Cyclic Random Vector xの母平均μの多重比較 $H: c_i'\mu=0\ (i=1,2,\ldots,\ell)$ に関する, UMP-Test について

宇喜多義昌*　　塩谷実**

§1. Summary と Introduction.

$x \sim N_a(R_x 1_a+\mu,\ \Sigma)$, 正規分布をして，特に分散共分散行列$\Sigma$がつぎの形をする。

$$\Sigma=\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & \cdots\cdots & & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \cdots & 0 & \rho & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots (1.1)$$

このときベクトルxを Cyclic Random Vector ということにする，このxの任意標本ベクトル$x_1, x_2, \cdots x_n$から，統計的仮説問題

$H c_1$: $c'\mu=0$ の UMP-Test

H : $c_1'\mu=0,\ c_2'\mu=0, \cdots, c_\ell'\mu=0$（多重比較）の UMP-Test を考察する。

結果は$a=2$, $a=3$, $a=4$の場合には，後述されるように面白い成果を得たのでここに報告する。

この研究は平成４年度科研費（一般研究C）課程番号04630018の「統計的多重比較に対する基礎モデルやその応用に関する研究」(代表者. 塩谷実)の研究成果として発表するものである。Σが (1.1) の形から，xは general linear model の特別な場合とみられるので，次節で general linear model の基礎的定理と UMP-Test を証明ぬきで述べておく。

§2. general linear model の場合の UMP-Test

$x \sim N_a(R_x 1_a+\mu,\ \Sigma)$ の任意標本ベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_n$ からなるnaケの成分をもつベクトル$\hat{x}$とは

$$\hat{x}' \equiv (x_1',\ x_2', \cdots,\ x_n')$$

で，$\hat{x}$の構造式は

$$\hat{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1_a & 0 & \cdots & 0 & I_a \\ 0 & 1_a & & \vdots & I_a \\ 0 & 0 & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1_a & I_a \end{array}\right]\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \\ \mu \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

---

*　一般教養　数学　教授
**　一般教養　数学　教授

$$=[\hat{\mathbf{1}}_1,\hat{\mathbf{1}}_2,\cdots\hat{\mathbf{1}}_n,\hat{\mathbf{a}}_1,\hat{\mathbf{a}}_2,\cdots\hat{\mathbf{a}}_a]\begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \boldsymbol{\mu}\end{bmatrix}+\hat{\mathbf{e}} \quad\cdots\cdots(2.1)$$

ここに$\mathbf{R}'=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$　(block effects)

$\boldsymbol{\mu}'=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_a)$　(mean effects)

$\hat{\mathbf{a}}_i'\equiv(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\,\vdots\,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\,\vdots\cdots\cdots\vdots\,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$

$\hat{\mathbf{e}}\sim N_{na}(\mathbf{0},\hat{\Sigma})\quad\cdots\cdots(2.2)$

で，注目すべきは，$V(\hat{\mathbf{e}})\equiv\hat{\Sigma}$　とすると，

$$\hat{\Sigma}\equiv\begin{bmatrix}\Sigma & & O\\ & \Sigma & \\ O & & \ddots\ \Sigma\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(\Sigma,\Sigma,\cdots,\Sigma)\quad\cdots\cdots(2.3)$$

である。多くの事例ではΣは固有ベクトル$\mathbf{1}_a$をもつから，本文では，$\Sigma\mathbf{1}_a=\lambda_1\mathbf{1}_a$とする。このとき$\Sigma$の固有根$\lambda_1$(単根) に対応する唯一の固有単位ベクトルが$\mathbf{e}(\mathbf{1}_a)'=\frac{1}{\sqrt{a}}(1,1,\cdots,1)$である場合$\boxed{2.1}$と，$\lambda_1$が$\ell$重根で，$\lambda_1$に対応する固有ベクトル空間が，$S(\mathbf{1}_a,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3,\cdots\mathbf{f}_\ell)$　で，次元はℓ次の場合$\boxed{2.2}$とがある。

定理1. Σの λ_1以外の固有根 $\lambda_2,\cdots,\lambda_a$に対応する互いに直交する固有ベクトルを$\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_a$とすると

単根 λ_iに対して，対応する固有ベクトル$\mathbf{b}_i$につき，

H_i：$\mathbf{b}_i\boldsymbol{\mu}=0$ ($i\neq1$) の UMP-Test は，

$$\frac{(\sqrt{n}\,\mathbf{b}_i'\bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{b}_i'A\mathbf{b}_i/n-1}=\frac{\|P_{\hat{\mathbf{b}}_i}\hat{\mathbf{x}}\|^2}{\|P_{S(B_i^-)}\hat{\mathbf{x}}\|^2/n-1}\ \sim F^1_{n-1}\quad\cdots\cdots(2.4)$$

(under　$\mathbf{b}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ is true)

ここにAは$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n$の修正積和行列で，

$\hat{\mathbf{b}}_i'\equiv(\mathbf{b}_i',\mathbf{b}_i',\cdots,\mathbf{b}_i')$

$$S(B_i^-):S\begin{bmatrix}\mathbf{b}_i & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_i & \cdots\cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \vdots\\ \vdots & & (B_i) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots\cdots & \mathbf{b}_i\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{b}_i & \\ \mathbf{b}_i & \\ \vdots & B_i^-\\ \vdots & \\ \mathbf{b}_i & \end{array}\right]=S(\hat{\mathbf{b}}_i)\oplus S(B_i^-)\quad\cdots\cdots(2.5)$$

(注１)　$\mathbf{b}_i$は定数ベクトルで，$\mathbf{e}(\mathbf{b}_i)$を$\mathbf{b}_i$方向の単位ベクトルとすると，つぎのことがいえる。

$$\begin{array}{ll} n(\mathbf{b}_i'\bar{\mathbf{x}})^2=\|\mathbf{b}_i\|^2\cdot\|P_{\hat{\mathbf{b}}_i}\hat{\mathbf{x}}\|^2 & n\{\mathbf{e}(\mathbf{b}_i)'\bar{\mathbf{x}}\}^2=\|P_{\hat{\mathbf{b}}_i}\hat{\mathbf{x}}\|^2\\ \mathbf{b}_i'A\mathbf{b}_i=\|\mathbf{b}_i\|^2\cdot\|P_{S(B_i^-)}\|^2 & \mathbf{e}(\mathbf{b}_i)A\mathbf{e}(\mathbf{b}_i)=\|P_{S(B_i^-)}\hat{\mathbf{x}}\|^2\end{array}\quad\cdots\cdots(2.6)$$

Σの λ_1以外の固有根 λ_2がk重根($k\geqq2$)のとき，一般性を失することなく $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_{k+1}=\lambda^*$とする。$k$重根である λ^*に対応するk次元の固有空間を$S(\lambda^*|\Sigma)$ とする。

$S(\lambda^*|\Sigma)$ に属する互に直交する固有ベクトルを$\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\cdots\mathbf{b}_{k+1}$とすると，

$S(\lambda^*|\Sigma)=S(\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\cdots\mathbf{b}_{k+1})$，$\dim S(\lambda^*|\Sigma)=k.$　$\cdots\cdots(2.7)$

固有根 λ^*は$\hat{\Sigma}$については，nk重の固有根で，対応する固有ベクトル空間を$S(\lambda^*|\hat{\Sigma})$

とすると，$\dim S(\lambda^*|\hat{\Sigma})=nk$であり，次のように直和分解される。

(2.5) での$\hat{\boldsymbol{b}}_i(i=2,3,\cdots,k+1)$ や$S(B_i^-)$ を使って，

$$\begin{aligned}S(\lambda^*|\hat{\Sigma})&=S(B_2)\oplus S(B_3)\oplus\cdots\oplus S(B_{k+1})\\&=S(\hat{\boldsymbol{b}}_2)\oplus S(B_2^-)\oplus\cdots\cdots\cdots\oplus S(\hat{\boldsymbol{b}}_{k+1})\oplus S(B_{k+1}^-)\\&=S(\hat{\boldsymbol{b}}_2,\hat{\boldsymbol{b}}_3,\cdots,\hat{\boldsymbol{b}}_{k+1})\oplus S(B_2^-\,\vdots\,B_3^-\,\vdots\cdots\vdots\,B_{k+1}^-)\end{aligned}\quad\cdots\cdots(2.8)$$

しかも

$S(\hat{\boldsymbol{b}}_2,\hat{\boldsymbol{b}}_3,\cdots,\hat{\boldsymbol{b}}_{k+1})\subset$ Estimation Space $S[\hat{\boldsymbol{1}}_1,\cdots\hat{\boldsymbol{1}}_n,\hat{\boldsymbol{a}}_1,\cdots\hat{\boldsymbol{a}}_a]$

$S(B_2^-\,\vdots\,B_3^-\,\vdots\cdots\vdots\,B_{k+1}^-)\subset$ Error Space $S[\hat{\boldsymbol{1}}_1,\cdots\hat{\boldsymbol{1}}_n,\hat{\boldsymbol{a}}_1,\cdots\hat{\boldsymbol{a}}_a]^\perp$

である。このことから

定理2. $H_{\lambda^*}: S(\lambda^*|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu} \longleftrightarrow \boldsymbol{b}_2'\boldsymbol{\mu}=0,\boldsymbol{b}_3'\boldsymbol{\mu}=0,\cdots,\boldsymbol{b}_{k+1}'\boldsymbol{\mu}=0$

の同時検定には，

$$\frac{\|P_{S(\hat{b}_2\cdots\hat{b}_{k+1})}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/k}{\sum_{i=2}^{k+1}\|P_{S(B_i^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/k(n-1)}\sim F^k_{k(n-1)}\ \text{(under } S(\lambda^*|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu}\text{ is true)}\quad\cdots\cdots(2.9)$$

ここに$\|P_{S(\hat{b}_2\cdots\hat{b}_{k+1})}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=n\sum_{i=2}^{k+1}\{\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{b}_i)\bar{\boldsymbol{x}}\}^2$

$$\sum_{i=2}^{k+1}\|P_{S(B_i^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum_{i=2}^{k+1}\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{b}_i)A\boldsymbol{e}(\boldsymbol{b}_i)$$

で計算される。

$\boxed{2.2}$ で mark したように固有根 λ_1が ℓ 重根（$\ell\geqq 2$）なら，λ_1に対応するΣの固有ベクトル空間には$\boldsymbol{1}_a,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3,\cdots,\boldsymbol{f}_\ell$なる互に直交するベクトルが存在して

$$S(\lambda_1|\Sigma)=S(\boldsymbol{1}_a,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_\ell)$$

で，先に$\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{k+1}$から$\hat{\boldsymbol{b}}_2,\hat{\boldsymbol{b}}_3,\cdots,\hat{\boldsymbol{b}}_{k+1}$や$S(B_2^-),\cdots,S(B_{k+1}^-)$を作ったように$\boldsymbol{1}_a,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_\ell$から$\boldsymbol{1}_{na},\hat{\boldsymbol{f}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{f}}_\ell$や$S(B^-),S(F_2^-),\cdots,S(F_\ell^-)$を作ると，

$$S(\lambda_1|\hat{\Sigma})=S(\boldsymbol{1}_{na})\oplus S(B^-)\oplus S(\hat{\boldsymbol{f}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{f}}_\ell)\oplus S(F_1^-\,\vdots\cdots\vdots\,F_\ell^-)\quad\cdots\cdots(2.10)$$

である、

$S(\boldsymbol{1}_{na})\oplus S(B^-)\subset$ Estimation Space

$S(\hat{\boldsymbol{f}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{f}}_\ell)\subset$ Estimation Space

$S(F_1^-\,\vdots\,F_2^-\,\vdots\cdots\vdots\,F_\ell^-)\subset$ Error Space

ここに$S(B^-)$とはつぎのベクトル space である。

$$S\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&\vdots\\\vdots&0&&\vdots\\\vdots&&&0\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}1&\\1&\\\vdots&B^-\\\vdots&\\1&\end{array}\right]=S(\boldsymbol{1}_{na})\oplus S(B^-)\quad\cdots\cdots(2.11)$$

したがって，$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{\mu}=0$（仮定）と合せ考えて，

定理3. $H: S(\lambda_1|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu} \rightleftarrows \boldsymbol{f}_2'\boldsymbol{\mu}=0,\cdots\boldsymbol{f}_\ell'\boldsymbol{\mu}=0$

の同時検定には

$$\frac{\|P_{S(\hat{f}_2,\cdots,\hat{f}_\ell)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/(\ell-1)}{\|P_{S(F_2^-\mid\cdots\mid F_\ell^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/(n-1)(\ell-1)} \sim F^{\ell-1}_{(n-1)(\ell-1)} \text{ (under } S(\lambda_1|\Sigma)\perp\boldsymbol{\mu} \text{ is true)} \quad (2.12)$$

また

H_R：$R_1=R_2=\cdots=R_n$の検定には,

$$\frac{\|P_{S(B^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/(n-1)}{\|P_{S(F_2^-)\mid\cdots\mid F_\ell^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/(n-1)(\ell-1)} \sim F^{n-1}_{(n-1)(\ell-1)} \text{ (under } R_1=\cdots=R_n \text{ is true)} \cdots (2.13)$$

以上空間を直和分解した（図表1）を下に示そう。

(図表1)

λ_1		λ^*	
Σに対してℓ重根		Σに対してk重根	
$\hat{\Sigma}$に対して$n\ell$重根		$\hat{\Sigma}$に対してnk重根	
$S(\boldsymbol{1}_{na})$	$S(\hat{\boldsymbol{f}}_2\cdots\hat{\boldsymbol{f}}_\ell)$	$S(\hat{\boldsymbol{b}}_2\cdots\hat{\boldsymbol{b}}_{k+1})$	
$S(B^-)$	$S(F_2^-\mid\cdots\mid F_\ell^{-1})$	$S(B_2^{-1}\mid\cdots\mid B_{k+1}^-)$	

□推定空間
◇誤差空間

§3. Cyclic Random Vector $\boldsymbol{x}$の母平均 $\boldsymbol{\mu}$の多重比較。

$\boldsymbol{x}\sim N_a(R_x\boldsymbol{1}_a+\boldsymbol{\mu},\Sigma)$で，$\Sigma$が$(1,1)$である。$\boldsymbol{x}$の任意標本ベクトル$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots\boldsymbol{x}_n$を取って，$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$や$\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$, $\cdots\boldsymbol{c}_\ell'\boldsymbol{\mu}=0$の UMP-Test を行う，先ず

[3.1]　$a=2$の場合,

$\boldsymbol{x}\sim N_2\left[R_x\boldsymbol{1}_2+\boldsymbol{\mu},\ \sigma^2\begin{pmatrix}1&\rho\\ \rho&1\end{pmatrix}\right]$からの任意標本ベクトルは

$\boldsymbol{x}_1'=(x_{11},x_{21})$, $\boldsymbol{x}_2'=(x_{12},x_{22})$, $\cdots\boldsymbol{x}_n'=(x_{1n},x_{2n})$で,

$\hat{\boldsymbol{x}}'=(x_{11},x_{21},x_{12},x_{22},\cdots\cdots,x_{1n},x_{2n})$

とする，Σの固有根と固有ベクトルはつぎのようになる。

$|\Sigma-\lambda\mathrm{I}|=(\sigma^2-\lambda)^2-\sigma^4\rho^2=0$, $\lambda_1=\sigma^2(1+\rho)$, $\lambda_2=\sigma^2(1-\rho)$

$\lambda_1=\sigma^2(1+\rho)$に対応する固有ベクトルは

$\sigma^2\begin{pmatrix}-\rho&\rho\\ \rho&-\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$より単位固有ベクトル$\boldsymbol{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\lambda_2=\sigma^2(1-\rho)$に対応する固有ベクトルは

$\sigma^2\begin{pmatrix}\rho&\rho\\ \rho&\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$より単位固有ベクトル$\boldsymbol{e}_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

ゆえに

$$S(\lambda_1|\Sigma)=S\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad S[\lambda_2|\Sigma]=S\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=S[\boldsymbol{c}]$$

ここに$\boldsymbol{c}'\equiv(1,-1)$とした。したがって,

$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]$と$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]$はつぎのようになる

$$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_2 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_2 \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{1}_{2n} & \mathrm{B}^- \end{array}\right]=S[\boldsymbol{1}_{2n}]\oplus S[\mathrm{B}^-]$$

$$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} & & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{c} & \\ \boldsymbol{c} & \\ \vdots & \mathrm{C}^- \\ \vdots & \\ \boldsymbol{c} & \end{array}\right]=S[\hat{\boldsymbol{c}}]\oplus S[\mathrm{C}^-]$$

(図表２)

$S(\boldsymbol{1}_{2n})$ dim=1	$S(\hat{\boldsymbol{c}})$ dim=1
$S(\mathrm{B}^-)$ dim$=n-1$	$S(\mathrm{C}^-)$ dim$=n-1$

これより

$$\left.\begin{array}{l} \|P_{S(C^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\sigma^2(1-\rho)\chi^2_{f=n-1} \\ \|P_{\hat{c}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\sigma^2(1-\rho)\tilde{\chi}^2_{f=1}\quad(\lambda=\|P_{\hat{c}}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2) \end{array}\right\}\perp\!\!\!\perp$$

より次の仮説検定法をうる（定理1.による）

$H：\mu_1-\mu_2=0$　の検定には次の事実を使う。

$$\frac{\|P_{\hat{c}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(C^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\quad\sim F^1_{n-1}(\text{under } \mu_1=\mu_2 \text{ is true})$$

ここに

$$\|P_{\hat{c}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}-\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\Big)^2=\frac{n}{2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2$$

$$\|P_{S(C^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\|P_{S(C)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\hat{c}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-x_{2i})^2-\frac{n}{2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2$$

〔3.2〕　$a=3$　のとき， $\boldsymbol{x}\sim N_3(R_x\boldsymbol{1}_3+\boldsymbol{\mu},\Sigma)$のとき$\Sigma$は

$$\Sigma=\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}>0\ \text{である。}$$

（注２） Σの形から$\boldsymbol{x}$は repeated observation ベクトルでもある。

$\boldsymbol{x}$の任意標本ベクトル$\boldsymbol{x}_i'=(x_{1i},x_{2i},x_{3i})$, $i=1,2,\cdots n.$

$\hat{\boldsymbol{x}}'=(x_{11},x_{21},x_{31},x_{12},x_{22},x_{32},\cdots,x_{1n},x_{2n},x_{3n})$

とする。

$$|\Sigma-\lambda\mathrm{I}|=\begin{vmatrix} \sigma^2-\lambda & \sigma^2\rho & \sigma^2\rho \\ \sigma^2\rho & \sigma^2-\lambda & \sigma^2\rho \\ \sigma^2\rho & \sigma^2\rho & \sigma^2-\lambda \end{vmatrix}=[\sigma^2(1+2\rho)-\lambda][\sigma^2(1-\rho)-\lambda]^2=0$$

より $\lambda_1=\sigma^2(1+2\rho)$ と，$\lambda_2=\sigma^2(1-\rho)$（2重根）をえて，

$\lambda_1=\sigma^2(1+2\rho)$ に対応する固有ベクトルは

$\sigma^2\begin{pmatrix}-2\rho & \rho & \rho\\ \rho & -2\rho & \rho\\ \rho & \rho & -2\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ より対応する単位固有ベクトル $e_1'=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ をうる。また，

$\lambda_2=\sigma^2(1-\rho)$ に対応する固有ベクトルは

$(\Sigma-\lambda_2\mathrm{I})\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，$(\Sigma-\lambda_2\mathrm{I})\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ より対応する単位固有ベクトル

$$e_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\quad e_3'=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$$

をうる。

ゆえに

$S[\lambda_1|\Sigma]=S[e_1]$，$S[\lambda_2|\Sigma]=S[e_2,e_3]$ で，

$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]$，$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]$ はつぎのようになる。

$$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_3 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_3 & & \vdots\\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_3\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{1}_{3n} & \mathrm{B}^-\end{array}\right]=S(\boldsymbol{1}_{3n})\oplus S(\mathrm{B}^-)$$

$$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]=S\left[\begin{array}{cccc:cccc}e_2 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & e_3 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & e_2 & & \vdots & \boldsymbol{0} & e_3 & & \vdots\\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots & \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} & \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & e_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & e_3\end{array}\right]=S[\hat{e}_2]\oplus S[\hat{e}_3]\oplus S(E_2^-)\oplus S(E_3^-)$$

（図表3）

λ_1	λ_2	
$S(\boldsymbol{1}_{3n})$	$S(\hat{e}_2)$	$S(\hat{e}_3)$
$S(\mathrm{B}^-)$ dim$=n-1$	$S(E_2^-)$ dim$=n-1$	$S(E_3^-)$ dim$=n-1$

であり，

$$\left.\begin{array}{l}\|P_{\hat{e}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi'^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{e}_2}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2)\\ \|P_{\hat{e}_3}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi'^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{e}_3}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2)\\ \|P_{S(E_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=n-1}\\ \|P_{S(E_3^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=n-1}\end{array}\right\}\perp\!\!\!\perp$$

より，次の仮説検定法をうる（定理２による）

H；$\mu_1-\mu_3=0$，$\mu_1-2\mu_2+\mu_3=0 \rightleftarrows \mu_1=\mu_2=\mu_3$

の検定には次の事実を使う

$$\frac{\{\|P_{\hat{e}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{\hat{e}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\}/2}{\{\|P_{S(E_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{S(E_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\}/2(n-1)} \sim F^2_{2(n-1)}(\text{under } \mu_1=\mu_2=\mu_3 \text{ is true})$$

ここに，$y_{1i}\equiv x_{1i}-x_{3i}$，$y_{2i}\equiv x_{1i}-2x_{2i}+x_{3i}$，$(i=1,2\cdots n)$

とすると

$$\|P_{\hat{e}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{2}n\bar{y}_1^2,\quad \|P_{\hat{e}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{6}n\bar{y}_2$$

$$\|P_{S(E_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}y_{1i}^2-n\bar{y}_1^2\right]$$

$$\|P_{S(E_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n}y_{2i}^2-n\bar{y}_2^2\right]$$

〔3.3〕　**$a=4$　のとき，$\boldsymbol{x}\sim N_4(R_x\boldsymbol{1}_4+\boldsymbol{\mu},\ \Sigma)$** のとき$\Sigma$は

$$\Sigma=\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}>0 \text{ である}$$

（注３）　$\boldsymbol{x}$の任意標本ベクトル$\boldsymbol{x}_i'=(x_{1i},x_{2i},x_{3i},x_{4i})$，　$i=1,2\cdots n$

$\hat{\boldsymbol{x}}'=(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2',\cdots\boldsymbol{x}_n')$ とする。

$$|\Sigma-\lambda\mathrm{I}|=\begin{vmatrix} \sigma^2-\lambda, & \sigma^2\rho, & 0, & \sigma^2\rho \\ \sigma^2\rho, & \sigma^2-\lambda, & \sigma^2\rho, & 0 \\ 0, & \sigma^2\rho, & \sigma^2-\lambda, & \sigma^2\rho \\ \sigma^2\rho, & 0, & \sigma^2\rho, & \sigma^2-\lambda \end{vmatrix}=\{\sigma^2(1+2\rho)-\lambda\}\times\{\sigma^2(1-2\rho)-\lambda\}\times(\sigma^2-\lambda)^2$$

より固有根 $\lambda_1=\sigma^2(1+2\rho)$，$\lambda_2=\sigma^2$（２重根），$\lambda_3=\sigma^2(1-2\rho)$対応する単位固有ベクトルはそれぞれ，

$$\underset{\boldsymbol{1}_4}{\underset{\|}{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}};\ \underset{\boldsymbol{e}_1}{\underset{\|}{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}}},\ \underset{\boldsymbol{e}_2}{\underset{\|}{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}}};\ \underset{\boldsymbol{e}_3}{\underset{\|}{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}}}$$

ゆえに，

$S[\lambda_1|\Sigma]=S[\boldsymbol{1}_4]$，$S[\lambda_2|\Sigma]=S[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，$S[\lambda_3|\Sigma]=S[\boldsymbol{e}_3]$で

$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]$，$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]$，$S[\lambda_3|\hat{\Sigma}]$はつぎのようになる。

$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]=S[\boldsymbol{1}_{4n}]\oplus S[B^-]$

$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]=S[\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2]\oplus S[E_1^-\,\vdots\,E_2^-]$

$$S[\lambda_3|\hat{\Sigma}]=S[\hat{\boldsymbol{e}}_3]\oplus S(E_3^-)$$

(図表 4)

λ_1	λ_2		λ_3
$S(\boldsymbol{1}_{4n})$	$S(\hat{\boldsymbol{e}}_1)$	$S(\hat{\boldsymbol{e}}_2)$	$S(\hat{\boldsymbol{e}}_3)$
$S(\mathrm{B}^-)$	$S(E_1^-)$	$S(E_2^-)$	$S(E_3^-)$

$$\left.\begin{aligned}
&\|P_{\hat{e}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\acute{\chi}^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{e}_1}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2)\\
&\|P_{\hat{e}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\acute{\chi}^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{e}_2}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2)\\
&\|P_{S(E_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=n-1}\\
&\|P_{S(E_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=n-1}\\
&\|P_{\hat{e}_3}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_3\acute{\chi}^2_{f=1}\ (\lambda=\|P_{\hat{e}_3}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2)\\
&\|P_{S(E_3^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_3\chi^2_{f=n-1}
\end{aligned}\right\}\perp\!\!\!\perp$$

より次の仮説検定法をうる。(定理 1 と定理 2)

$$\begin{aligned}H_{\sigma^2}:\ &\mu_1+\mu_2-(\mu_3+\mu_4)=0\\ &\mu_1-(\mu_2+\mu_3)+\mu_4=0\end{aligned}\ \rightleftarrows\ \mu_1=\mu_3,\ \ \mu_2=\mu_4\ \ \text{の検定に}$$

$$\frac{\|P_{S(\hat{e}_1)\oplus S(\hat{e}_2)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2}{\|P_{S(E_1^-)\oplus S(E_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2(n-1)}\ \sim F^2_{2(n-1)}\ (\text{under } \mu_1=\mu_3,\mu_2=\mu_4 \text{ are true})$$

$H_{(1-2\rho)\sigma^2}$: $(\mu_1-\mu_2)+(\mu_3-\mu_4)=0$ の検定には,

$$\frac{\|P_{\hat{e}_3}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(E_3^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\ \sim F^1_{n-1}\ (\text{under } (\mu_1-\mu_2)+(\mu_3-\mu_4)=0 \text{ is true})$$

(注 4) H_{σ^2} と $H_{(1-2\rho)\sigma^2}$ が共に許容されるとそれは

$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$ の許容となる

また $y_{1i}\equiv x_{1i}+x_{2i}-(x_{3i}+x_{4i})$, $y_{2i}\equiv x_{1i}-(x_{2i}+x_{3i})+x_{4i}$,

$y_{3i}\equiv x_{1i}-x_{2i}+x_{3i}-x_{4i}$ $(i=1,2\cdots n)$ とすると,

$$\|P_{\hat{e}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}n\bar{y}_1^2,\ \ \|P_{\hat{e}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}n\bar{y}_2^2,\ \ \|P_{\hat{e}_3}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}n\bar{y}_3^2,$$

$$\|P_{S(E_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum(y_{1i}-\bar{y}_1)^2,\ \ \|P_{S(E_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum(y_{2i}-\bar{y}_2)^2,$$

$$\|P_{S(E_3^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum(y_{3i}-\bar{y}_3)^2$$

である。

特に x が 2^2−factorial design のとき,

Rブロックで

(要因)B / A	B_1		B_2
A_1	χ_1	$\rightleftarrows$	χ_2
	$\downarrow\uparrow$		$\downarrow\uparrow$
A_2	χ_4	$\rightleftarrows$	χ_3

$$E(x_1)=R+\underbrace{\alpha_1+\beta_1+\gamma_{11}}_{(\mu_1)}$$

$$E(x_2)=R+\underbrace{\alpha_1+\beta_2+\gamma_{12}}_{(\mu_2)}$$

$$E(x_3)=R+\underbrace{\alpha_2+\beta_2+\gamma_{22}}_{(\mu_3)}$$

$$E(x_4)=R+\underbrace{\alpha_2+\beta_1+\gamma_{21}}_{(\mu_4)}$$

H_{σ^2}の仮説は,

$\mu_1+\mu_2-(\mu_3+\mu_4)=2(\alpha_1-\alpha_2)=0$

$\mu_1-(\mu_2+\mu_3)+\mu_4=2(\beta_1-\beta_2)=0$　となり

Aの主効果, Bの主効果の均一性を仮説とすること,

$H_{(1-2\rho)\sigma^2}$の仮説は

$\mu_1-\mu_2+\mu_3-\mu_4=4\gamma$ (γ は interaction (A,B)) = 0

となり交互作用なしの仮説となる。

§4. 残された問題と結論

〔4.1〕　$\boldsymbol{a}=5$　のとき, $\boldsymbol{x}\sim N_5(R_x\boldsymbol{I}_5+\boldsymbol{\mu},\ \Sigma)$のときの$\Sigma$は

$$\Sigma=\sigma^2\begin{bmatrix}1&\rho&0&0&\rho\\ \rho&1&\rho&0&0\\ 0&\rho&1&\rho&0\\ 0&0&\rho&1&\rho\\ \rho&0&0&\rho&1\end{bmatrix}>0 \text{ である。}$$

このときは　$|\Sigma-\lambda I_5|=0$ のΣの固有根は

$\lambda_1=(1+2\rho)\sigma^2$, $\lambda_2=(1-a_1\rho)\sigma^2$, $\lambda_3=(1-a_2\rho)\sigma^2$, $a_1=\dfrac{(1+\sqrt{5}}{2}$, $a_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(単根)　(2重根)　(2重根)

そして, 対応する固有ベクトルと固有空間は,

$$S[\lambda_1|\Sigma]=S[\boldsymbol{I}_5],\quad S[\lambda_2|\Sigma]=S\begin{bmatrix}a_1&a_1-1\\ -a_1&a_1-1\\ 1&-a_1\\ 0&2\\ -1&-a_1\end{bmatrix},\quad S[\lambda_3|\Sigma]=S\begin{bmatrix}a_2&a_2-1\\ -a_2&a_2-1\\ 1&-a_2\\ 0&2\\ -1&-a_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}\| & \| & \| & \|\\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2\end{array}$$

である, また

$\hat{\Sigma}$の固有根 λ_1, λ_2, λ_3に対する固有空間を, それぞれ$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]$, $S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]$, $S[\lambda_3|\hat{\Sigma}]$とすると各次元は順に$n$, $2n$, $2n$であり

$$S[\lambda_1|\hat{\Sigma}]=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_5 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_5 & & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I}_5 \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_{5n} & B^- \end{array}\right]=S(\boldsymbol{I}_{3n})\oplus S(B^-)$$

$$S[\lambda_2|\hat{\Sigma}]=S\left[\begin{array}{cccc:cccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}_1 & & \vdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}_2 & & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots & \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} & \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right]=S[\hat{\boldsymbol{b}}_1]\oplus S[\hat{\boldsymbol{b}}_2]\oplus S(B_1^-)\oplus S(B_2^-)$$

$$S[\lambda_3|\hat{\Sigma}]=S\left[\begin{array}{cccc:cccc} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_1 & & \vdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_2 & & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots & \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} & \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{c}_2 \end{array}\right]=S(\hat{\boldsymbol{c}}_1)\oplus S(\hat{\boldsymbol{c}}_2)\oplus S(C_1^-)\oplus S(C_2^-)$$

(図表５)

λ_1	λ_2	λ_3
$S(\boldsymbol{I}_{5n})$	$S(\hat{\boldsymbol{b}}_1)\oplus S(\hat{\boldsymbol{b}}_2)$	$S(\hat{\boldsymbol{c}}_1)\oplus S(\hat{\boldsymbol{c}}_2)$
$S(B^-)$	$S(B_1^-)\oplus S(B_2^-)$	$S(C_1^-)\oplus S(C_2^-)$

また
$$\left.\begin{array}{l} \|P_{\hat{b}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\hat{\chi}^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{b}_1}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2) \\ \|P_{\hat{b}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\hat{\chi}^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{b}_2}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2) \\ \|P_{S(B_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=n-1} \\ \|P_{S(B_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=n-1} \\ \|P_{\hat{c}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_3\hat{\chi}^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{c}_1}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2) \\ \|P_{\hat{c}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_3\hat{\chi}^2_{f=1}(\lambda=\|P_{\hat{c}_2}E(\hat{\boldsymbol{x}})\|^2) \\ \|P_{S(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_3\chi^2_{f=n-1} \\ \|P_{S(C_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_3\chi^2_{f=n-1} \end{array}\right\}\perp\!\!\!\perp$$

以上より

H_{b_1,b_2}：$\boldsymbol{b}_1'\boldsymbol{\mu}=0$, $\boldsymbol{b}_2'\boldsymbol{\mu}=0$　すなわち

$$a_1(\mu_1-\mu_2)+(\mu_3-\mu_5)=0,\quad a_1(\mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_5)-(\mu_1+\mu_2-2\mu_4)=0$$

の同時検定として，次の UMP-Test がえられる。

$$\frac{\left\{\|P_{\hat{b}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{\hat{b}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\right\}/2}{\left\{\|P_{S(B_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{S(B_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}^2\right\}/2(n-1)}\sim F^2_{2(n-1)}(\text{under } H_{b_1,b_2} \text{ is true})$$

また同様にして

H_{c_1,c_2}：$\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$, $\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$　すなわち

$$a_2(\mu_1-\mu_2)+(\mu_3-\mu_5)=0,\quad a_2(\mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_5)-(\mu_1+\mu_2-2\mu_4)=0$$

の同時検定として

$$\frac{\left\{\|P_{\hat{c}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{\hat{c}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\right\}/2}{\left\{\|P_{S(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{S(C_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\right\}/2(n-1)}\sim F^2_{2(n-1)}\text{(under } H_{c_1,c_2} \text{ is true)}$$

がえられる。

しかし$H_{b_1b_2}$の　$\boldsymbol{b}_1'\boldsymbol{\mu}=0,\ \boldsymbol{b}_2'\boldsymbol{\mu}=0$　の$\boldsymbol{\mu}'=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)$
に関する統計的意味付けが複雑であり過ぎるし，H_{c_1,c_2}の$\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0,\ \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$についても統計的意味付けが困難である。ただし

$$\boldsymbol{b}_1'\boldsymbol{\mu}=0,\ \boldsymbol{b}_2'\boldsymbol{\mu}=0,\ \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0,\ \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0 \rightleftarrows \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_5(=\mu)$$

より，上記$\boldsymbol{b}_i'\boldsymbol{\mu}=0\,(i=1,2)$，$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0\,(i=1,2)$の同時採択は，平均ベクトル$\boldsymbol{\mu}$について全成分均一性を意味する。

一般に$a\geqq5$のときの2節で述べた検定では
仮説　$\boldsymbol{d}'\boldsymbol{\mu}=0$や$\boldsymbol{d}_1'\boldsymbol{\mu}=0,\ \cdots,\ \boldsymbol{d}_l'\boldsymbol{\mu}=0$の意味づけがむつかしいように思う。

ただし general linear model の母平均　$\boldsymbol{\mu}$につき単一の式
$\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=(1,-1,\cdots,0)\boldsymbol{\mu}=\mu_1-\mu_2=0$ の検定には

$$\frac{\|P_{\hat{c}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\sim \hat{F}^1_{n-1}$$

$$\sim F^1_{n-1}\text{(under } \mu_1-\mu_2=0 \text{ is true).}$$

また別に
$\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=(1,0,-1,0,\cdots,0)\boldsymbol{\mu}=\mu_1-\mu_3=0$ の検定には，

$$\frac{\|P_{\hat{c}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\sim F^1_{n-1}$$

$$\sim F^1_{n-1}\text{(under } \mu_1-\mu_2=0 \text{ is true).}$$

で検定されるが，$\mu_1-\mu_2=0$，$\mu_1-\mu_3=0$ の同時検定は出来ない。

また，$\|P_{si}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$に関する統計的独立性については，上の$\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$については，

$$\begin{array}{ccccc}
\|P_{\hat{c}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 & - & \not\perp\!\!\!\perp & - & \|P_{\hat{c}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \\
| & \diagdown & & \diagup & | \\
\perp\!\!\!\perp & & \perp\!\!\!\perp & & \perp\!\!\!\perp \\
| & \diagup & & \diagdown & | \\
\|P_{S(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 & - & \not\perp\!\!\!\perp & - & \|P_{S(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2
\end{array}$$

Σの固有ベクトル$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2$については

$$\begin{array}{ccccc}
\|P_{\hat{d}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 & - & \perp\!\!\!\perp & - & \|P_{\hat{d}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \\
| & \diagdown & & \diagup & | \\
\perp\!\!\!\perp & & \perp\!\!\!\perp & & \perp\!\!\!\perp \\
| & \diagup & & \diagdown & | \\
\|P_{S(D_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 & - & \perp\!\!\!\perp & - & \|P_{S(D_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2
\end{array}$$

であることが容易に示される。

また，$\hat{\boldsymbol{c}}_1$，$\hat{\boldsymbol{c}}_2$，$\hat{\boldsymbol{d}}_1$，$\hat{\boldsymbol{d}}_2$等 $\in$Estimation Space.
$S(C_1^-)$，$S(C_2^-)$，$S(D_1^-)$，$S(D_2^-)$等は Error Space に含まれる。ただ$S(B^-)\subset$Estimation Space.であることは問題解決の基礎的情報である。

引用図書

(1) S.F.Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.

(2) A.M.Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.

(3) T.W.Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.

(4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版。

(5) 宇喜多義昌 (1988), 多変量統計解析, $\|P_Sx\|^2$とその分布の研究, 序説—明星大学出版部。

(6) 宇喜多義昌 (1987), 多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部。

(7) 塩谷実 (1990), 多変量解析概論, 朝倉書店。

(8) M.Siotani. 他2名 (1985), Modern Multivariate Statistical Analysis, (American Sciences Press.)

引用論文

(1) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学研究紀要 (理工学部)。1987

(2) Y.Ukita & K.Noda : About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1987.

(3) Y.Ukita & K.Noda : Testing Hypothesis on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI 46th Contributed Papers) 1987.

(4) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Model の場合の仮説検定について, 明星大学研究紀要—理工学部, 1988 (第24号)

(5) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Model の場合のF—検定法の応用, 明星大学研究紀要—理工学部, 1989 (第25号)

(6) 宇喜多義昌：Generalized Linear Model の場合の仮説検定について (II), 明星大学研究紀要—理工学部1989 (第25号)

(7) Y.Ukita "The Decomposition of The Principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The Linear Model. (東京理科大学研究専攻科雑誌。No 1, Vol 5, 1984.

(8) Y.Ukita, K.Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis contrast $c'\mu=0$, And Its Application to The Regression Theorem" (Japan China Symposium on Statisics) 1989.

(9) 宇喜多義昌：Generalized Linear Model の場合の仮説検定についてIII, 明星大学研究紀要—理工学部1990 (第26号)

(10) 宇喜多義昌, 小野英夫：一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察, 明星大学研究紀要—理工学部1991 (第27号)

(11) 宇喜多義昌, 塩谷実, 小野英夫：Generalized Linear Model をもつ2要因2水準の要因実験で, 反復実験の場合の統計的仮説検定問題について, 明星大学研究紀要—理工学部1992 (第28号)

(12) Y.Ukita, K.Noda, and E.Miyaoka : "UMP Invariant Test for a Generalized

Linear Model." (Journal of Multivariate Analysis. Vol 40. No 1. January 1992).
(13) Y.Ukita, K. Noda and E.Miyaoka : "On F-TESTS AND LINEAR HYPOTHESIS IN A GENERAL LINEAR MODEL, (Communications in statistics Theory and Methods 21(7) 1992).