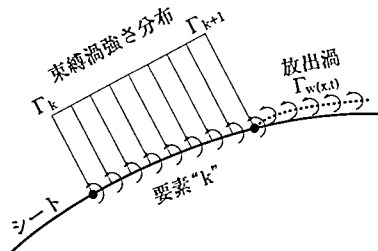


図3 要素“k”の束縛渦と放出渦

すなわち

$$\Gamma_{wk}(x_{k+1}, t) = -(1/Ua) (dG_k(t)/dt) \quad (1.9)$$

上式に (1.8) 式を代入し整理すると

$$\Gamma_{wk}(x_{k+1}, t) = -j(1/2) (\omega/Ua) (\gamma_k + \gamma_{k+1}) \Delta x_k \exp(j\omega t) \quad (1.10)$$

この渦が速度Uaでx方向に移流するとすれば、座標x、時刻tにおいてその強さは

$$\Gamma_{wk}(x, t) = \Gamma_{wk}(x_{k+1}, t - (x - x_{k+1})/Ua) \quad (1.11)$$

と表現される。従って要素 k からの放出渦の一般的な表現は式 (1.10) と (1.11) を利用して整理すると次式で与えられる。

$$\Gamma_{wk}(x, t) = \gamma_{wk}(x) \exp(j\omega t) \quad (1.12)$$

$$\gamma_{wk}(x) = Ua \gamma_{wk}^*(x^*) \quad (1.13)$$

ここで

$$\gamma_{wk}^*(x^*) = -j(1/2) (\nu \Delta x_k^*) (\gamma_k^* + \gamma_{k+1}^*) \exp(-j\nu(x^* - x_{k+1}^*)) \quad (1.14)$$

ここで ν は無次元円周波数であり、次式で与えられる。

$$\nu = \omega L_s / Ua \quad (1.15)$$

(3-4) 誘起速度

要素 i の中点 i^c (座標 x_i^c) に誘起される y 方向の速度 v_i^c は、束縛渦による誘起速度 v_{Bi} と放出渦による誘起速度 v_{Fi} との和として与えられる。

$$v_i^c = v_{Bi} + v_{Fi} \quad (1.16)$$

ここで

$$x_i^c = (1/2) (x_i + x_{i+1}) \quad (1.17)$$

要素 k の寄与による i^c 点での誘起速度 $v_{Bi, k}$ と $v_{Fi, k}$ は次式で表現できる。

$$v_{Bi, k} = -1/(2\pi) \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Gamma(x, t) / (x - x_i^c) dx \right) \quad (1.18)$$

$$v_{Fi, k} = -1/(2\pi) \left(\int_{x_{k+1}}^{\infty} \Gamma_w(x, t) / (x - x_i^c) dx \right) \quad (1.19)$$

これより

$$v_{Bi} = \sum_{k=1}^{N_{ov}} v_{Bi, k} \quad (1.20)$$

$$v_{Fi} = \sum_{k=1}^{N_{ov}} v_{Fi, k} \quad (1.21)$$

(3-4-1) 束縛渦誘起速度

v_{Bi} は x_i^c 点に特異性を持つから、次のように分けて考える。

(a) 要素 k ($k \neq i$) 上の束縛渦による寄与 $v_{Bi, k}$ は、(1.18) 式に (1.6) 式を代入し、積分評価して、次式を得る。

$$v_{Bi, k} = -\frac{1}{2\pi} \exp(j\omega t) \left[\frac{(x_i^c - x_k) \gamma_{k+1} - (x_i^c - x_{k+1}) \gamma_k}{\Delta x_k} \ln \left| \frac{x_{k+1} - x_i^c}{x_k - x_i^c} \right| + (\gamma_{k+1} - \gamma_k) \right] \quad (1.22)$$

(b) 要素 i 上の束縛渦による寄与 v_{Bii} は、中央の i^c 点に特異性がある。そこで渦強度分布を次のように近似表現し直す。

$$\Gamma(x, t) = (\gamma_i^c + (\gamma_{i+1} - \gamma_i) (x - x_i^c) / \Delta x_i) \exp(j\omega t) \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (1.23)$$

これを (1.18) 式に代入し、評価して、結局次式を得る。

$$v_{Bi,i} = -\frac{1}{2\pi} \exp(j\omega t) (\gamma_{i+1} - \gamma_i) \quad (1.24)$$

束縛渦により i^c 点に誘起される y 方向速度は、(1.20) 式から次のようになる。

$$v_{Bi} = Uav_{Bi}^* \exp(j\omega t) \quad (1.25)$$

$$v_{Bi}^* = -\frac{1}{2\pi} (\gamma_{NDIV}^* - \gamma_i^*) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{NDIV} \left\{ \frac{(x_i^{*c} - x_k^*) \gamma_{k+1}^* - (x_i^* - x_{k+1}^*) \gamma_k^*}{\Delta x_k^*} \ln \left| \frac{x_{k+1}^* - x_i^{*c}}{x_k^* - x_i^{*c}} \right| \right\} \quad (1.26)$$

(3-4-2) 放出渦誘起速度

要素 k からの放出渦によって i^c 点に誘起される速度 $v_{Fi,k}$ は (1.19) 式に (1.12-14) 式を代入して次式で与えられる。

$$v_{Fi,k} = j \frac{\omega \Delta x_k}{4\pi} (\gamma_k + \gamma_{k+1}) \exp(j\omega t) \int_{x_{k+1}}^{\infty} \frac{\exp\left(-j\omega \frac{x - x_{k+1}}{Ua}\right)}{x - x_i^c} dx \quad (1.27)$$

これを整理して次の表示式を得る。

$$v_{Fi,k} = Uav_{Fi,k}^* \exp(j\omega t) \quad (1.28)$$

$$v_{Fi,k}^* = (1/4\pi) (\Delta x_k^*) (\gamma_k^* + \gamma_{k+1}^*) \cdot F_{ik} \quad (1.29)$$

ここで

$$F_{ik} = j\nu \exp(-j\nu(x_i^{*c} - x_{k+1}^*)) \cdot I \quad (1.30)$$

$$I = \int_{x_{k+1}^*}^{\infty} \frac{\exp\{-j\nu(x^* - x_{k+1}^*)\}}{x^* - x_i^{*c}} dx^* \quad (1.31)$$

各要素からの放出渦 γ_{wk} の i^c 点への全寄与は (1.21) 式から次式で与えられる。

$$v_{Fi}^* = \sum_{k=1}^{NDIV} (1/4\pi) (\Delta x_k^*) (\gamma_k^* + \gamma_{k+1}^*) \cdot F_{ik} \quad (1.32)$$

(3-4-3) i^c 点全誘起速度

以上導かれた 2 種類の渦からの誘起速度を加え合わせると全誘起速度が次式で得られる。

$$v_i^c = Uav_i^{*c} \exp(j\omega t) \quad (1.33)$$

$$v_i^{*c} = v_{Bi}^* + v_{Fi}^* \quad (1.34)$$

(3-5) シート面上圧力分布

大文字は平均値、小文字は微小擾乱成分として、 x 方向の速度成分を $(Ua + u)$ 、 y 方向の速度成分を v 、そして圧力を $(P + p)$ と表記し、2次元の Euler の方程式 (x 方向) に代入し、2次以上の擾乱量を小さいとして省略すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Ua \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.35)$$

上式を x 方向に積分し、無限上流での圧力を p_0 とすると、 x 軸上での圧力分布を与える式と

して次式が得られる。

$$p = p_0 - \rho_a \int_{-\infty}^x \frac{\partial u}{\partial t} dx - \rho_a U a u \quad (1.36)$$

シート上下面での圧力をそれぞれ添字UとLで表すと、シート面圧力差として

$$\Delta p(x, t) = p_L - p_U \quad (1.37)$$

(1.36) 式を利用するとこの圧力差は次式で表される。

$$\Delta p(x, t) = -\rho_a \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial t} (u_L - u_U) dx - \rho_a U a (u_L - u_U) \quad (1.38)$$

束縛渦の渦度と上下面速度の関係 (図4) から

$$u_L - u_U = \Gamma(x, t) \quad (1.39)$$

従って (1.38) 式より次式を得る。

$$\Delta p(x, t) = -\rho_a \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(x, t) dx - \rho_a U a \Gamma(x, t) \quad (1.40)$$

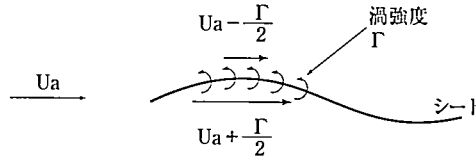


図4 渦強さと上下面速度

上式に (1.1) および (1.2) 式を代入し、無限上流からシート前縁までは渦は存在しないことを利用すると (1.40) 式を次のようにおくことができる。

$$\Delta p(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 p^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (1.41)$$

$$p^*(x^*) = -2 \gamma^*(x^*) - 2j\nu \int_0^{x^*} \gamma^*(x^*) dx^* \quad (1.42)$$

(1.42) 式を i および $i+1$ 点において離散化し、両式の差をとると

$$p_{i+1}^* - p_i^* = -2(\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*) - 2j\nu \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} \gamma^*(x^*) dx^* \quad (1.43)$$

(1.43) 式の右辺積分項を近似評価すると次式を得る。

$$p_{i+1}^* - p_i^* = -2(\gamma_{i+1}^* - \gamma_i^*) - j\nu (\gamma_{i+1}^* + \gamma_i^*) \Delta x_i^* \quad (1.44)$$

(3-6) 張力

本計算方法は本質的にポテンシャル理論に基づいているが、シートにかかる摩擦による張力はここで注目している現象に対して重要な役割を果たしていると考えられる。このため、各要素にかかる張力を x 座標のみの関数として次の形で考慮に入れておく。

$$T(x) = (1/2) \rho_a U a^2 L_s \tau(x^*) \quad (1.45)$$

$\tau(x^*)$ が無次元化された張力係数である。 i 点に対して次式で表される。

$$T_i = (1/2) \rho_a U a^2 L_s \tau_i \quad (1.46)$$

張力はシート後縁ではゼロ、またはある与えられた値で、上流側にむかって増えてゆく。これを次式で近似する。

$$T_i = T_{i+1} + 2c_{fi}(1/2)\rho_a U a^2 \Delta x_i \quad (1.47)$$

$$\tau_i = \tau_{i+1} + 2c_{fi} \Delta x_i^* \quad (1.47a)$$

ここで c_{fi} は要素 i の摩擦係数で、倍数の2はシート両面の寄与を表している。

張力は時間の関数である可能性も考えられるが、ここでは上述のように x 座標のみの関数と想定しておく。この点については実験結果を得てから、必要ならば、改善する予定である。

(4) 弾性体としてのシートの運動の具体的表現

分割されたシートの各要素は短い長さの柔軟な梁と見做される。図5に示すようにその要素 i は両端の節点 i と $i+1$ の間で弾性梁として運動するものとする。これらの運動と力の状態はその両側の要素 $i-1$ および $i+1$ と連続的に接続される。

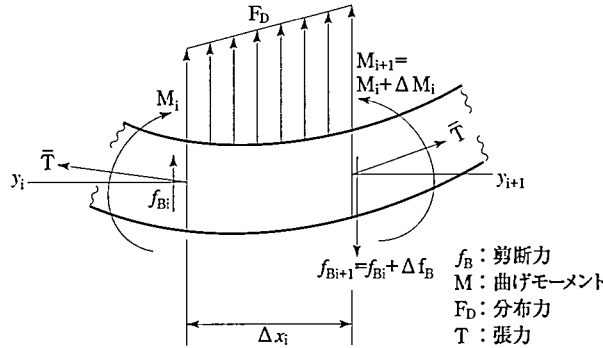


図5 梁にかかる力

(4-1) y 方向運動に関する基礎式

f_{Bi} を i 断面での剪断力、 f を要素 i 上の y 方向平均的分布力、 $\rho_s t_s$ を面密度とする。この時要素 i の y 方向運動方程式は次のようになる。

$$\rho_s t_s \Delta x_i \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} = f \Delta x_i + f_{Bi} - f_{Bi+1}$$

ここで剪断力に関し次の近似式

$$f_{Bi+1} = f_{Bi} + \frac{\partial f_B}{\partial x} \Delta x_i$$

を利用して上式を整理すると次式を得る。

$$\frac{\partial f_B}{\partial x} = f - \rho_s t_s \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

f としては圧力差 Δp と張力の効果 $\overline{T} \partial \theta / \partial x$ が含まれている。上式の右辺全項をまとめて分布力 f_D と書くことにすると、次式を得る。 \overline{T} は平均張力である。

$$f_D(x, t) = \Delta p + \overline{T} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \rho_s t_s \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

結局次式を得る。

$$\frac{\partial f_B(x, t)}{\partial x} = f_D(x, t) \quad (2.3)$$

(4-2) 要素iの回転運動に関する基礎式

I_{Pi} を要素iの回転慣性モーメント、 M_i をi断面における曲げモーメントとして回転運動に関する式を立てると次のようになる。分布力の影響は小さいとする。

$$I_{Pi} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i}{\partial t^2} = M_{i+1} - M_i - f_{Bi+1} \frac{\Delta x_i}{2} - f_{Bi} \frac{\Delta x_i}{2} - T_{i+1} \cos \theta_{i+1} (y_{i+1} - y_i) + T_i \cos \theta_i (y_i - y_{i-1})$$

ここで $\bar{\theta}_i$ は要素iの平均的な傾斜角を表す。さらに

$$M_{i+1} = M_i + \frac{\partial M_i}{\partial x} \Delta x_i$$

$$f_{Bi+1} + f_{Bi} = 2f_{Bi}$$

$$T_{i+1} \cos \theta_{i+1} = T_i \cos \theta_i = \bar{T}_i$$

と近似して上式に代入し、整理すると次式を得る。ここで \bar{T}_i は要素iの平均的張力とする。

$$\frac{\partial M_i}{\partial x} = f_{Bi} + \frac{I_{Pi}}{\Delta x_i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i}{\partial t^2} + \bar{T}_i \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i} \quad (2.4)$$

通常の梁の公式では、回転運動無しという仮定の下に右辺第2項が無視されている。また第3項の張力（軸力）効果も無視されることが多いがここでは考慮に入れておく。これら2項を付加項と呼ぶことにする。

(4-3) 剪断力の評価

(i) 分布力の表示法

シート変位 y とその傾斜 θ を次のように変数分離して基準化表示する。

$$y(x, t) = L_s y^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (2.5)$$

$$\theta(x, t) = \theta^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (2.6)$$

圧力差 Δp には (1.42) 式、張力には (1.47) 式を利用する。そして

$$f_D(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 f_B^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (2.7)$$

と表示すると、(2.3) 式から無次元分布力 f_B^* として次式が得られる。

$$f_B^*(x^*) = p^*(x^*) + 2\mu\nu^2 y^*(x^*) + \tau(d\theta^*(x^*)/dx^*) \quad (2.8)$$

ここでは μ は無次元の質量比で、次式で与えられる。

$$\mu = \rho_s t_s / \rho_a L_s \quad (2.9)$$

である。

(ii) 剪断力と分布力の関係

$$f_B(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 L_s f_B^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (2.10)$$

とおき、 f_B^* を無次元剪断力とすると、式 (2.3) と (2.8) とから次式が導かれる。

$$\frac{df_B^*(x^*)}{dx^*} = f_B^*(x^*) \quad (2.11)$$

上の関係式を要素 i (節点 $x_i \sim x_{i+1}$ の間) に適用する。ただし単純化のため、分布力 f_D はこの間で両節点での値の間を直線的に変化すると仮定する。またこの区間内でシート

面の傾斜の変化率は一定で、下式で与えられるとする。

$$d\theta^*(x^*)/dx^* = (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) / \Delta x_i^* \quad (2.12)$$

以上の想定から (2.11) 式は次のように表される。

$$df_B^*(x^*)/dx^* = p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^* + \tau_i(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) / \Delta x_i^* + (x^* - x_i^*)((p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu\nu^2(y_{i+1}^* - y_i^*)) / \Delta x_i^* \quad (2.13)$$

以下の節で (2.13) 式を $x^* = x_i^*$ を起点として積分する。

(iii) 剪断力の表示式

(2.13) 式を 1 階積分すると次式が得られる。

$$f_B^*(x^*) - f_{B_i}^* = (p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^*)(x^* - x_i^*) + \tau_i(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \frac{(x^* - x_i^*)}{\Delta x_i^*} + \{(p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu\nu^2(y_{i+1}^* - y_i^*)\} \frac{1}{\Delta x_i^*} \frac{1}{2} (x^* - x_i^*)^2 \quad (2.14)$$

ここで $f_{B_i}^*$ は積分定数であるが、 $x^* = x_i^*$ における無次元化剪断力で、未知数の一つである。

$x^* = x_{i+1}^*$ において $f_B^* = f_{B_{i+1}}^*$ とおくと、これも未知数として次式を得る。

$$f_{B_{i+1}}^* - f_{B_i}^* = (p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^*) \Delta x_i^* + \tau_i(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) + \frac{1}{2} \{(p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu\nu^2(y_{i+1}^* - y_i^*)\} \Delta x_i^* \quad (2.15)$$

(4-4) 曲げモーメントの表示式

(i) 付加項の表示

式 (2.4) の右辺の付加項は要素 i の全体的運動を表しているの、これらを近似的に次のように表すことにする。第 2 項はそのまま利用する。第 1 項については

$$\theta_i = (y_i - y_{i+1}) / \Delta x_i \quad (2.16)$$

従って

$$d^2\theta_i/dt^2 = -\omega^2(y_i - y_{i+1}) / \Delta x_i \quad (2.17)$$

また長さ Δx_i の要素の回転慣性モーメント $I_{P,i}$ は次式で与えられる。

$$I_{P,i} = \rho_s t_s \Delta x_i^3 / 12 \quad (2.18)$$

これらを付加項に代入し、さらに基準化表示すると次式になる。

$$\text{付加項} = \frac{1}{2} \rho_a U a^2 L_s \left(\tau_i - \frac{1}{6} \mu \nu^2 \Delta x_i^{*2} \right) \frac{y_{i+1}^* - y_i^*}{\Delta x_i^*} \exp(j\omega t) \quad (2.19)$$

ここでこれらの付加項は比較的表現精度が低いと考えられるので、修正係数としてそれぞれに δ と ε を乗じておくことにする。これにより次式を得る。

$$\text{付加項} = \frac{1}{2} \rho_a U a^2 L_s (\delta \tau_i - \varepsilon \frac{1}{6} \mu \nu^2 \Delta x_i^{*2}) \frac{y_{i+1}^* - y_i^*}{\Delta x_i^*} \exp(j\omega t) \quad (2.20)$$

これらの付加項については後日検討することとする。

(ii) 曲げモーメント

曲げモーメントを次のように表示する。

$$M(x, t) = (1/2) \rho_a U a^2 L_s^2 M^*(x^*) \exp(j\omega t) \quad (2.21)$$

式 (2.10), (2.15) そして式 (2.4) と (2.20) とから次式を得る。

$$dM^*(x^*)/dx^* = f_B^* + (\delta\tau_i - \varepsilon \frac{1}{6} \mu\nu^2 \Delta x_i^{*2}) \frac{y_{i+1}^* - y_i^*}{\Delta x_i^*} \quad (2.22)$$

上式を $x^* = x_i^*$ から積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} M^*(x^*) = & (p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^*) \frac{1}{2} (x^* - x_i^*)^2 + \tau_i \frac{\theta_{i+1}^* - \theta_i^*}{\Delta x_i^*} \frac{1}{2} (x^* - x_i^*)^2 + f_{Bi}^* (x^* - x_i^*) \\ & + M_i^* + \frac{1}{\Delta x_i^*} \{ (p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu\nu^2 (y_{i+1}^* - y_i^*) \} \frac{1}{6} (x^* - x_i^*)^3 \\ & + (\delta\tau_i - \varepsilon \frac{1}{6} \mu\nu^2 \Delta x_i^{*2}) \frac{y_{i+1}^* - y_i^*}{\Delta x_i^*} (x^* - x_i^*) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで M_i^* は積分定数で、 $x^* = x_i^*$ における基準化曲げモーメントで、まだ決定されていない変数の一つである。

$x^* = x_{i+1}^*$ において $M^* = M_{i+1}^*$ とおき、得られる式を整理すると下式になる。

$$\begin{aligned} M_{i+1}^* - M_i^* = & \frac{1}{2} (p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^*) \Delta x_i^{*2} + \frac{1}{2} \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \Delta x_i^* + f_{Bi}^* \Delta x_i^* \\ & + \frac{1}{6} \{ (p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu\nu^2 (y_{i+1}^* - y_i^*) \} \Delta x_i^{*2} + (\delta\tau_i - \varepsilon \frac{1}{6} \mu\nu^2 \Delta x_i^{*2}) (y_{i+1}^* - y_i^*) \end{aligned} \quad (2.24)$$

(4-5) シート面の傾斜

曲げモーメントとたわみの関係から

$$M(x, t) = E_s I_s \partial^2 y_s(x, t) / \partial x^2 \quad (2.25)$$

ここでシートの剛性と空力力の比を表す無次元数

$$\beta = E_s I_s / ((1/2) \rho_a U a^2 L^3) \quad (2.26)$$

を導入し、整理すると次式を得る。

$$M^*(x^*) = \beta d^2 y^*(x^*) / dx^{*2} \quad (2.27)$$

(2.27) と (2.23) 式から $M^*(x^*)$ を消去して得られる関係式をさらに $x^* = x_i^*$ から積分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \beta (dy^*(x^*)/dx^*) = & \frac{1}{6} (p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^*) (x^* - x_i^*)^3 + \tau_i \frac{\theta_{i+1}^* - \theta_i^*}{\Delta x_i^*} \frac{1}{6} (x^* - x_i^*)^3 + \\ & \frac{1}{2} f_{Bi}^* (x^* - x_i^*) + \frac{1}{24} \{ (p_{i+1}^* - p_i^*) + 2\mu\nu^2 (y_{i+1}^* - y_i^*) \} \frac{(x^* - x_i^*)^4}{\Delta x_i^*} \\ & + M_i^* (x^* - x_i^*) + \beta \theta_i^* + (\delta\tau_i - \varepsilon \frac{1}{6} \mu\nu^2 \Delta x_i^{*2}) \frac{y_{i+1}^* - y_i^*}{\Delta x_i^*} \frac{1}{2} (x^* - x_i^*)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで θ_i^* は積分定数で、 $x^* = x_i^*$ における基準化されたシート面傾斜で、まだ決定されていない変数の一つである。

$x^* = x_{i+1}^*$ において次のようにおく。

$$(dy^*(x_{i+1}^*)/dx^*) = \theta_{i+1}^* \quad (2.29)$$

上2式から得られる式を整理すると下式になる。

$$\beta (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) = \frac{1}{6} (p_i^* + 2\mu\nu^2 y_i^*) \Delta x_i^{*3} + \frac{1}{6} \tau_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \Delta x_i^{*2}$$

するものとする。すなわち図 6 に示すように

$$(v_i^c - (dy_i^c/dt)) / (Ua + u_i^c) = \theta_i^c \quad (3.1)$$

この式において、2 次以上の微小量を無視できて次のようになる。

$$v_i^c - (dy_i^c/dt) = Ua\theta_i^c \quad (3.2)$$

基準化表示を利用して整理すると、次式を得る。

$$v_i^{*c} - j\nu y_i^{*c} = \theta_i^{*c} \quad (3.3)$$

ここで中点における y_i^{*c} と θ_i^{*c} の値を節点 i および $i+1$ 点での座標と傾斜とから近似的に評価する。シート要素の形態は、両節点での y 座標と傾斜の値を満足させる 4 次式に近似して次の評価式を得る。

$$y_i^{*c} = (3/4)y_i^* + (1/4)y_{i+1}^* + (1/8)\Delta x_i^*\theta_i^* - (1/4)\Delta x_i^*\theta_{i+1}^* \quad (3.4)$$

$$\theta_i^{*c} = (3/2)(y_{i+1}^* - y_i^*)/\Delta x_i^* - (1/4)\theta_i^* - (1/4)\theta_{i+1}^* \quad (3.5)$$

(3.4) および (3.5) 式を (3.3) 式に代入し、整理すると、次式を得る。

$$v_i^{*c} + (-j\nu(3/4) + (3/2)/\Delta x_i^*)y_i^* + (-j\nu(1/4) - (3/2)/\Delta x_i^*)y_{i+1}^* + (-j\nu(1/8)\Delta x_i^* + (1/4))\theta_i^* + (j\nu(1/4)\Delta x_i^* + (1/4))\theta_{i+1}^* = 0 \quad (3.6)$$

(6) 解法

前節までに導かれた方程式は以下の 6 種類になる。

- (i) 束縛渦および放出渦により誘起されたシート面上誘起速度とシートの状況に関係づける式・・・(3.6) 式
- (ii) シート面上の圧力差分布を与える式・・・(1.44) 式
- (iii) シートの運動と剪断力分布の関係を与える式・・・(2.15) 式
- (iv) シートの運動とモーメント分布の関係を与える式・・・(2.24) 式
- (v) シートの運動と面傾斜分布の関係を与える式・・・(2.30) 式
- (vi) シートの運動と面座標分布の関係を与える式・・・(2.32) 式

これらの関係式がシート要素 $i = 1, 2, \dots, N_{DIV}$ の各々に対して成立する。

そして各節点 $i = 1, 2, \dots, N_{DIV}, N_{DIV} + 1$ における

渦強度 γ_i , 圧力差 Δp_i , シート座標 y_i , シート傾斜 θ_i , 曲げモーメント M , 剪断力 f_{Bi} の 6 種類の変数が 6 ($N_{DIV} + 1$) 個の未知数として存在している。

ここで与えられた連立方程式を解くための境界条件は、例えば、前縁固定で後縁が自由吹き流しの場合、次のようなものが考えられる。

- (i) シート前縁で保持： $y_1 = 0$
- (ii) シート前縁で固定： $\theta_1 = 0$
- (iii) 後縁で Kutta-Joukowski の定理が成立： $\gamma_{N_{DIV}+1} = 0$
- (iv) 後縁で剪断力が存在しない： $f_{B, N_{DIV}+1} = 0$
- (v) 後縁で曲げモーメントが存在しない： $M_{N_{DIV}+1} = 0$
- (vi) 例えば前縁で圧力変動させる： $P_1 = 0. \quad 0 \quad 0 \quad 1$ (例えば)

(4.1)

状況に応じてその他にも境界条件は考えられる。それらの適切と考えられるものを適用すれば良い。この場合、変数を複素数のままで解くとすれば、方程式と未知数の数が $6 \times N_{DIV}$ 個の連立方程式系になる。

この連立方程式は形式的には次の形になる。

$$(c_{m,n}) (z_n) = (b_m) \quad (4.2)$$

ここで

$(C_{m,n})$	係数マトリックス
$(Z_{m,n})$	変数ベクトル
(b_m)	定数ベクトル

係数マトリックスと定数ベクトルの各成分については、紙面の都合でここでは省略する。

(7) 中立点の評価

本方法の連立方程式系の係数の中には円周波数 ω または無次元円周波数 ν が未定のまま含まれている。通常、定係数線形連立方程式の場合には係数マトリックスから特性根を決定できることが多いが、本問題では簡単には解けない形をしている。

そこでここでは、ある円周波数 ω または無次元円周波数 ν を仮定して各係数値を算出し、係数マトリックスを決定し、これに基づいて連立方程式を解き、未知数群を決定する。この結果から何らかの基準に基づいてその妥当性の有無を評価することにする。その基準を満たさない場合には、さらに別の円周波数 ω または無次元円周波数 ν を仮定して以上の過程を実施し、満足するまで繰り返すことにする。

その評価基準としては、シートの全長にわたる流体仕事の一周期 T_c にわたる平均量の正負を考える。

$$\text{流体仕事 (TE)} = \int_0^{L_s} \left(\int_0^{T_c} \Delta p \frac{dy_s}{dt} dt \right) dx \quad (5.1)$$

これを用いて

$$\begin{aligned} \text{TE} > 0 &: \text{安定} \\ \text{TE} = 0 &: \text{中立} \\ \text{TE} < 0 &: \text{不安定} \end{aligned} \quad (5.2)$$

と評価する。この考え方については付録A-2を参照されたい。要するに、本来安定または不安定な振動系を定常的な振動状態に維持するために、外力としての流体の仕事が正（すなわち外部からエネルギーを供給）または負（エネルギーを外部に吸収）になる、と考えるものである。

上に述べた評価基準については実験的な研究も行なって調査したいと考える。その結果によってはより適切な評価基準を求める必要があるかもしれない。今後の研究の展開もそれに関わってくる。

(8) 結語

柔軟で薄いシート的高速気流中におけるばたつきの発生と挙動を予測する理論的な手法を構築した。本手法は、気流中で前縁を保持されて吹き流されているシートについて、微小振動を仮定し、流れを渦分布により表現し、シートの運動を区間分割された柔らかな梁の運動として表現している。その分割の節点における離散変数でその流れと運動を代表させ、連立させて解くものである。

本手法は比較的単純で明快な考え方に基づいており、必要最小限の入力データで良く、コーディングしやすい。有効なツールとして役立つと考えている。

著者は現在パラメトリックな計算を進めつつあり、その結果については別報にて報告する予定である。またさらに実験を行う計画で準備しつつある。その結果と対比してさらに

改良を図って行く予定である。

(9) 引用文献

- [1] 山口, 柔軟で薄いシートの高速気流中における挙動に関する研究 (第1報) 微小擾乱的挙動の理論的評価方法, 日本機械学会第72期通常総会講演会論文集 No. 95-1, p. 189-190, 1995-3
- [2] 渡部, 他2名, 紙のフラッタに関する基礎研究, 日本機械学会第73期全国大会講演論文集 (V), No. 95-10, p. 145-146, 1995-9

付録A-1 記号

E_s	シート材のヤング率
f_B	剪断力
f_D	分布力
F_{ik}	影響係数, (1.30) 式
G_k	要素kの全渦量
I	影響積分, (1.31) 式
I_s	シートの断面二次モーメント
j	虚数単位
L_s	シート全長
M	モーメント
$p(x, t)$	シート面圧力, 圧力差
$p^*(x^*)$	無次元圧力振幅 (複素数)
TE	流体がシートに対してなす仕事
$T(x)$	張力
T_c	1周期の時間 ($\omega/2\pi$)
t	時刻
t_s	シート厚み
u	x 方向誘起速度
U_a	主流速度
v	y 方向誘起速度
v_B	束縛渦による y 方向誘起速度成分
v_F	放出渦による y 方向誘起速度成分
x	主流方向座標
x^*	無次元 x 座標
y	主流に垂直方向の座標
$y_s(x, t)$	シートの y 方向座標
$y^*(x^*)$	無次元シート振幅 (複素数)
β	シート剛性/空力力比, (2.24) 式
$\Gamma(x, t)$	非定常束縛渦の強さ
$\gamma(x)$	束縛渦の渦強さ
$\gamma^*(x^*)$	束縛渦の無次元渦強度振幅 (複素数)
$\Gamma_w(x, t)$	非定常放出渦の強さ
$\gamma_w(x)$	放出渦の渦強さ
δ	付加項修正係数, (2.20) 式
Δp	シート上下面圧力差
Δx	シート要素長さ
ε	付加項修正係数, (2.20) 式
$\theta(x, t)$	シート面傾斜
$\theta^*(x^*)$	無次元シート面傾斜振幅 (複素数)
θ	シート要素平均傾斜

ρ_a	流体密度
ρ_s	シート密度
$\tau(x)$	シート要素にかかる張力の無次元量, (1.45) 式
μ	質量比, (2.9) 式
ν	無次元円周波数, (1.15) 式
ω	円周波数
上添字	
*	無次元化された量
c	要素中点における量
下添字	
L	シート下面
U	シート上面
i, j, k	要素あるいは節点の番号

付録A-2 加振法による自励振動発生条件の判定について

線形系であれば, その記述方程式が高次であっても, すべて2次以下の式に分解でき, その特性根の近傍ではそのモードのみを考えれば良い. そこで代表的な場合として2次方程式を考える.

最も単純な質量 m -ばね k -減衰 μ から成る系に関し, 次の自由振動の式を考える. ここで m , μ , k は定数とし, m は正とする.

$$m (d^2y/dt^2) + \mu (dy/dt) + ky = 0 \quad (A2-1)$$

上式を解くため, 次の形の解を仮定する.

$$y = A \exp((s+j\omega)t) \quad (A2-2)$$

ここで A 変位振幅
j 虚数単位
s 特性根実部
 ω 特性根虚部

これを式 (A2-1) に代入して根を求めると, $(\mu^2 - 4km) < 0$ の場合を考えれば

$$s = -\mu/2m \quad (A2-3)$$

$$\omega = \pm \sqrt{(4km - \mu^2)/4m} \quad (A2-4)$$

従って $\mu > 0$ の場合は振動は減衰し, 安定である. 一方 $\mu < 0$ すなわち負の減衰の場合は振動しつつ発散し, 不安定である. これが自励振動である.

ここでこの系を小さな外力

$$F = \varepsilon \exp(j\omega t) \quad (A2-5)$$

で加振して定常応答を調べてみる. ε は外力の振幅で, 実数とする. このときの方程式は次のようになる.

$$m (d^2y/dt^2) + \mu (dy/dt) + ky = \varepsilon \exp(j\omega t) \quad (A2-6)$$

この系の応答を次の形に仮定する.

$$y = A \exp(j\omega t) \quad (A2-7)$$

これを (A2-6) 式に代入して応答振幅を求めると次のようになる.

$$A = \varepsilon / [(k - m\omega^2) + j\omega\mu] \quad (A2-8)$$

この時振動1周期 T_c の間に系に入るエネルギーTEを計算してみる.

$$TE = \int_0^{T_c} \text{Re}(F) \cdot \text{Re}(dy/dt) dt \quad (A2-9)$$

ここで Re は実部を示す. この式に必要な量を代入して演算すると, 次の結果を得る.

$$TE = \pi \varepsilon^2 \omega \mu / [(k - m\omega^2)^2 + (\omega\mu)^2] \quad (A2-10)$$

従って

$$TE < 0 \quad \text{の場合に} \quad \mu < 0$$

$$TE > 0 \quad \text{の場合に} \quad \mu > 0$$

となって、TEの負が自励振動発生に、正が発生無しに対応している。すなわち加振力が1周期に渡ってなす仕事の平均が負の場合に自励振動が発生する。

現象的には、発散して行くはずの本来不安定な系から外力がエネルギーを吸収することで、あるいは安定な系に外力がエネルギーを供給することで、定常振動が維持されている、と考えられる。

以上の考えを利用すれば、定常加振によって周波数応答を求め、その時のTEを評価してその正負によって安定判別を行うことができる。特性根を求め難い方程式の場合にはこの方法が便利と思われる。支配方程式の係数が周波数依存的な系でも、考えている点の近傍では、強制振動加振力の1周期平均仕事TEが0を通過する点あるいは符号変化する点は $\mu=0$ に相当し、中立点と見做して良いと考えられる。

本報告で採用している評価法はこの考えに基づいている。ただし当然の事ながら、加振の際に振動モードに著しい影響を及ぼすようなやり方は避けなければならず、その適用には注意が必要である。