Generalized Linear Model をもつ2要因2水準の要因実験で，反復実験の場合の統計的仮説検定問題について

宇喜多義昌*　塩谷実**　小野英夫***

§1. はじめに　宇喜多，小野著の一連の次の論文

Generalized Linear Model の場合の仮説検定について（明星大学，研究紀要，理工学部 No.24, 1988)。Generalized Linear Model の場合の仮説検定について（II)（同大学，同紀要，同学部 No.25, 1989)。Generalized Linear Model の場合の仮説検定について（III）—MANOVA-CASE,（同大学，同紀要，No.26, 1990）一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察（同大学，同紀要，同学部 No.27, 1991）をうけて，今回は，次の問題を論ずる。

「$\boldsymbol{x}\sim N_a(R(x)\boldsymbol{1}_a+\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ が2^2-要因実験の場合の各種 $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$ $(i=1,2\cdots r)$の仮説検定問題」

このために1988〜1991にわたる Generalized Linear Model での各種論文の主要結果をあげておく。

$\boldsymbol{x}\sim N_a(R(x)\boldsymbol{1}_a+\boldsymbol{\mu},\ \Sigma)$ のとき，$\boldsymbol{x}$の任意標本 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ からの na成分ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$を，

$$\hat{\boldsymbol{x}}'\equiv(\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2',\cdots\boldsymbol{x}_n')$$

とすると，$\hat{\boldsymbol{x}}$の構造式は，つぎのようになる。

$$\begin{array}{cccccccc} (1) & (2) & \cdots & (n) & (\mathrm{I}) & (\mathrm{II}) & & (a) \end{array}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_a & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \begin{matrix}1&0&&0\\0&1&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&&1\end{matrix} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_a & \cdots & \boldsymbol{0} & \begin{matrix}1&0&&0\\0&1&\ddots&\vdots\\ \vdots&0&\ddots&\vdots\\0&0&&1\end{matrix}\\ \vdots&\vdots&&&\begin{matrix}\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\end{matrix}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{1}_a&\begin{matrix}1&0&&0\\0&1&&\vdots\\ \vdots&0&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1\\ \vdots\\ R_n\\ \mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_a\end{bmatrix}+\boldsymbol{e}_{na}$$

*，**，***一般教養教授　数学

$$\equiv[\hat{\mathbf{1}}_1,\hat{\mathbf{1}}_2,\cdots\hat{\mathbf{1}}_n,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\boldsymbol{a}_a]\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{\mu}\end{bmatrix}+\boldsymbol{e}_{na}$$

$$\equiv A\boldsymbol{q}+\boldsymbol{e}_{na}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_{na}\sim N_{na}(0,\hat{\Sigma})$ なる誤差ベクトルである。

$$\hat{\Sigma}\text{は，}\ \hat{\Sigma}\equiv V(\boldsymbol{e}_{na})=\begin{pmatrix}\Sigma & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Sigma & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma\end{pmatrix},\quad \Sigma_{a\times a}=(\sigma_{ij})>0\text{である。}$$

また$\hat{\mathbf{1}}_1,\cdots\hat{\mathbf{1}}_n,\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_a$を底とするベクトル空間を$S(A)$とする。

$S(\hat{\mathbf{1}}_1,\cdots\hat{\mathbf{1}}_n,\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_a)\equiv S(A)$を，推定空間といい，次元は$n+a-1$で，$S^{\perp}(A)$を誤差空間といい，次元は$(n-1)(a-1)$である。

大抵の Generalized Liner Model の場合，Σが固有ベクトル$\mathbf{1}_a$をもつ場合が多い。そこで，

$$\Sigma\mathbf{1}_a=\lambda_1\mathbf{1}_a\quad\rightleftarrows\quad\sum_{j=1}^{a}\sigma_{ij}=\lambda_1\quad(i=1,2,\cdots a)\cdots\cdots(1.1)$$

の場合について考える。

$\hat{\Sigma}$についての固有根と固有ベクトル，固有ベクトル空間について考える。

$$|\hat{\Sigma}-\lambda I_{na}|=|\Sigma-\lambda I_a|^n$$

より，Σの固有根λ_1(γ_1重根)は，$\hat{\Sigma}$の固有根であり，$n\gamma_1$重根で，

Σの　〃　λ_2(γ_2重根)は，$\hat{\Sigma}$の　〃　，$n\gamma_2$重根で，

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

Σの　〃　λ_a(γ_a重根)は，$\hat{\Sigma}$の　〃　，$n\gamma_a$重根で

ある。ただし$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_a=a$である。

$\hat{\Sigma}$の各$\lambda_1,\cdots\lambda_a$に対応する固有ベクトル空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1),\cdots,S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_a)$を考える。

(1.1) の固有根，λ_1が単根の場合と，重根の場合とに分けて考察する。

$\gamma_1=1$のとき

$\Sigma\boldsymbol{e}(\mathbf{1}_a)=\lambda_1\boldsymbol{e}(\mathbf{1}_a)$で，$\lambda_1$に対応する$\Sigma$の単位固有ベクトルは$\boldsymbol{e}(\mathbf{1}_a)$で，$\lambda_1$に対応する$\hat{\Sigma}$の固有ベクトル空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)$はつぎの列ベクトルを基底とするベクトル空間である。

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)=S\begin{bmatrix}\mathbf{1}_a & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_a & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_a\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:cccc}\mathbf{1}_a & \mathbf{1}_a & \mathbf{1}_a & \cdots & \mathbf{1}_a\\ \mathbf{1}_a & -\mathbf{1}_a & \mathbf{1}_a & & \mathbf{1}_a\\ \vdots & \mathbf{0} & -2\mathbf{1}_a & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & & \mathbf{1}_a\\ \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -(n-1)\mathbf{1}_a\end{array}\right]$$

$$=S[\mathbf{1}_{na}\,\vdots\,E^-]$$

$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)=S[\hat{\mathbf{1}}_1,\hat{\mathbf{1}}_2,\cdots\hat{\mathbf{1}}_n]\subset S(A)$であり，つぎのことが成立つ。

$P_{e(\mathbf{1}_{na})}\hat{\boldsymbol{x}}\sim N(P_{e(\mathbf{1}_{na})}A\boldsymbol{q},\lambda_1)$，$P_{e(\mathbf{1}_{na})}A\boldsymbol{q}=\sqrt{na}(\overline{R}+\overline{\mu})$

$\|P_{s(E^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_1\acute{\chi}^2_{f=n-1}(\|P_{s(E^-)}A\boldsymbol{q}\|^2)$

$\|P_{s(E^-)}A\boldsymbol{q}\|^2=0\quad\rightleftarrows\quad R_1=R_2=\cdots=R_n$　である。

$\gamma_1\geqq 2$のとき

$\Sigma e(1_a)=\lambda_1 e(1_a)$の外に，$\Sigma d=\lambda_1 d$を満足し互に直交する単位ベクトル$d_1,d_2,\cdots,d_{\gamma_1-1}$が存在して，$i=1,2,\cdots,\gamma_1-1$に対して，それぞれ次のこと

$$S\begin{bmatrix} d_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_i & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_i \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} d_i & \\ d_i & \\ \vdots & D_i^- \\ d_i & \end{array}\right]=S(\hat{d}_i)\oplus S[D_i^-]$$

$S(\hat{d}_i)\subset S(A),\quad S(\hat{d}_i)\perp S(\hat{d}_j)\ i\neq j,\quad S(\hat{d}_1)\oplus\cdots\oplus S(\hat{d}_{\gamma_1-1})\subset S(A),$

$S(D_i^-)\subset S^{\perp}(A),\quad S(D_i^-)\perp S(D_j^-)\ i\neq j,\quad S(E^-)\perp S(D_i^-),$

$S(D_1^-)\oplus S(D_2^-)\oplus\cdots\oplus S(D_{\gamma_1-1}^-)\subset S^{\perp}(A)$

が分る。

$\|P_{s(\hat{d}_1,\ldots\hat{d}_{\gamma_1-1})}\hat{x}\|^2\sim\lambda_1\chi^{\prime 2}_{f=\gamma_1-1}(\|P_{s(\hat{d}_1,\cdots\hat{d}_{\gamma_1-1})}Aq\|^2)$

$\|P_{s(D_1^-,\cdots D_{\gamma_1-1}^-)}\hat{x}\|^2\sim\lambda_1\chi^2_{f=n-1}$であり，

$\|P_{s(\hat{d}_1,\ldots\hat{d}_{\gamma_1-1})}\hat{x}\|^2,\|P_{s(D_1^-,\cdots D_{\gamma_1-1}^-)}\hat{x}\|^2,\|P_{s(E^-)}\hat{x}\|^2$は互に統計的に独立である。

以上から，

$\boldsymbol{H_d}$:　　$d_1'\mu=d_2'\mu=\cdots=d_{\gamma_1-1}'\mu=0\leftrightarrow S(d_1,d_2,\cdots d_{\gamma_1-1})\perp\mu$

に対する検定量は

$$\frac{\|P_{s(\hat{d}_1,\ldots\hat{d}_{\gamma_1-1})}\hat{x}\|^2/\gamma_1-1}{\|P_{s(D_1^-,\cdots D_{\gamma_1-1}^-)}\hat{x}\|^2/n(\gamma_1-1)}\sim F^{\gamma_1-1}_{n(\gamma_1-1)}(\text{under } H_d \text{ are True}) \quad\cdots\cdots(1.2)$$

$\boldsymbol{H_R}$:　　$R_1=R_2=\cdots=R_n$　　に対する検定量は

$$\frac{\|P_{s(E^-)}\hat{x}\|^2/n-1}{\|P_{s(D_1^-,\cdots D_{\gamma_1-1}^-)}\hat{x}\|^2/n(\gamma_1-1)}\sim F^{n-1}_{n(\gamma_1-1)} \quad\cdots\cdots(1.3)$$

λ_1(単根)

$S(1_{na})$	
$S(E^-)$	

Σの固有根λ_1がγ_1重根$\geqq 2$

$S(1_{na})$	$S(\hat{d}_1,\cdots\hat{d}_{\gamma_1-1})$	
$S(E^-)$	誤差空間 $S(D_1^-,\cdots D_{\gamma_1-1}^-)$	

またΣの他の固有根$\lambda_2,\cdots\lambda_a$がそれぞれ$\gamma_2,\gamma_3,\cdots\gamma_a$重根のとき，$\lambda_2$が$\Sigma$の$\gamma_2$重根なら$\hat{\Sigma}$の$n\gamma_2$重根である。

λ_2についてΣの単位直交ベクトル $C_1,C_2,\cdots,\ C_{\gamma_2}$ が存在して，λ_2について$\hat{\Sigma}$の固有空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_2)$は次元数 $n\gamma_2$ である。

またつぎのことがいえる。

$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_2)=S(C_1)\oplus S(C_2)\oplus\cdots\oplus S(C_{\gamma_2})$で，ここに$S(C_i)$は，

$$S(C_i)=S\begin{bmatrix} C_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_i & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_i \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} C_i & \\ C_i & \\ \vdots & C_i^- \\ \vdots & \\ C_i & \end{array}\right]=S(\hat{C}_i)\oplus S(C_i^-)$$

であり

$S(\hat{C}_i) \subset S(A)$, $S(C_i^-) \subset S^{\perp}(A)$

$\dim S(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \cdots, \hat{C}_{\gamma_2}) = \gamma_2$, $\dim S(C_1^-, C_2^-, \cdots, C_{\gamma_2}^-) = \gamma_2(n-1)$

$\Sigma \boldsymbol{1} = \lambda_1 \boldsymbol{1}$のとき	Σの固有根λ_2の場合	
	$S(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \cdots, \hat{C}_{\gamma_2})$, 次元$\gamma_2$	
	誤差空間 $S(C_1^-, C_2^-, \cdots, C_{\gamma_2}^-)$ 次元 $\gamma_2(n-1)$	

$\hat{C}_i' \equiv (C_i', C_i', \cdots, C_i')$を規準化した単位ベクトル$e(\hat{C}_i)$は,

$$e(\hat{C}_i)' = \frac{1}{\sqrt{n}}(C_i', C_i', \cdots, C_i') \in S(\hat{C}_i)$$

であるから

$P_{\hat{C}_i}\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}(C_i' x_1 + \cdots + C_i' x_n)$ は正規分布で，平均，分散，共分散は,

$E(P_{\hat{C}_i}\hat{x}) = \sqrt{n}\, C_i' \boldsymbol{\mu}$, $V(P_{\hat{C}_i}\hat{x}) = C_i' \Sigma C_i = \lambda_2$

$\mathrm{Cov}(P_{\hat{C}_i}\hat{x}, P_{\hat{C}_j}\hat{x}) = 0 \quad i \neq j$

$\mathrm{Cov}(P_{\hat{C}_i}\hat{x}, P_e \hat{x}) = 0$, ただし$\forall e \in S(C_1^-, \cdots, C_{\gamma_2}^-)$

以上のことから,

$C_i' \boldsymbol{\mu} \cdot \sqrt{n}$は estimable であり，$e'(\hat{C}_i)\hat{x}$が，$C_i' \boldsymbol{\mu} \cdot \sqrt{n}$の$B \cdot L \cdot U \cdot E$であることも分る。

上述のことから，次のことも分る。

$\| P_{s(\hat{C}_1, \hat{C}_2, \cdots \hat{C}_n)} \hat{x} \|^2 \sim \lambda_2 \acute{\chi}^2_{f=r_2}(\| P_{s(\hat{C}_1 \cdots \hat{C}_n)} A\boldsymbol{q} \|^2)$,

$\| P_{s(C_1^-, \cdots C_{\gamma_2}^-)} \hat{x} \|^2 \sim \lambda_2 \chi^2_{f=r_2(n-1)}$,

$\| P_{s(\hat{C}_1 \cdots \hat{C}_n)} \hat{x} \|^2 \perp\!\!\!\perp \| P_{s(C_1^- \cdots C_{\gamma_2}^-)} \hat{x} \|^2$

であることから,

$\boldsymbol{H_c}: \boldsymbol{C_1' \mu = C_2' \mu = \cdots = C_{\gamma_2}' \mu = 0 \longleftrightarrow S(C_1, C_2, \cdots C_{\gamma_2}) \perp \mu}$

の検定に対して

$$\frac{\| P_{s(\hat{C}_1 \cdots \hat{C}_n)} \hat{x} \|^2 / \gamma_2}{\| P_{s(C_1^- \cdots C_{\gamma_2}^-)} \hat{x} \|^2 / \gamma_2(n-1)} \quad \sim \boldsymbol{F}^{\gamma_2}_{\gamma_2(n-1)} \quad \text{(under } H_c \text{ are true)}$$

§2. 応用例として，2要因2水準の要因実験2^2の反復実験について，3通りの Generalized Linear Model を考える。

2^2要因実験$(A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2)$の構造式はつぎの通りである。

第k-subjectに対して

R_k	B_1	B_2
A_1	$x_{11}(k)$	$x_{12}(k)$
A_2	$x_{21}(k)$	$x_{22}(k)$

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} = R(k)\boldsymbol{1}_4 + \alpha & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{e}_k \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
\boldsymbol{x}(k) & \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{g}
\end{array}$$

(2.1)　$\boldsymbol{x}(k)$が Split Plot Design のとき，分散，共分散は，

$$V(\boldsymbol{e}_k) = \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} \sigma_1^2+\sigma_2^2, & \sigma_1^2+\rho\sigma_2^2 \\ \sigma_1^2+\rho\sigma_2^2, & \sigma_1^2+\sigma_2^2 \end{matrix} & \text{\Large 0} \\ \hdashline \text{\Large 0} & \begin{matrix} \sigma_1^2+\sigma_2^2, & \sigma_1^2+\rho\sigma_2^2 \\ \sigma_1^2+\rho\sigma_2^2, & \sigma_1^2+\sigma_2^2 \end{matrix} \end{array}\right] = \Sigma^* \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

(2.2)　$\boldsymbol{x}(k)$が Repeated Observation のとき（その1）

$$V(\boldsymbol{e}_k) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} \equiv \sigma^2 A(\rho) \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

(2.3)　$\boldsymbol{x}(k)$が Repeated Observation のとき（その2）

$$\rho\sigma^2 \qquad \rho\sigma^2$$

$$X(A_1,B_1) \quad X(A_1,B_2), \quad X(A_2,B_1) \quad X(A_2,B_2),$$

$$\rho\sigma^2 \qquad \rho\sigma^2$$

（共通のA_i, B_jについて共分散ありとみる）

$$V(\boldsymbol{e}_k) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 & \rho \\ \rho & 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} \equiv \sigma^2 D(\rho) \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

(2.1)，(2.2)，(2.3)のいずれも，$\boldsymbol{x}$の任意標本 $\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ から
$\tilde{\boldsymbol{x}}' \equiv (\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2', \cdots, \boldsymbol{x}_n')$とすると，$\tilde{\boldsymbol{x}} \in R^{4n}$で，

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} \boldsymbol{1}_4 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_4 & & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_4 \end{matrix}}^{n} & \begin{matrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{g} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{g} \end{matrix} \end{matrix}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$$

$$= [\underbrace{\hat{\boldsymbol{1}}_1 \ \hat{\boldsymbol{1}}_2 \cdots \hat{\boldsymbol{1}}_n \ \hat{\boldsymbol{f}}_1 \ \hat{\boldsymbol{f}}_2 \ \hat{\boldsymbol{g}}}_{\text{互いに直交}}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \hat{\boldsymbol{e}}$$

R^{4n}を次のように直和分解する。

$S(\boldsymbol{1}_{4n})$	$S(\hat{f}_1)$	$S(\hat{f}_2)$	$S(\hat{g})$
$S(B^-)$	$S(F_1^-)$	$S(F_2^-)$	$S(G^-)$

$S[\hat{\boldsymbol{1}}_1\hat{\boldsymbol{1}}_2\cdots\hat{\boldsymbol{1}}_n]=S(\boldsymbol{1}_{4n})\oplus S(B^-)$

$$S\begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1 \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} f_1 & \\ f_1 & F_1^- \\ \vdots & \\ f_1 & \end{array}\right], \qquad S\begin{bmatrix} f_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_2 \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} f_2 & \\ f_2 & F_2^- \\ \vdots & \\ f_2 & \end{array}\right],$$

$$S\begin{bmatrix} g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} g & \\ g & G^- \\ \vdots & \\ g & \end{array}\right]$$

推定空間：$S[\hat{\boldsymbol{1}}_1,\hat{\boldsymbol{1}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{1}}_n,\hat{f}_1,\hat{f}_2,\hat{g}]$

$\qquad =S(\boldsymbol{1}_{4n})\oplus S(B^-)\oplus S(\hat{f}_1)\oplus S(\hat{f}_2)\oplus S(\hat{g})$

次元$=1+(n-1)+1+1+1=(n+3)$

誤差空間$=S(F_1^-)\oplus S(F_2^-)\oplus S(G^-)$

次元$=(n-1)+(n-1)+(n-1)=3n-3$

e_{4n}の分散，共分散行列はつぎのようになる。

$$V(\hat{e}_{4n})=\begin{pmatrix} \Sigma & & 0 \\ & \Sigma & \\ 0 & & \ddots \ \Sigma \end{pmatrix}\equiv\hat{\Sigma}$$

$\hat{\Sigma}$の固有根と対応する固有空間を求めると，

$$|\hat{\Sigma}-\lambda I_{4n}|=|\Sigma-\lambda I_4|^n=0$$

より，$\hat{\Sigma}$の固有根 λ^* はΣの固有根 λ^* であり，Σの単根の固有根λ^*は$\hat{\Sigma}$に対してはn重根である。

またΣの固有根λ^*に対応する単位固有ベクトルを e とすれば，$\hat{\Sigma}$の固有根 λ^* に対応する固有空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda^*)$は次のようになる。

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda^*)=S\begin{bmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & e \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} e & \\ e & E^- \\ \vdots & \\ e & \end{array}\right]$$

(A)　Split plot design のとき

Σ^*の固有根 $\lambda_1=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+(\sigma_1^2+\rho\sigma_2^2)$ (2重根),

$\qquad\qquad\lambda_2=(1-\rho)\sigma_2^2$ (2重根)

λ_1に対応する固有空間$S_\Sigma(\lambda_1)=S\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=S[\boldsymbol{1},f_1]$,

λ_2に対応する固有空間$S_\Sigma(\lambda_2)=S\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=S[\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{g}]$

$\hat{\Sigma}^*=\mathrm{diag}(\Sigma^*,\Sigma^*,\cdots,\Sigma^*)$については

$$S_{\hat{\Sigma}^*}(\lambda_1)=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_4 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_4 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f}_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{f}_1 \end{bmatrix}=S(\boldsymbol{1}_{4n})\oplus S(B^-)\oplus S(\hat{\boldsymbol{f}}_1)\oplus S(F^-)$$

$$S_{\hat{\Sigma}^*}(\lambda_2)=S(\hat{\boldsymbol{f}}_2)\oplus S(F_2^-)\oplus S(\hat{\boldsymbol{g}})\oplus S(G^-)$$

$S(\lambda_1)$		$S(\lambda_2)$	
$S(\boldsymbol{1}_n)$	$S(\hat{\boldsymbol{f}}_1)$	$S(\hat{\boldsymbol{f}}_2)$	$S(\hat{\boldsymbol{g}})$
$S(B^-)$ $(n-1)$次元	$S(F_1^-)$ $(n-1)$次元	$S(F_2^-)$ $(n-1)$次元	$S(G^-)$ $(n-1)$次元

H_R: $R_1=R_2=\cdots=R_n$, $\dfrac{\|P_{S(B^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}{\|P_{S(F^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\sim F^{n-1}_{n-1}$ (under H_R is true)

H_α: $\alpha=0$, $\dfrac{\|P_{S(\hat{f}_1)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(F_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\sim F^1_{n-1}$ (under H_α is true)

H_β: $\beta=0$, $\dfrac{\|P_{S(\hat{f}_2)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2(n-1)}\sim F^1_{2(n-1)}$ (under H_β is true)

H_γ: $\gamma=0$, $\dfrac{\|P_{S(\hat{g})}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2(n-1)}\sim F^1_{2(n-1)}$ (under H_γ is true)

(B) Repeated Observation（その１）

$$V(\bar{e})=\begin{bmatrix} \sigma^2A(\rho) & & 0 \\ & \sigma^2A(\rho) & \\ 0 & & \ddots\ \sigma^2A(\rho) \end{bmatrix}$$

ここに

$\sigma^2A(\rho)\equiv\sigma\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}$で，固有根はつぎの$\lambda_1$，$\lambda_2$である。

$\lambda_1=(3\rho+1)\sigma^2$，$\lambda_2=(1-\rho)\sigma^2$ (3重根)。

λ_1に対応する固有空間$S_\Sigma(\lambda_1]=S\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=S(\boldsymbol{1}_4)$

λ_2に対応する固有空間$S_\Sigma(\lambda_2)=S\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=S(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{g})$

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_4 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_4 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_4 \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{1}_4 & \\ \boldsymbol{1}_4 & B^- \\ \vdots & \\ \boldsymbol{1}_4 & \end{array}\right]=S(\boldsymbol{1}_{4n})\oplus S(B^-)$$

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_2)=S(\hat{f}_1)\oplus S(\hat{f}_2)\oplus S(\hat{g})\oplus S(F_1^-)\oplus(F_2^-)\oplus S(G^-)$$

$S(\lambda_1)$	$S(\lambda_2)$		
$S(\boldsymbol{1}_{4n})$	$S(\hat{f}_1)$	$S(\hat{f}_2)$	$S(\hat{g})$
$S(B^-)$	$S(F_1^-)$	$S(F_2^-)$	$S(G^-)$

$H_{R_1=R_2=\cdots=R_n}$:$R_1=R_2=\cdots=R_n$は検定出来ず（対応する誤差空間がないため）

$$H_\alpha:\quad \alpha=0,\quad \frac{\|P_{S(\hat{f}_1)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(F_1^-,F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/3(n-1)}\sim F^1_{3(n-1)}$$

$$H_\beta:\quad \beta=0,\quad \frac{\|P_{S(\hat{f}_2)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(F_1^-,F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/3(n-1)}\sim F^1_{3(n-1)}$$

$$H_\gamma:\quad \gamma=0,\quad \frac{\|P_{S(\hat{g})}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(F_1^-,F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/3(n-1)}\sim F^1_{3(n-1)}$$

（注） 上記の，$\alpha=0$，$\beta=0$，$\gamma=0$の各検定式は無作為実験の2^2要因実験の検定式と同一である。

(C) Repeated observation（その２）

$X(A_1,B_1)$　$X(A_1,B_2,)$　$X(A_2,B_1)$　$X(A_2,B_2)$に対して，

$$\sigma^2D(\rho)\equiv\sigma^2\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 & \rho \\ \rho & 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$V(\hat{e})=\begin{pmatrix} \sigma^2D(\rho) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2D(\rho) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Sigma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma \end{pmatrix}\equiv\hat{\Sigma}$である。

$\hat{\Sigma}$の固有根と対応する固有空間を求める。

$\hat{\Sigma}$の固有根λ^*は，Σの固有根λ^*であり，Σの固有根λ^*は$\hat{\Sigma}$に対してはn重根である。

$$|\hat{\Sigma}-\lambda\boldsymbol{I}_{4n}|=|\Sigma-\lambda\boldsymbol{I}_4|^n=0$$

$$\begin{vmatrix} \sigma^2-\lambda & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & 0 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2-\lambda & 0 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & 0 & \sigma^2-\lambda & \rho\sigma^2 \\ 0 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \sigma^2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\{\sigma^2(1+2\rho)-\lambda\}(\sigma^2-\lambda)^2\{\sigma^2(1-2\rho)-\lambda\}=0$$

$\sigma^2D(\rho)$の固有根は，つぎの通りで，各対応する固有空間を表で示す。

$\lambda_1=\sigma^2(1+2\rho)$，$\lambda_2=\sigma^2$(2重根)，$\lambda_3=\sigma^2(1-2\rho)$

(固有根と固有空間)

固　有　根	$\lambda_1=\sigma^2(1+2\rho)$	$\lambda_2=\sigma^2$	$\lambda_3=\sigma^2(1-2\rho)$
$\Sigma=\sigma^2D(\rho)$に対応する固有空間	$S_\Sigma(\lambda_1)=S\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{1}_4$ $=S_\Sigma(\boldsymbol{1}_4)$	$S_\Sigma(\lambda_2)=S\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\-1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{f}_1\ \boldsymbol{f}_2$ $=S_\Sigma(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)$	$S_\Sigma(\lambda_3)=S\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{g}$ $=S_\Sigma(\boldsymbol{g})$

$V(\hat{e})$について，λ_1に対応する固有空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)$は

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_4 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_4 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{1}_4\end{bmatrix}=S\left[\ \boldsymbol{1}_4 \,\vdots\, B^-\right]=S[\boldsymbol{1}_{4n}]\oplus S[B^-]$$

λ_2に対応する固有空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_2)$は

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_2)=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f}_1 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{f}_1\end{bmatrix}\oplus S\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{f}_2 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{f}_2\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{f}_1 & \\ \boldsymbol{f}_1 & \\ \vdots & F_1^- \\ \boldsymbol{f}_1 & \end{array}\right]\oplus S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{f}_2 & \\ \boldsymbol{f}_2 & \\ \vdots & F_2^- \\ \boldsymbol{f}_2 & \end{array}\right]$$

$$=S(\hat{\boldsymbol{f}}_1)\oplus S(\hat{\boldsymbol{f}}_2)\oplus S[F_1^-]\oplus S[F_2^-]$$

λ_3に対応する固有空間$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_3)$は

$$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_3)=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{g} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{g} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{g}\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{g} & \\ \boldsymbol{g} & \\ \vdots & G^- \\ \boldsymbol{g} & \end{array}\right]=S(\hat{\boldsymbol{g}})\oplus S(G^-)$$

$$\hat{\boldsymbol{g}}$$

で下の表のようになる。

$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_1)$	$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_2)$		$S_{\hat{\Sigma}}(\lambda_3)$
$S(\boldsymbol{1}_{4n})$	$S(\hat{\boldsymbol{f}}_1)$	$S(\hat{\boldsymbol{f}}_2)$	$S(\hat{\boldsymbol{g}})$
$S(B^-)$	$S(F_1^-)$	$S(F_2^-)$	$S(G^-)$

$$H_\alpha:\quad \alpha=0,\quad \frac{\|P_{s(f_1)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{s(F_1^-,F_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2(n-1)} \sim F^1_{2(n-1)} \text{ (under } \alpha=0 \text{ is true)}$$

$$H_\beta:\quad \beta=0,\quad \frac{\|P_{s(f_2)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{s(F_1^-,F_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2(n-1)} \sim F^1_{2(n-1)} \text{ (under } \beta=0 \text{ is true)}$$

$$H_\gamma:\quad \gamma=0,\quad \frac{\|P_{s(g)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{s(G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1} \sim F^1_{n-1} \text{ (under } \gamma=0 \text{ is true)}$$

この(C)の場合も，反復効果R_iにつき，$R_1=R_2=\cdots R_n$の検定は出来ない。

(注) (A), (B), (C)の各場合につき，反復効果一様性の検定，Aの主効果 $\alpha=0$の検定式，Bの主効果 $\beta=0$の検定式，交互作用 $\gamma=0$の検定式に微妙なくいちがいがあることは面白いことで，よく注意して各種の仮説検定を行うべきである。

§3. $\|P_{1_{4n}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2, \|P_{s(B^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2, \|P_{f_i}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2, i=1,2, \|P_{g}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$等の計算

$\boldsymbol{x}(i)'=(x_{11}(i),x_{12}(i),x_{21}(i),x_{22}(i))$: i subject 又はi-replication.

$\hat{\boldsymbol{x}}'=(\boldsymbol{x}(1)',\boldsymbol{x}(2)',\cdots,\boldsymbol{x}(n)')$: 全 subject に対しての観測値

つぎのS_i, U_i, V_i, W_iを定義する。

$$S_i=x_{11}(i)+x_{12}(i)+x_{21}(i)+x_{22}(i)=\boldsymbol{1}'\boldsymbol{x}(i)$$
$$U_i=x_{11}(i)+x_{12}(i)-x_{21}(i)-x_{22}(i)=\boldsymbol{f}_1'\boldsymbol{x}(i)$$
$$V_i=x_{11}(i)-x_{12}(i)+x_{21}(i)-x_{22}(i)=\boldsymbol{f}_2'\boldsymbol{x}(i)$$
$$W_i=x_{11}(i)-x_{12}(i)-x_{21}(i)+x_{22}(i)=\boldsymbol{g}'\boldsymbol{x}(i)$$
$$i=1,2,\cdots,n$$

これより，つぎのことが分る。

$$\|P_{1_{4n}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4n}(\sum^n S_i)^2$$

$$\|P_{s(B^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum S_i^2-\|P_{1_{4n}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n(S_i-\overline{S})^2$$

$$\|P_{f_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4n}(\sum^n U_i)^2$$

$$\|P_{s(F_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum U_i^2-\frac{(\sum U_i)^2}{4n}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n(U_i-\overline{U})^2$$

$$\|P_{f_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4n}(\sum^n V_i)^2$$

$$\|P_{s(F_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum V_i^2-\frac{1}{4n}(\sum V_i)^2=\frac{1}{4}\sum(V_i-\overline{V})^2$$

$$\|P_{g}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4n}(\sum^n W_i)^2$$

$$\|P_{s(G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum W_i^2-\frac{1}{4n}(\sum W_i)^2=\frac{1}{4}\sum(W_i-\overline{W})^2$$

$\|P_{1_{4n}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4n}(\sum^n S_i)^2$	$\|P_{\hat{f}_1}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4n}(\sum^n U_i)^2$	$\|P_{\hat{f}_2}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4n}(\sum^n V_i)^2$	$\|P_{\hat{g}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4n}(\sum^n W_i)^2$
$\|P_{s(B^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\sum(S_i-\overline{S})^2$	$\|P_{s(F_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\sum(U_i-\overline{U})^2$	$\|P_{s(F_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\sum(V_i-\overline{V})^2$	$\|P_{s(G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\sum(W_i-\overline{W})^2$

また，

$$\|P_{s(F_1^-,F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum(U_i-\overline{U})^2+\frac{1}{4}\sum(V_i-\overline{V})^2+\frac{1}{4}\sum(W_i-\overline{W})^2$$

$$\|P_{s(F_2^-,G^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum(V_i-\overline{V})^2+\frac{1}{4}\sum(W_i-\overline{W})^2$$

$$\|P_{s(F_1^-,F_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{1}{4}\sum(U_i-\overline{U})^2+\frac{1}{4}\sum(V_i-\overline{V})^2$$

なることも分る。

引 用 図 書

(1) S.F.Arnold(1981)"The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.

(2) A. M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.

(3) T. W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.

(4) 宇喜多義昌 (1975)，実験計画法，森北出版。

(5) 宇喜多義昌 (1988)，多変量統計解析，$\|P_s x\|^2$とその分布の研究，序説—明星大学出版部。

(6) 宇喜多義昌 (1987)，多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部。

(7) 塩谷実 (1990)，多変量解析概論，朝倉書店。

引 用 論 文

(1) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学研究紀要 (理工学部)。1987

(2) Y.Ukita & K.Noda : About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1987。

(3) Y.Ukita & K. Noda : Testing Hypothesis on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI 46th Contributed Papers) 1987.

(4) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized linear Model の場合の仮説検定について，明星大学研究紀要—理工学部，1988(第24号)

(5) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Model の場合のF—検定法の応用，明星大学研究紀要—理工学部1989(第25号)

(6) 宇喜多義昌：Generalized Linear Model の場合の仮説検定について(II)，明星大学研究紀要—理工学部1989(第25号)

(7) Y.Ukita "The Decomposition of The Principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The Linear Model. (東京理科大学研専攻科雑誌。No. 1, Vol 5, 1984.

(8) Y.Ukita, K. Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis contrast $c'\mu=0$, And Its Application to The Regression Theorem" (Japan China Symposium on Statisics) 1989.

(9) 宇喜多義昌：Generalized Linear Model の場合の仮説検定についてIII，明星大学研究紀要—理工学部1990(第26号)，

(10) 宇喜多義昌，小野英夫：一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察，明星大学研究紀要—理工学部1991(第27号)