Random Vector $\boldsymbol{x}$ の母平均Vector $\boldsymbol{\mu}$ の多重比較 $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ ($i=1, 2, \cdots, r$) の2つの検定方式の有効性の比較 PartII

宇喜多義昌* 塩谷実** 小野英夫***

§1, Summary & Introduction.

T.W. Anderson(1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" 2nd Edition John Wiley & Sons.の page 170. section 5,3,6の，A Problem of Symmetry に次のtheoremがある．即ち，

"$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ は$N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$からの$i\cdot i\cdot d$のとき，次のNull Hypothesis，H：$\mu_1=\mu_2=\cdots\cdots=\mu_p$，検定" は，

C：$(p-1)\times p$の行列で，$r(C)=p-1$で，$C\boldsymbol{1}_p=\boldsymbol{0}_{p-1}$とする．

ここに$\boldsymbol{\mu}'=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p)$, $\boldsymbol{1}_p'=(1, 1, \cdots, 1)$,

なるCにより，$\boldsymbol{x}$から次のような$\boldsymbol{y}$に変換

$$\boldsymbol{y}_i=C\boldsymbol{x}_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

して，$\boldsymbol{y}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{y}_n$から平均ベクトル$\overline{\boldsymbol{y}}$と，分散共分散行列$D_y$，すなわち，

$$\overline{\boldsymbol{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i=C\overline{\boldsymbol{x}}$$

$$s_y=\frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{y})'\equiv\frac{1}{n-1}S_y$$

とすると，

(A) $\mathrm{T}^2=n\overline{\boldsymbol{y}}'s_y^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}=(n-1)n\overline{\boldsymbol{y}}'S_y^{-1}\overline{\boldsymbol{y}} \sim {}_{p-1}T^2_{n-1}$
(under $C\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0}$ is true)

(A′) $n\overline{\boldsymbol{y}}'S_y^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}\cdot\dfrac{n-(p-1)}{p-1} \sim F^{p-1}_{n-(p-1)}$
(under $C\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0}$ is true)

が示されている．

註1. Null Hypothesis Hc：$C\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0} \longleftrightarrow \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p$

何故なら，$C\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0} \rightleftarrows S(C')\perp\boldsymbol{\mu}$

$C\boldsymbol{1}_p=\boldsymbol{0} \qquad S(C')\perp\boldsymbol{1}_p$. $\dim S(C')=p-1$.

$\rightleftarrows \qquad \boldsymbol{\mu}=k\boldsymbol{1}_p$

---

*，**，*** 一般教養教授 数学

本研究は平成6年度科学研究費（一般研究C）課程番号0668-0293の「標本分布の漸近展開近似の精度と，標本の大きさ，次元数との関係」（代表者 塩谷実）の研究式果として発表するものである．

この定理は容易に一般化出来て，

$x_i \sim N_p(R_i \mathbf{1}_p+\boldsymbol{\mu} \quad \Sigma)$　$i=1,\ 2,\ \cdots n$，なる$x_1\cdots x_n$の無作為標本から(ただし先験的に$\mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}=0$とする)

D；　$\underset{r\times p}{D}{}'\mathbf{1}_p=\underset{r\times 1}{\mathbf{0}}$，$r(D)=r$

について

<u>Null Hypothesis $D'\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0} \rightleftarrows S(D)\perp\boldsymbol{\mu}$</u> の検定には　($D$により$\boldsymbol{x}$から$\boldsymbol{y}$に変換)

$$\boldsymbol{y}_i=D'\boldsymbol{x}_i(i=1,\ 2\cdots n)$$

して，$\boldsymbol{y}_1$，$\cdots\boldsymbol{y}_n$から平均$\overline{\boldsymbol{y}}$と，修正積和行列$S_y$

$$\overline{\boldsymbol{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i,\quad S_y=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'$$

に対して，

$H_D: D'\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0} \rightleftarrows S(D)\perp\boldsymbol{\mu}$ が真のときは，

$$(\mathrm{A}''): \sqrt{n}\,\overline{\boldsymbol{y}}'\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'\right]^{-1}\sqrt{n}\,\overline{\boldsymbol{y}}\cdot\frac{n-r}{r}$$

$$=n\overline{\boldsymbol{y}}'S_y^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}\cdot\frac{n-r}{r} \sim F^{r}_{n-r}$$

この(A″)の検定法は，$\Sigma>0$の条件のみで，Σ 行列の形とかΣの要素σ_{ij}に全くindependentな検定法である長所はあるが，却ってΣに対するinformationを無視するために有効性を弱める短所をもつ．そこで我々はΣのinformationを取りこんだ有効な検定法(B)方式を示した．その小文が同研究紀要(1994，第30号)の題名，宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫“Random Vector $\boldsymbol{x}$の母平均Vector $\boldsymbol{\mu}$の多重比較$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ $(i=1,\ 2\cdots r)$の2つの検定方式の有効性の比較” である．即ち，

$\boldsymbol{x}\sim N_p(R_x\mathbf{1}_p+\boldsymbol{\mu},\ \Sigma)$の任意標本$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n$に対して，$\Sigma\mathbf{1}_p=\lambda_0\mathbf{1}_p$が成立しているとき，

$S(\lambda^*\mid\Sigma)$：λ^*はΣのλ_0とは相異なる固有根で，重根度をrとする．このλ^*に対応するr次元の固有空間とする．

<u>Null Hypothesis H_B；$S(\lambda^*|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu}$とする</u>

註2. $S(\lambda^*|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu}\longleftrightarrow\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ $(i=1,\ 2\cdots r)$，where $\boldsymbol{c}_i\in S(\lambda^*|\Sigma)$

で$\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{c}_r$は独立とする．

上式の検定には，

$S(\lambda^*|\Sigma)\ni\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{d}_r$(単位直交ベクトル)から

$$\boldsymbol{y}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1'\\ \boldsymbol{d}_2'\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}_r'\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i=D'\boldsymbol{x}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots n)\text{とすると，}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}_i=D'\boldsymbol{x}_i \sim N_r(D'\boldsymbol{\mu},\ D'\Sigma D)\\ \boldsymbol{y}_i\perp\!\!\!\perp\end{cases}$$

より

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i \sim N_r(D'\boldsymbol{\mu},\ \frac{1}{n}\lambda^*\mathrm{I}_r)\\ &tr\ \{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'\} \sim \lambda^*\chi^2_{(n-1)r}\end{aligned}\right]\perp\!\!\!\perp$$

より

$$H_B : S(\lambda^*|\Sigma) \equiv S(D) \perp \boldsymbol{\mu} \iff D'\mu = \mathbf{0} \text{ が真のときは,}$$

$$(\mathrm{B}) : \frac{\|\sqrt{n}\,\overline{\boldsymbol{y}}\|^2}{tr\{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'\}} \cdot \frac{(n-1)r}{r} \sim F^r_{(n-1)r}$$

である. 前論文で, $S(\lambda^*|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu}$, $\dim S(\lambda^*|\Sigma)=r\geqq 2$ の検定には(A″)方式より(B)方式が検定力が強いことを示した. 本小文では§2, §3において具体的な事例をあげて, (B)方式の検討を試みる.

§2. Repeated Measures Modelでの $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p$ の検定

$\boldsymbol{x}_i \sim N_p(R_i\boldsymbol{1}_p+\boldsymbol{\mu},\ \Sigma^*)\quad i=1,\ 2,\ \cdots n.$

$$\text{ここに } \Sigma^* = \sigma^2\begin{bmatrix} 1, & \rho, & \cdots \rho \\ \rho, & 1, & \cdots \rho \\ \vdots & & \vdots \\ \rho, & \rho, & \cdots 1 \end{bmatrix} = \sigma^2[\rho\boldsymbol{1}_p\boldsymbol{1}_p'+(1-\rho)I_p]$$

このとき$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots\boldsymbol{x}_n$ なる任意標本から

H : $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p(=0)$の検定問題を考える.

$\Sigma^*\boldsymbol{1}_p=\sigma^2\ [(p-1)\rho+1]\boldsymbol{1}_p$から分かるように, Σ^*につき

$\{(p-1)\rho+1\}\sigma^2\cdots$単根で, 単位固有ベクトル$e(\boldsymbol{1})'=\frac{1}{\sqrt{p}}(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$が対応し.

$(1-\rho)\sigma^2\equiv\sigma^{*2}\cdots(p-1)$重根で, 固有空間$S(\boldsymbol{1})^\perp$が対応し $\dim S(\boldsymbol{1})^\perp=p-1$.

明らかに$S(\boldsymbol{1})^\perp$の基底単位ベクトルe_1, e_2, $\cdots e_{p-1}$が次のようにとれる.

$$S(\boldsymbol{1})^\perp = S\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & -\frac{(p-1)}{\sqrt{p(p-1)}} \end{bmatrix} \equiv S[e_1,\ e_2,\ \cdots e_{p-1}] = S(E)$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e'_{p-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \underset{(p-1)\times p}{E'}\,\boldsymbol{x}$$

で $\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots\boldsymbol{x}_n$のときに対応する$\boldsymbol{y}$を$\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\cdots\boldsymbol{y}_n$とすると, 各々は独立であって,

$\boldsymbol{y}_i \sim N_{p-1}(E'\boldsymbol{\mu},\ \sigma^2 I_{p-1})\quad i=1,\ 2,\ \cdots n$

これより(B)方式によって，次のNull Hypothesisが検定される．

$H: E'\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0} \rightleftarrows \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p(=0)$が真のとき，

B方式 $$\frac{(\sqrt{n}\,\overline{\boldsymbol{y}}')(\sqrt{n}\,\overline{\boldsymbol{y}})}{tr\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'}\cdot\frac{(n-1)(p-1)}{(p-1)} \sim F^{p-1}_{(n-1)(p-1)}$$

$E'\boldsymbol{1}_p=\mathbf{0}_{p-1}$，$r(E)=p-1$であるから，

$H: E'\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0} \rightleftarrows \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p(=0)$が真のとき

A方式で，$n\overline{\boldsymbol{y}}'S_{\bar{y}}^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}\cdot\dfrac{n-(p-1)}{p-1}$

$$=n\overline{\boldsymbol{y}}'\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'\right]^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}\cdot\frac{n-(p-1)}{p-1} \sim F^{p-1}_{n-(p-1)}$$

で検定出来るが明らかにB方式が有効である．

§3．4次元 Cyclic Vector $\boldsymbol{x}$について，多重比較$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ の検定について，

定義 $\boldsymbol{x}$が4次元のCyclic Vectorで正規分布をするとは

$$\boldsymbol{x}'=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \sim N_4(R_x\boldsymbol{1}_4+\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma}_c)$$

ここに

$$\Sigma_c=\sigma^2\begin{bmatrix}1&\rho&0&\rho\\ \rho&1&\rho&0\\ 0&\rho&1&\rho\\ \rho&0&\rho&1\end{bmatrix}>0$$

をいう．

4次元のCyclic Vectorの任意標本$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots\boldsymbol{x}_n$からB方式による多重比較$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots r)$を考える．

Σ_cの固有根　　　　　　固有ベクトル

$\lambda_0=\sigma^2(1+2\rho)$,　単根 $\longrightarrow e'(\boldsymbol{1})=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,\ 1)$

$\lambda_1=\sigma^2$　2重根 $\longrightarrow e_1'=\frac{1}{2}(1,\ 1,-1,-1)$

$\qquad\qquad\qquad\searrow e_2'=\frac{1}{2}(1,-1,-1,\ 1)$

$\lambda_2=\sigma^2(1-2\rho)$　単根 $\longrightarrow e_3'=\frac{1}{2}(1,-1,\ 1,-1)$

なることから，

$$H_{\lambda_1}:\begin{cases}e_1'\boldsymbol{\mu}=0\\ e_2'\boldsymbol{\mu}=0\end{cases} \rightleftarrows \begin{array}{l}(\mu_1+\mu_2)-(\mu_3+\mu_4)=0\\ (\mu_1-\mu_2)-(\mu_3-\mu_4)=0\end{array}$$

の同時比較をNull Hypothesisとする検定には，

$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}e_1'\\ e_2'\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\equiv \underset{2\times4}{E}\boldsymbol{x}$ で，$\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n$のそれぞれに対応する$\boldsymbol{y}$を$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{y}_n$とし，H_{λ_1}の検定には，

B方式：$$\frac{n\overline{\boldsymbol{y}}'\overline{\boldsymbol{y}}}{tr\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'}\quad\frac{(n-1)2}{2}\sim F^2_{(n-1)\cdot 2}$$

(under H_{λ_1} is true)

の検定が，

A″方式：$$\frac{n-2}{2}\cdot n\overline{\boldsymbol{y}}'\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})'\right]^{-1}\overline{\boldsymbol{y}}\sim F^2_{n-2}$$

(under H_{λ_1} is true)

より有効である．

また Null Hypothesis $H_{\lambda_2}:(\mu_1-\mu_2)+(\mu_3-\mu_4)=0$ の "$\boldsymbol{e}_3'\perp\boldsymbol{\mu}$" 検定では，A″方式もB方式も同一式で，

$$y=\boldsymbol{e}_3'\boldsymbol{x}$$

でx_1，x_2，$\cdots x_n$に対応するy_1，$y_2\cdots$，y_nとその平均$\overline{y}$と，y_1，$y_2\cdots$，y_nからの偏差平方和$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$を使って．

(A″)式＝(B)式　で，

Null Hypothesis　$H_{\lambda_2}:(\mu_1-\mu_2)+(\mu_3-\mu_4)=0$の検定には，

$$\frac{n\overline{y}^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}\quad\frac{(n-1)}{1}\sim F^1{}_{n-1}$$

(under　H_{λ_2} is true)

で検定される．

註3　4次元のCyclic Vector x_kは，第k反復で，2因子2水準での分割法実験で

kブロック	主効果$(-\beta)$ B_1　　$(+\beta)$ B_2
主効果 $(-\alpha)A_1$ $(+\alpha)A_2$	$\begin{matrix} x_{k1} & x_{k2} \\ x_{k4} & x_{k3} \end{matrix}$

α：Aの主効果，β：Bの主効果，γ：A，Bの交互作用とすると

$$E(x_{k1})=R_k+\mu_1=R_k-\alpha-\beta+\gamma$$
$$E(x_{k2})=R_k+\mu_2=R_k-\alpha+\beta-\gamma$$
$$E(x_{k3})=R_k+\mu_3=R_k+\alpha+\beta+\gamma$$
$$E(x_{k4})=R_k+\mu_4=R_k+\alpha-\beta-\gamma$$

$$V(\boldsymbol{x}_k)=\alpha^2\begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

で $\boldsymbol{x}_k \sim N_4(R_k\boldsymbol{1}_4+\boldsymbol{\mu},\ V(\boldsymbol{x}_k))$で4次元Cyclic Vectorであり

H_{λ_1}は，主効果$\alpha=\beta=0$にあたる．

H_{λ_2}は，交互作用$\gamma=0$にあたる．

ことを附記しておく．

引用図書

(1) S.F.Arnold(1981)"The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.

(2) A.M.Kshirsagar(1972)"Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.

(3) T.W.Anderson(1984)"An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" 2nd Edition John Wiley & Sons.

(4) 宇喜多義昌(1975)，実験計画法，森北出版．

(5) 宇喜多義昌(1988)，多変量統計解析，$\|P_s\boldsymbol{x}\|^2$とその分布の研究，序説一明星大学出版部．

(6) 宇喜多義昌(1987)，多変量解析一標本分布とその応用一明星大学出版部．

(7) M.Siotani. 他2名(1985)，Modern Multivariate Statistical Analysis, (American Sciences Press.)

引用論文

(1) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学研究紀要(理工学部)．1987(第23号)

(2) Y.Ukita & K.Noda：About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova(The Second Japan-China Symposium on Statistics)1987.

(3) Y.Ukita &K.Noda：Testing Hypothesis on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI46th Contributed Papers)1987.

(4) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Modelの場合の仮説検定について，明星大学研究紀要一理工学部1988(第24号)

(5) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Modelの場合のF一検定法の応用，明星大学研究紀要一理工学部，1989(第25号)

(6) 宇喜多義昌：Generalized Linear Modelの場合の仮説検定について(II)，明星大学研究紀要一理工学部1989(第25号)

(7) Y.Ukita"The Decomposition of The Principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The Linear Model(東京理科大学研究専攻科雑誌. No1, Vol 5, 1984.

(8) Y.Ukita, K.Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis contrast $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$, And Its Application The Regression Theorem"(Japan China Symposium on Statisics)1989.

(9) 宇喜多義昌：Generalized Liner Modelの場合の仮説検定についてIII，明星大学研究紀要一理工学部1990(第26号)

(10) 宇喜多義昌，小野英夫：一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察，明星大学研究紀要一理工学部1991(第27号)

(11) 宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫：Generalized Linear Modelをもつ2要因2水準の要因実験で，反復実験の場合の統計的仮説検定問題について，明星大学研究紀要一理工学部1992(第28号)

(12) Y.Ukita, K.Noda, and E.Miyaoka："UMP Invariant Test for a Generalized Linear Model."(Journal of Multivariate Analysis. Vol 40. No1. January1992).

(13) Y.Ukita, K.Noda, and E.Miyaoka：“On F-TESTS AND LINEAR HYPOTHESIS IN A GENERAL LINER MODEL, (Communications in statistics Theory and Methods 21(7)1992).
(14) 宇喜多義昌，塩谷実：Cyclic Random Vector $\boldsymbol{x}$の母平均$\boldsymbol{\mu}$の多重比較H：$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0(i=1, 2\cdots l)$に関するUMP-Testについて．明星大学研究紀要―理工学部1993(第29号)(平成4年度科学研究費研究成果論文)
(15) 宇喜多義昌，塩谷実，小野英夫：Random Vector $\boldsymbol{x}$の母平均$\boldsymbol{\mu}$の多重比較$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0(i=1, 2, \cdots r)$の2つの検定方式の有効性の比較．明星大学研究紀要―理工学部1994(第30号)(平成5年度科学研究費成果論文)