

Random Vector x の母平均Vector μ の多重比較 $c_i' \mu = 0 (i=1, 2, \dots, r)$ の 2 つの検定方式の有効性の比較

宇喜多義昌* 塩谷実** 小野英夫***

§1. Summamy & Introduction

Random Vector x は平均 $R_x I_p + \mu$, 分散共分散行列 Σ をもつ正規分布をするとする。すなわち

$$x_i \sim N_p(R_i I_p + \mu, \Sigma) \quad i=1, 2, \dots, n$$

このRandom Sample Vectors x_1, x_2, \dots, x_n により,

帰無仮説: $S(c_1, c_2, \dots, c_r) \perp \mu$ の検定問題を考える。

ここに c_1, c_2, \dots, c_r は互に直交する単位ベクトルで, $S(c_1, c_2, \dots, c_r)$ は c_1, \dots, c_r を基底とする Vector Space である。また $c_i' I_p = 0 (i=1, 2, \dots, r)$ とする, したがって, $\dim S(c_1, c_2, \dots, c_r) = r$ で, $S(c_1, c_2, \dots, c_r) \perp I_p$ である。ここに $I_p' = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p)$ とする。

$$\text{帰無仮説: } S(c_1, c_2, \dots, c_r) \perp \mu \iff c_1' \mu = c_2' \mu = \dots = c_r' \mu = 0$$

であることに注意しておく。このため

$$\text{変換 } y = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_r' \end{bmatrix} x = \underset{r \times p}{C'} x \dots\dots\dots (1.1)$$

で, $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ に対応する y を y_1, y_2, \dots, y_n とすると,

$$(n-1)n \overline{y}' \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})' \right]^{-1} \overline{y} \sim T_{r, n-1}^2$$

これを少し変形して

$$n \overline{y}' \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})' \right]^{-1} \overline{y} \frac{n-r}{r} \sim F_{r, n-r}^r \quad (\text{under } S(c_1, c_2, \dots, c_r) \perp \mu \text{ is true}) \dots (A)$$

として仮説が検定される。

特に $S(c_1, c_2, \dots, c_r) \equiv S(\lambda^* | \Sigma)$ のときを考える。ここに $S(\lambda^* | \Sigma)$ とは, $\Sigma I_p = \lambda_0 I_p$ が成立する Σ の固有根 λ_0 以外の Σ の r 重の固有根 λ^* に対応する r 次元の固有空間とする。

$\dim S(\lambda^* | \Sigma) = r$ であるから, $S(\lambda^* | \Sigma)$ の中で直交単位固有ベクトル c_1, c_2, \dots, c_r が選べて, $S(\lambda^* | \Sigma) = S(c_1, c_2, \dots, c_r)$ であり, $\lambda_0 \neq \lambda^*$ より, $S(\lambda^* | \Sigma) \perp S(\lambda_0 | \Sigma) \ni I_p$ より $S(\lambda^* | \Sigma) \perp I_p$ である。

$$\text{帰無仮説: } S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu \iff c_1' \mu = c_2' \mu = \dots = c_r' \mu = 0.$$

の検定には, 従来主張しているように,

$$\frac{\|\sqrt{n} \overline{y}\|^2}{tr \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})' \right\}} \times \frac{n-r}{r} \sim F_{(n-1)r}^{r(n-1)r} \quad (\text{under } S(\lambda^* | \Sigma) \equiv S(c_1 \dots c_r) \perp \mu \text{ is true}) \dots\dots (B)$$

(A) 検定量と(B)検定量を比較するに、

- (i) $r = 1$ のときは2つの検定式は同一である。
- (ii) $r \geq 2$ のときは同一ではない。

また、(A) の場合の仮説の設定は、(B) の場合の仮説の設定より一般的で、自由性がある。すなわち、(A) の場合では、条件 $S(c_1, \dots, c_r) \perp I_p$ のみで、任意の r への独立な式(ただし、 r は $1 \leq r \leq p$)、

$$c_1' \mu = c_2' \mu = \dots = c_r' \mu = 0$$

の同時検定が出来る。

これに対して(B) の場合は $\dim S(\lambda^* | \Sigma) = r$ のため r が λ^* の重根数として規定されるし、仮説も $S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu$ と(特殊な λ^* の固有空間に μ が垂直である)ごく限定された帰無仮説となる。

しかし今迄の一連の論文例(本紀要Vol 24~28)例えばRepeated Observation x , Split Plot Design, Cyclic Random Vector x , 一般的直線回帰データ $y_i \sim N_p[R_i I + m(t - \bar{t} I), \Sigma]$ の回帰係数 $m = 0$ の検定問題 etcに見られるように $S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu$ は効果的な命題である場合が多い。

また $S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu$ の検定に限定するならば、 $S(\lambda^* | \Sigma) \perp I_p$ であるから、(A) 検定量でも、勿論(B) 検定量でも検定可能であるが、

(B) 検定が(A) 検定より検定力が強い。

この点につき§2で論証し、§3では、 $S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu$ が効果的な命題である場合と、そうでない場合に(A) 検定法を採用せざるをえない例をあげる。

§2. " $S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu$ " の検定では(B) 方式が(A) 方式より有効である。

帰無仮説 $S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu$, ただし $\dim S(\lambda^* | \Sigma) = r$ なら、 $S(\lambda^* | \Sigma) \ni c_1, c_2, \dots, c_r$ (単位直交ベクトル)が得られて

$$S(\lambda^* | \Sigma) \perp \mu \iff c_1' \mu = c_2' \mu = \dots = c_r' \mu = 0.$$

の検定では、(A)式は変換(1,1)

$$y = C'x \text{ で、 } x = x_1, x_2, \dots, x_n \text{ に対応して } y \text{ を } y_1, \dots, y_n \text{ とし、}$$

$$n \bar{y}' \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})' \right]^{-1} \bar{y} \frac{n-r}{r} \dots\dots\dots (A)$$

を検定量として使うが、この(A)は、後述するように

$$(A) = \frac{\|\sqrt{n} \bar{y}\|^2}{\|P_{S(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{r-1})^\perp} \hat{u}_r\|^2} \cdot \frac{n-r}{r} \dots\dots\dots (C)$$

と書き換えられる。

ここに $\|P_{S(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{r-1})^\perp} \hat{u}_r\|^2 \sim \lambda^* \chi_{n-r}^2$ (Absolutely)

これと独立で、 $\|\sqrt{n} \bar{y}\|^2 \sim \lambda^* \chi_r^2$ [$\lambda = n \sum_{a=1}^r (c_a' \mu)^2$] である。

$c_a' \mu = 0$ ($a=1, 2, \dots, r$) なら

$$\|\sqrt{n} \bar{y}\|^2 \sim \lambda^* \chi_r^2$$

$$\text{一方 (B)} = \frac{\|\sqrt{n} \bar{y}\|^2}{tr \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})' \right]} \cdot \frac{(n-1)r}{r} = \frac{\|\sqrt{n} \bar{y}\|^2}{\sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2} \cdot \frac{(n-1)r}{r}$$

で、分母の $\sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 \sim \lambda^* \chi_{n-1}^2 \quad a=1, 2, \dots, r$ で、独立である。

よって $\sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 \sim \lambda^* \chi_{r(n-1)}^2$ (Absolutely) となる。

ここで(A) (B)ともnoncentral parameterは同じ $n \sum_{a=1}^r (c_a' \mu)^2$ で、

$$\begin{aligned} \text{(A)} &= \text{(C)} = \frac{\|\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}\|^2}{\|P_{S(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1})^\perp} \hat{\mathbf{u}}_r\|^2} \cdot \frac{n-r}{r} = \hat{F}_{n-r}^r \\ \text{(B)} &= \frac{\|\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}\|^2}{tr \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \right]} \cdot \frac{(n-1)r}{r} = \hat{F}_{(n-r)r}^r \end{aligned}$$

(A)と(B)の F -統計量の第2自由度は

$$n-r \leq (n-1)r$$

で、 $r=1$ のときのみ等号が成立し、 $r \geq 2$ なら $n-r = \text{(A)の第2自由度} < (n-1)r = \text{(B)の第2自由度}$

帰無仮説 $S[\lambda^* | S] \perp \mu$ のときの仮説の棄却域は(B)の方が広く、検定力は(B)の方が強いことが分る。

これより(A) 統計量が T^2 -分布をなすことを示す。

変換 $\mathbf{y} = C' \mathbf{x}$ で、 $\mathbf{x}_{p \times 1}$ から $\mathbf{y}_{r \times 1}$ へ変換すると、

$$\mathbf{y} \sim N_r(C' \mu, C' \Sigma C' = \lambda^* I_r) \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

となる。

また x_1, x_2, \dots, x_n に対応する y_1, y_2, \dots, y_n は、(2.1)の分布をもつ \mathbf{y} からの size n の $i \cdot i \cdot d$ とみられる、 y_1, y_2, \dots, y_n からつぎのように z_1, z_2, \dots, z_n へ変換する。

$$[y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & Q \text{ (直交行列)} & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

これから

$$z_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} y_i = \sqrt{n} \bar{y} \sim N_r(\sqrt{n} C' \mu, \lambda^* I_r) \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

$$z_\alpha = \sum_{i=1}^n q_{i\alpha} y_i \sim N_r(0, \lambda^* I_r), \quad (\alpha=2, 3, \dots, n)$$

z_1, \dots, z_n は互に統計的に独立である。

また y_1, \dots, y_n の修正積和行列、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' &= \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i' - n \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{y}}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i' - \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1' = \sum_{\alpha=2}^n \mathbf{z}_\alpha \mathbf{z}_\alpha' \quad \text{より,} \\ \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' &= \sum_{\alpha=2}^n \mathbf{z}_\alpha \mathbf{z}_\alpha' \sim W_r(n-1 | \lambda^* I_r) \quad \dots \dots \dots (2.4) \end{aligned}$$

(2.3)と(2.4)で、 $\mathbf{z}_1 \perp \sum_{\alpha=2}^n \mathbf{z}_\alpha \mathbf{z}_\alpha'$ となることから、

$$\begin{aligned} \text{(A)} &\equiv (n-1) \sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}' \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \right]^{-1} \sqrt{n} \bar{\mathbf{y}} \sim \hat{T}_{r, n-1}^2. \\ &\quad \text{同上} \quad \quad \quad \sim T_{r, n-1}^2 (C' \mu = 0 \text{ なら}). \end{aligned}$$

(A) が(C) となることを示す.

$r \times r$ の直交行列 H' により z から u に変換する,

$$u = H' z \cdots \cdots \cdots (2.5)$$

ただし $H' = \begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \\ \vdots \\ p_{r-1}' \\ z_1' / \|z_1\| \end{bmatrix} \quad (\text{直交行列})$ とする.

変換(2.5)で $z = z_2, z_3, \dots, z_n$ に対応する u は, $H' z_2, \dots, H' z_n$ で, これらを順に u_2, u_3, \dots, u_n とかくと,

$$E(H' z_a) = H' E(z_a) = H' 0 = 0_r$$

$$V(H' z_a) = H' \lambda^* I_r H = \lambda^* I_r$$

$$\text{cov}(H' z_a, H' z_\beta) = H' \text{cov}(z_a, z_\beta) H = H' O H' = \underset{r \times r}{0} \quad (\alpha \neq \beta).$$

上のことからつぎのことが分かる.

$$u_a = H' z_a \sim N_r(0_r, \lambda^* I_r)$$

$$u_a \perp. \quad (\text{ここに } \alpha = 2, 3, \dots, n) \cdots \cdots \cdots (2.6)$$

また, 行列 $[u_2, u_3, \dots, u_n] = \begin{bmatrix} \hat{u}_1' \\ \hat{u}_2' \\ \vdots \\ \hat{u}_r' \end{bmatrix}$ があつて,

列ベクトル $u_a \perp \sim N_r(0_r, \lambda^* I_r)$ なら, $(\alpha = 2, \dots, n)$

行ベクトル $\hat{u}_i \perp \sim N_{n-1}(0_{n-1}, \lambda^* I_{n-1})$ である. $(i = 1, 2, \dots, r)$

また逆も成立する $\cdots \cdots \cdots (2.7)$

(§あとがきと補注の定理参照のこと)

$$\begin{aligned} & (\sqrt{n} \overline{y})' \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y}) (y_i - \overline{y})' \right]^{-1} \sqrt{n} \overline{y} \\ &= (H' \sqrt{n} \overline{y})' \left[H' \sum_{a=2}^n z_a z_a' H \right]^{-1} H' \sqrt{n} \overline{y} \\ &= (0, 0, \dots, \|\sqrt{n} \overline{y}\|) \left[\sum_{a=2}^n (H' z_a) (H' z_a)' \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|\sqrt{n} \overline{y}\| \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (2.8) \end{aligned}$$

上式の中央の項は,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{a=2}^n (H' z_a) (H' z_a)' \right]^{-1} &= \left[\sum_{a=2}^n u_a u_a' \right]^{-1} \\ &= \left[\begin{bmatrix} u_2, u_3, \dots, u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2' \\ u_3' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} \right]^{-1} \\ &= \left[\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_r \end{bmatrix} [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_r] \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \|\hat{\mathbf{u}}_1\|^2, \hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_{r-1}, & \hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_r \\ \vdots & \vdots \\ U_{r-1} & \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{r-1}' \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \|\hat{\mathbf{u}}_{r-1}\|^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ U_r & \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_r' \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \|\hat{\mathbf{u}}_r\|^2 & \vdots \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \times & \dots & \times \\ \vdots & & \vdots \\ \times & \dots & \frac{|U_{r-1}|}{|U_r|} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$|U_{r-1}| = \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1}$ の $r-1$ 個のベクトルを辺とする $r-1$ 平行多面体の体積の平方.

$|U_r| = \hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1}, \hat{\mathbf{u}}_r$ の r 個のベクトルを辺とする r 平行多面体の体積の平方.

ゆえに,

$|U_r|/|U_{r-1}| = \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1}$ を Base とする $r-1$ 次元のベクトル空間 $S(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1})$ の直交補空間 $S^\perp(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1})$ への $\hat{\mathbf{u}}_r$ の正射影の長さの平方である

$$= \|P_{S^\perp(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1})} \hat{\mathbf{u}}_r\|^2, \dim S^\perp(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1}) = n-1-(r-1) = n-r.$$

また, 「 $\hat{\mathbf{u}}_r \sim N_{n-1}(\mathbf{0}_{n-1}, \lambda^* I_{n-1})$ のとき, $P_S \hat{\mathbf{u}}_r$ (注 $\hat{\mathbf{u}}_r$ のベクトル空間 S への正射影ベクトルで, $\dim S = f$ とする) $\sim N_f(\mathbf{0}, \lambda^* I)$ 」

したがって $\|P_S \hat{\mathbf{u}}_r\|^2 \sim \lambda^* \chi_{f-r}^2$ である, このことから

$$\|P_{S^\perp(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1})} \hat{\mathbf{u}}_r\|^2 \sim \lambda^* \chi_{n-r}^2 \dots \dots \dots (2.9)$$

よって (2.8) につづいて

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n} \overline{\mathbf{y}}' \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}})' \right]^{-1} \sqrt{n} \overline{\mathbf{y}} \\
&= \|\sqrt{n} \overline{\mathbf{y}}\|^2 \cdot \frac{|U_{r-1}|}{|U_r|} = \frac{\|\sqrt{n} \overline{\mathbf{y}}\|^2}{\frac{|U_{r-1}|}{|U_r|}} = \frac{\|\sqrt{n} \overline{\mathbf{y}}\|^2}{\|P_{S^\perp(\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{r-1})} \hat{\mathbf{u}}_r\|^2}
\end{aligned}$$

$$\text{分子} \sim \lambda^* \chi_{n-r}^2 (\lambda = n \sum_{a=1}^n (\mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu})^2)$$

分母 $\sim \lambda^* \chi_{n-r}^2$ (Absolutely) しかも両者は独立である.

§3. Random Cyclic Vector \mathbf{x} の場合について

Random Cyclic Vector \mathbf{x} が Normal 分布をなすとは, $\mathbf{x} \sim N_p(R_x \mathbf{I}_p + \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ で, 分散共分散行列 Σ が

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 & \dots \\ 0 & \rho & 1 & \rho & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho & 0 & 0 & \rho & 1 \end{bmatrix} > 0$$

である

いま $p=4$ で, 第 k 反復で第一因子 A_1, A_2 の 2 水準で処理し 第二因子 B_1, B_2 の 2 水準で処理した測定値を考える.

$$\begin{array}{lcl}
A_1 \begin{cases} B_1 \dots x_1 \\ B_2 \dots x_2 \end{cases} & & \\
A_2 \begin{cases} B_1 \dots x_4 \\ B_2 \dots x_3 \end{cases} & & \\
& & \begin{matrix} (-\beta) & (+\beta) \\ \hline R_k & B_1 & B_2 \\ \hline (-\alpha) & A_1 & x_{k1} & x_{k2} \\ \hline (+\alpha) & A_2 & x_{k4} & x_{k3} \end{matrix}
\end{array}$$

α : A の主効果, β : B の主効果, γ : A, B の交互作用とすると

$$E(x_{k1}) = R_k - \alpha - \beta + \gamma = R_k + \mu_1$$

$$E(x_{k2}) = R_k - \alpha + \beta - \gamma = R_k + \mu_2$$

$$E(x_{k3}) = R_k + \alpha + \beta + \gamma = R_k + \mu_3$$

$$E(x_{k4}) = R_k + \alpha - \beta - \gamma = R_k + \mu_4$$

$$V(x_k) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix} \equiv \Sigma \quad \text{とする.}$$

Σ の固有根, 対応する固有(単位)ベクトル

$$\lambda_1 = \sigma^2(1+2\rho). \quad \rightarrow e(I)' = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \sigma^2, (2 \text{ 重根}). \quad &\rightarrow e_1' = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1) \\ &\Rightarrow S[\sigma^2|\Sigma] = S(e_1, e_2) \\ &\rightarrow e_2' = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = \sigma^2(1-2\rho). \quad \rightarrow e_3' = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \Rightarrow S[\lambda_3|\Sigma] = S(e_3)$$

$H_1: S[\sigma^2|\Sigma] = S(e_1, e_2) \perp \mu \iff$ 主効果 $\alpha = \beta = 0$, の検定は,

$$\text{変換: } y_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)x, \quad y_2 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)x \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{21} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} y_{12} \\ y_{22} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} y_{1n} \\ y_{2n} \end{array} \right) \end{array} \right\} \text{で, } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ に対して}$$

と平均ベクトル (\bar{y}_1, \bar{y}_2) から, 仮説が $\alpha = \beta = 0$ が真なら,

$$\frac{n(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2)}{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + \sum (y_{2i} - \bar{y}_2)^2} \times \frac{2(n-1)}{2} \sim F_{2(n-1)}^2 \dots \dots \dots (3.1)$$

$H_2: S[\lambda_3|\Sigma] = S(e_3) \perp \mu \iff$ 交互作用 $\gamma = 0$, の検定には $y_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)x$ で,

$x = x_1, x_2, \dots, x_n$ に対して y_{31}, \dots, y_{3n} と \bar{y}_3 から

$$\frac{n\bar{y}_3^2}{\sum (y_{3i} - \bar{y}_3)^2 / n - 1} \sim F_{n-1}^1 \quad (\text{仮説 } \gamma = 0 \text{ が真なら}) \dots \dots \dots (3.2)$$

以上は(B)検定法によったが, これを(A)検定法によると,

$H_2: \gamma = 0$ の検定のときは, (3.2)は(A)検定法も同じである。

$H_1: \alpha = \beta = 0$ の検定では, $\alpha = \beta = 0$ が真なら,

$$n(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \left[\begin{array}{cc} \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)^2, \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2) \\ \Sigma(y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2), \Sigma(y_{2i} - \bar{y}_2)^2 \end{array} \right]^{-1} \left(\begin{array}{c} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{array} \right) \frac{n-2}{2} \sim F_{n-2}^2 \dots \dots \dots (3.2)$$

これから(3.1)と(3.2)は相異なる統計量であることが分かる。

$p = 5$ の場合,

$$x \sim N_5(R_x I_5 + \mu_1 \Sigma) \text{ で, } \Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots \\ \rho & 0 & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

Σ の固有根	固有量位ベクトル	固有空間
$\lambda_1 = (1+2\rho)\sigma^2$,	$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1) \equiv e'_1(I)$	
$\lambda_2 = (1-a_1\rho)\sigma^2$,	$\frac{1}{k_1}(a_1, -a_1, 1, 0, -1) \equiv e'_2$	$S[\lambda_2 \Sigma] = S[e_2, e_3]$
(2重根)	$\frac{1}{k_2}(a_1-1, a_1-1, -a_1, 2, -a_1) \equiv e'_3$	
$\lambda_3 = (1-a_2\rho)\sigma^2$,	$\frac{1}{k_3}(a_2, -a_2, 1, 0, -1) \equiv e'_4$	$S[\lambda_3 \Sigma] = S[e_4, e_5]$
	$\frac{1}{k_4}(a_2-1, a_2-1, -a_2, 2, -a_2) \equiv e'_5$	

$$\begin{aligned} \text{帰無仮説 } H_{\lambda_2}: a_1(\mu_1 - \mu_2) + (\mu_3 - \mu_5) &= 0 \\ (a_1 - 1)(\mu_1 + \mu_2) - a_1(\mu_3 + \mu_5) + 2\mu_4 &= 0 \end{aligned}$$

に対し(B)方式による統計量 $F_{2(n-1)}^2$ で F -検定される。ここに $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ である。

しかし H_{λ_2} にしても, H_{λ_3} にしても仮説の統計的意味がつけ難い。

そこで, この場合には, 実験者自ら統計的意味のつく仮説を立てて(A)方式でそれを検定する。

例えば

$$\begin{aligned} H: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 &\iff \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 &= 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 3\mu_4 &= 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - 4\mu_5 &= 0 \end{aligned}$$

として

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & -\frac{4}{\sqrt{20}} \end{bmatrix} x, \text{ で } x \text{ を } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ として対応する } y_1, y_2, \dots, y_n \text{ から(A)方式によって, } H \text{ の検定をおこなうとよい。}$$

§4. 検定式(B)の分布について

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \frac{\|\sqrt{n} \bar{y}\|^2}{tr\{\Sigma(\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})'\}} \cdot \frac{(n-1)r}{r} &\sim \hat{F}_{(n-1)r}^r \left(\lambda = n \sum_{a=1}^r (c'_a \mu)^2 \right) \\ \text{(B)} \quad &\text{ただし} \\ &\sim F_{(n-1)r}^r, \quad (C'\mu = 0 \text{ が成立するとき}) \end{aligned}$$

であることを述べた。

(B) 統計量が $\hat{F}_{(n-1)r}^r$ の分布であることの論証には,

- (1) 幾何学的 approach.
- (2) 変換による approach.

(3) Wishart 分布をする量に関する 2, 3 の基本定理の応用問題としての approach.
とがある。

(1) の幾何学的 approach については, 本研究紀要 Vol 27号の関連論文に詳しく説明してある。(§5のあとがき参照のこと)

(2) 変換による approach.

$S(\lambda^*|\Sigma) \ni \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ (直交単位ベクトル) に対し

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1' \\ \mathbf{c}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{c}_r' \end{pmatrix} \mathbf{x} \rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \mathbf{c}_1' \mathbf{x} \sim N[\mathbf{c}_1'(R_x \mathbf{I}_p + \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}_1' \Sigma \mathbf{c}_1 = \lambda^*] \\ y_2 &= \mathbf{c}_2' \mathbf{x} \sim N[\mathbf{c}_2' \boldsymbol{\mu}, \lambda^*] \\ &\vdots \\ y_r &= \mathbf{c}_r' \mathbf{x} \sim N[\mathbf{c}_r' \boldsymbol{\mu}, \lambda^*] \end{aligned}$$

しかも $y_i \perp y_j$ である ($\text{cov}(y_i, y_j) = \mathbf{c}_i' \Sigma \mathbf{c}_j = \lambda^* \mathbf{c}_i' \mathbf{c}_j = 0 \ (i \neq j)$)

$y_1 = \mathbf{c}_1' \mathbf{x}$ の \mathbf{x} を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ としたときの y_1 を $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ とすると, これ等は $Y \sim N[\mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu}, \lambda^*]$ なる Y の size n の $i \cdot i \cdot d$ とみられる. よって

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{n} \bar{y}_1 &\sim N[\sqrt{n} \mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu}, \lambda^*] \\ \sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 &\sim \lambda^* \chi_{n-1}^2 \end{aligned} \right\} \perp$$

一般に

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{n} \bar{y}_a &\sim N[\sqrt{n} \mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu}, \lambda^*] \\ \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 &\sim \lambda^* \chi_{n-1}^2 \end{aligned} \right\} \perp \text{で明らかに,}$$

$\sqrt{n} \bar{y}_a, \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2$ は, $a=1, 2, \dots, r$ にわたって独立である。

$$\left. \begin{aligned} \text{よって } \|\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}\|^2 &\sim \lambda^* \chi_r^2 \left(\lambda = n \sum_{a=1}^r (\mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu})^2 \right) \\ \sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 &\sim \lambda^* \chi_{(n-1)r}^2 \text{ (Absolutely)} \end{aligned} \right\} \perp$$

したがって

$$\frac{\|\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}\|^2 / r}{\text{tr} \left[\sum_{i=1}^r (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' / (n-1) r \right]} \sim F_{r, (n-1)r} \quad (\lambda=0 \iff \mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu}=0, a=1, 2, \dots, r \text{ の条件下})$$

(3) Wishart 分布に関する 2, 3 の基本定理の応用問題としての approach.
先ず, よく知られている定理 (I), (II) と, これ等を修正した定理 III を述べておく。

(I) $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ の $i \cdot i \cdot d$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ からつくられた積和行列 $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$ は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' &= \left[\sum_{i=1}^n x_{\alpha i} x_{\beta i} = X_{\alpha \beta} \right] \sim W_p(n|\Sigma) \\ p \times p \text{ 行列} \quad & \text{(自由度 } n \text{ の Wishart-分布)} \end{aligned}$$

(II) $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ の $i \cdot i \cdot d$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ からのそれは

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' &\sim \text{noncentral } \bar{W}_p(n|\Sigma) \\ \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' &\sim W_p(n-1|\Sigma) \text{ である。} \end{aligned}$$

(III) $x_i \sim N_p(R_i I_p + \mu, \Sigma)$, $i=1, 2, \dots, n$ の独立標本 x_1, x_2, \dots, x_n からの

$$\sum_{i=1}^n x_i x_i' \sim \text{noncentral } W_p'(n|\Sigma)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' \sim \text{noncentral } W_p'(n-1|\Sigma)$$

ここで, $R^p \ni \forall a$ (ただし $a \perp I_p$) に対し

$$a' \Sigma (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' a \sim a' \Sigma a \cdot \chi_{n-1}^2 (\lambda = \sum_{a=2}^n (Q_a A)^2) \text{ であり,}$$

$R^p \supset S^+(I_p) \ni \forall b$ ($b \perp I_p$ のとき) に対しては,

$$b' \Sigma (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' b \sim b' \Sigma b \cdot \chi_{n-1}^2 \text{ 分布である.}$$

ここに $A \equiv a' I_p$, $Q_a \equiv \sum_{j=1}^n q_{aj} R_j$ である。

(III) の定理のみ証明してみる.

x から y への変換を(2.2)の直交行列によるとする. 即ち

$(x_1, x_2, \dots, x_n) Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ によると,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' = \sum_{a=2}^n y_a y_a' \text{ となり}$$

$$E(y_a) = \sum_{i=1}^n q_{ai} (R_i I_p + \mu) = \left(\sum_{i=1}^n q_{ai} \cdot R_i \right) I_p \equiv Q_a I_p \quad (a=2, \dots, n).$$

$$V(y_a) = \sum_{i=1}^n q_{ai}^2 \cdot V(x_i) = 1 \cdot \Sigma, \quad \text{cov}(y_a, y_\beta) = 0, \quad (a \neq \beta)$$

これより $y_a \sim N_n(Q_a I_p, \Sigma)$, $y_a \perp$, $a=2, \dots, n$ となる. ゆえに,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' = \sum_{a=2}^n y_a y_a' \sim W_p(n-1|\Sigma) \text{ 分布}$$

$R^p \ni \forall a$ (ただし $a \perp I_p$) の a に対しては

$$E(a' y_a) = a' Q_a I_p = Q_a a' I_p = Q_a \sum_{i=1}^p a_i \equiv Q_a A \neq 0 \quad (\text{一般に})$$

$$\text{よって } a' \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' a = a' \sum_{i=1}^n y_a y_a' a \sim a' \Sigma a \cdot \chi_{n-1}^2 (\lambda = \sum_{a=2}^n (Q_a A)^2)$$

しかるに $S^+(I_p) \ni \forall b$ なる b は, $b \perp I_p$ より

$$E(b' y_a) = 0, \quad V(b' y_a) = b' \Sigma b \text{ より,}$$

$$b' \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' b \sim b' \Sigma b \cdot \chi_{n-1}^2 \text{ 分布である.}$$

(IV). $x \sim N_p(0, \Sigma)$ で特に Σ が

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$$

のとき x の size n の $i \cdot i \cdot d$ x_1, x_2, \dots, x_n に対し

$$\sum_{i=1}^n x_i x_i' = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & \dots & \dots & X_{pp} \end{bmatrix} \sim W_p(n | \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)) \text{ 分布}$$

をなすことは良く知られているが, この行列の対角要素 $X_{11}, X_{22}, \dots, X_{pp}$ の周辺同時密度関数は,

$$f(x_{11}, x_{22}, \dots, x_{pp}) = \chi_n^2 \left(\frac{x_{11}}{\sigma_1^2} \right) \cdot \chi_n^2 \left(\frac{x_{22}}{\sigma_2^2} \right) \cdots \chi_n^2 \left(\frac{x_{pp}}{\sigma_p^2} \right) \text{ となる } \dots \dots \dots (3.1)$$

ここに $\chi_n^2\left(\frac{x_{ii}}{\sigma_i^2}\right)$ は, $X_{ii} \sim \sigma_i^2 \chi_n^2$ のときの X_{ii} の p, d, f を表す. よってつぎのことがいえる.

$X_{ii} \sim \sigma_i^2 \cdot \chi_n^2$ 分布をなし $X_{ii} \perp (i=1, 2, \dots, p)$ である.

(3.1) の部分の論証を, $W_2(n|\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2))$ でしめす.

$\begin{pmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{pmatrix} \sim W_2(n|\text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2))$ なら $\text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \frac{1}{\sigma_2^2}\right)$ より,

$$p, d, f \quad f(x, y, z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) (\sigma_1^2 \sigma_2^2)^{\frac{n}{2}}} (x \cdot y - z^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1^2} + \frac{y}{\sigma_2^2}\right)}$$

より (X, Y) の周辺分布の $p, d, f \quad g(x, y)$ はつぎのようになる.

$$g(x, y) = \frac{1}{2^n \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) (\sigma_1^2 \sigma_2^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1^2} + \frac{y}{\sigma_2^2}\right)} \int_{xy \geq z^2} (xy - z^2)^{\frac{n-3}{2}} dz$$

$z^2/xy = t$ として計算すると,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^n \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) (\sigma_1^2 \sigma_2^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x}{2\sigma_1^2} - \frac{y}{2\sigma_2^2}} \cdot (xy)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2\sigma_1^2}} \left(\frac{x}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2\sigma_2^2}} \left(\frac{y}{\sigma_2^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{\sigma_2^2} \\ &= \chi_n^2\left(\frac{x}{\sigma_1^2}\right) \cdot \chi_n^2\left(\frac{y}{\sigma_2^2}\right) \end{aligned}$$

ゆえに $X \sim \sigma_1^2 \chi_n^2$, $Y \sim \sigma_2^2 \chi_n^2$ で $X \perp Y$ が示された。

(V). $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$, ただし $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$ のとき, x の $i \cdot i \cdot d \quad x_1, x_2, \dots, x_n$ からの $\sum_{i=1}^n x_i x_i'$ の対角要素 X_{ii} は, $X_{ii} \sim \sigma_i^2 \chi_n^2$, $X_{ii} \perp (i=1, 2, \dots, p)$ であることも容易に示される.

以上の準備のもとで,

$x_i \sim N_p(R_i \mathbf{I}_p + \mu \Sigma)$, $i=1, 2, \dots, n$ の任意標本 x_1, \dots, x_n に対し $S(\lambda^*|\Sigma) \ni c_1, c_2, \dots, c_r$ (直交単位ベクトル)からのつぎの変換

$$y_{r \times 1} = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_r' \end{pmatrix} x = C' x$$

で y_1, y_2, \dots, y_n を得て,

$$C' \sum_{i=1}^n x_i x_i' C = \sum_{i=1}^n y_i y_i' = \Sigma (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})' + n \bar{y} \bar{y}'$$

$$y_i \sim N_r(C' \mu \equiv d, \quad \lambda^* I_r), \quad y_i \perp \quad i=1, 2, \dots, n \text{ より } \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i y_i' \sim \text{noncentral } \bar{W}_r(n|\lambda^* I_r)$$

(V)より, $\sum_{i=1}^n y_i y_i'$ の対角要素 $Y_{11}, Y_{22}, \dots, Y_{rr}$ は

$$Y_{ii} \sim \lambda^* \chi_n^2(\lambda = n(c_i \mu)^2), \quad Y_{ii} \perp, \text{ である。}$$

また, $\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'$ は(3.2)と(II)より, $W_r(n-1|\lambda^* I_r)$ より, この対角要素

$\sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 \sim \lambda^* \chi_{n-1}^2$, $\sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 \perp$ である. ゆえに

$$\sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 = \text{tr} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \sim \lambda^* \chi_{r(n-1)}^2 \cdots \cdots (3.3)$$

更に $\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}} \sim N_r[\sqrt{n} C' \boldsymbol{\mu}, \lambda^* I_r]$ よって, (II)より,

$$n \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{y}}' \sim W_r(1|\lambda^* I_r)$$

この対角要素 $n \bar{y}_a^2 \sim \lambda^* \chi_1^2 (\lambda = n(\mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu})^2)$, $n \bar{y}_a^2 \perp$ である。

ゆえに $\sum_{a=1}^r n \bar{y}_a^2 \sim \lambda^* \chi_r^2 (\lambda = n \sum_{a=1}^r (\mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu})^2) \cdots \cdots (3.4)$

(3.3)と(3.4)より,

$$\begin{aligned} (B) &= \frac{\|\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}\|^2 / r}{\text{tr} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' / r(n-1)} \sim \hat{F}_{r(n-1)}^r (\lambda = n \sum_{a=1}^r (\mathbf{c}_a' \boldsymbol{\mu})^2) \\ &\sim F_{r(n-1)}^r (\lambda = 0) \end{aligned}$$

これを一表に

$$C' \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' C = C' \Sigma (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' C + C' \sqrt{n} \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}' C$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i'}_{W_r(n|\lambda^* I_r)} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})'}_{W_r(n-1|\lambda^* I_r)} + \underbrace{n \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{y}}'}_{W_r(1|\lambda^* I_r)}$$

すなわち, 行列

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ & Y_{22} \\ Y_{ji} & Y_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)^2}_{\lambda^* \chi_{n-1}^2} & \underbrace{n \bar{y}_1^2}_{\lambda^* \chi_1^2 (\lambda = n(\mathbf{c}_1' \boldsymbol{\mu})^2)} \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_{ri} - \bar{y}_r)^2}_{\lambda^* \chi_{n-1}^2} & \underbrace{n \bar{y}_r^2}_{\lambda^* \chi_1^2 (\lambda = n(\mathbf{c}_r' \boldsymbol{\mu})^2)} \end{bmatrix}$$

第一枠内の項の和 $= \text{tr} (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \sim \lambda^* \chi_{r(n-1)}^2$

第二枠内の項の和 $= \|\sqrt{n} \bar{\mathbf{y}}\|^2 \sim \lambda^* \chi_r^2 (\lambda = n \|C' \boldsymbol{\mu}\|^2)$

この2つのことから(B)式と, その分布が導かれた。

§5. あとがきと, 補注(定理)

本小文の(B) 統計量は従来論文では次の形で取扱った。

$\hat{\mathbf{x}}' \equiv (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \dots, \mathbf{x}_n')$ とし $\hat{\mathbf{c}}_a \equiv (\mathbf{c}_a', \mathbf{c}_a', \dots, \mathbf{c}_a')$ とし, 更に,

$$S(C_a) \equiv S \begin{bmatrix} \mathbf{c}_a & 0 \cdots 0 \\ 0 & \mathbf{c}_a \cdots 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots \mathbf{c}_a \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \mathbf{c}_a \\ \mathbf{c}_a \\ \vdots \\ \mathbf{c}_a \end{bmatrix} \quad C_a: \text{半直交行列}$$

$np \times n$

としたとき

$$S[\lambda^*|\hat{\Sigma}] = S[C_1] \oplus S[C_2] \oplus \cdots \oplus S[C_r] = S[\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_r] \oplus S[C_1^-] \oplus \cdots \oplus S[C_r^-]$$

ここに $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\Sigma, \Sigma, \dots, \Sigma)$ とし, Σ に対する r 重の固有根 λ^* は $\hat{\Sigma}$ については nr 重根で, 対応する固有空間は次元 nr で, それを $S[\lambda^*|\hat{\Sigma}]$ と表した. 少しの計算で,

$$\begin{aligned} \|P\hat{c}_a\hat{x}\|^2 &= n(\hat{c}_a'\bar{x})^2 = n\bar{y}_a^2, \quad n \sum_{a=1}^r \bar{y}_a^2 = n\|\bar{y}\|^2 = \sum_{a=1}^r \|P\hat{c}_a\hat{x}\|^2 = \|P_S(\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_r)\hat{x}\|^2, \\ \hat{c}_a' \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' \hat{c}_a &= \sum_{j=1}^n (y_{aj} - \bar{y}_a)^2 = \|P_S(\hat{c}_a^-)\hat{x}\|^2, \quad \text{tr} \left\{ C' \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' C \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \right\} = \sum_{a=1}^r \sum_{i=1}^n (y_{ai} - \bar{y}_a)^2 = \|P_S(c_1^-, c_2^-, \dots, c_r^-)\hat{x}\|^2, \end{aligned}$$

上のことから, 従来の先行論文では, (B) 統計量は,

$$\frac{\|P_S[\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_r]\hat{x}\|^2/r}{\|P_S[c_1^-, \dots, c_r^-]\hat{x}\|^2/(n-1)r} \left(= \frac{\|\sqrt{n}\bar{y}\|^2}{\text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})' \right\}} \cdot \frac{(n-1)r}{r} \right)$$

の形で取扱ったものである。

補注(定理): $p \times n$ の確率変数行列 X があり,

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{bmatrix} \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2' \\ \vdots \\ \hat{x}_p' \end{bmatrix}$$

「各列ベクトル $x_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$, $x_i \perp$, $i=1, 2, \dots, n$ 」ということと

「各行ベクトル $\hat{x}_\alpha \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_{\alpha\alpha} I_n)$, $\text{cov}(\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta) = \sigma_{\alpha\beta} I_n$, $(\alpha, \beta=1, 2, \dots, p)$ 」

とは equivalent (同じ同時分布) である。

(証明). $p=2, n=3$ として一般性を失ないように説明する。

$$\begin{array}{ccc} x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, & x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, & x_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N(\mathbf{0}, \Sigma) & N(\mathbf{0}, \Sigma) & N(\mathbf{0}, \Sigma) \end{array}$$

$x_i \perp$ ($i=1, 2, 3$)

x_1, x_2, x_3 の同時 p, d, f は

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{|\Sigma|^3}} e^{-\frac{1}{2}(\ast)} \\ \ast &= \sum_{ij} \sigma^{ij} x_{i1} x_{j1} + \sum_{ij} \sigma^{ij} x_{i2} x_{j2} + \sum_{ij} \sigma^{ij} x_{i3} x_{j3} \\ &= \sigma^{11}(x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2) \\ &\quad + 2\sigma^{12}(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + x_{13}x_{23}) \\ &\quad + \sigma^{22}(x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1' &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{11} I_3) \\ \hat{x}_2' &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma_{22} I_3) \\ \text{cov}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) &= \sigma_{12} I_3 \text{ では} \\ V \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_3 & \sigma_{12} I_3 \\ \sigma_{21} I_3 & \sigma_{22} I_3 \end{bmatrix} \equiv \Sigma \otimes I_3 \\ [\Sigma \otimes I_3]^{-1} &= \Sigma^{-1} \otimes I_3 = \begin{bmatrix} \sigma^{11} I_3 & \sigma^{12} I_3 \\ \sigma^{21} I_3 & \sigma^{22} I_3 \end{bmatrix} \\ |\Sigma \otimes I_3| &= |\Sigma|^3 \text{ より,} \\ p(\hat{x}_1 \hat{x}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{6/2} \sqrt{|\Sigma \otimes I_3|}} e^{-\frac{1}{2}(\hat{x}_1 \hat{x}_2)' (\Sigma \otimes I_3)^{-1} (\hat{x}_1 \hat{x}_2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{|\Sigma|^3}} e^{-\frac{1}{2} \hat{x}' \begin{bmatrix} \sigma^{11} I_3 & \sigma^{12} I_3 \\ \sigma^{21} I_3 & \sigma^{22} I_3 \end{bmatrix} \hat{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{|\Sigma|^3}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^{11} \hat{x}_1 \hat{x}_1 + 2\sigma^{12} \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \sigma^{22} \hat{x}_2 \hat{x}_2)} \end{aligned}$$

よって $f(x_1, x_2, x_3) = p(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ が示された。

引用図書

- (1) S.F.Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.
- (2) A.M.Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.
- (3) T.W.Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.
- (4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版.
- (5) 宇喜多義昌 (1988), 多変量統計解析, $\|P_{\alpha}x\|^2$ とその分布の研究, 序説—明星大学出版部.
- (6) 宇喜多義昌 (1987), 多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部.
- (8) M.Siotani. 他 2 名 (1985), Modern Multivariate Statistical Analysis, (American Sciences Press.)

引用論文

- (1) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学研究紀要（理工学部）。1987（第 23 号）
- (2) Y.Ukita & K.Noda: About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1987.
- (3) Y.Ukita & K.Noda: Testing Hypothesis on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI 46 th Contributed Papers) 1987.
- (4) 宇喜多義昌・小野英夫: Generalized Linear Model の場合の仮説検定について, 明星大学研究紀要—理工学部, 1988（第 24 号）
- (5) 宇喜多義昌・小野英夫: Generalized Linear Model の場合の F—検定法の応用, 明星大学研究紀要—理工学部, 1989（第 25 号）
- (6) 宇喜多義昌: Generalized Linear Model の場合の仮説検定について (II), 明星大学研究紀要—理工学部 1989（第 25 号）
- (7) Y.Ukita "The Decomposition of The Principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The Linear Model. (東京理科大学研究専攻科雑誌. No 1, Vol 5, 1984.
- (8) Y.Ukita, K.Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis contrast $c'\mu = 0$, And Its Application to The Regression Theorem" (Japan China Symposium on Statistics) 1989.
- (9) 宇喜多義昌: Generalized Liner Model の場合の仮説検定について III, 明星大学研究紀要—理工学部 1990（第 26 号）
- (10) 宇喜多義昌, 小野英夫: 一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察, 明星大学研究紀要—理工学部 1991（第 27 号）
- (11) 宇喜多義昌, 塩谷実, 小野英夫: Generalized Linear Model をもつ 2 要因 2 水準の要因実験で, 反復実験の場合の統計的仮説検定問題について, 明星大学研究紀要—理工学部 1992（第 28 号）
- (12) Y.Ukita, K.Noda, and E.Miyaoka: "UMP Invariant Test for a Generalized Linear Model." (Journal of Multivariate Analysis. Vol 40. No 1. January 1992).
- (13) Y.Ukita, K.Noda, and E.Miyaoka: "On F-TESTS AND LINEAR HYPOTHESIS IN A GENERAL LINEAR MODEL, (Communications in statistics Theory and Methods 21(7)1992).
- (14) 宇喜多義昌, 塩谷実: Cyclic Random Vector x の母平均 μ の多重比較 $H: c_i'\mu = 0$ ($i=1,2,\dots,\ell$) に関する UMP-Test について. 明星大学研究紀要—理工学部 1993(第 29 号) (平成 4 年度科学研究費研究成果論文)