多変量計測値xの綜合方式と，xが一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的考察

佐藤良一郎*　宇喜多義昌**　小野英夫**

まえがき

本小文は多変量計測値の綜合方式の導入を目的とする第一章と，ベクトルxが一般化線形モデルの場合，(a), (b), (c) 3 種類の仮説検定量全部を幾何学的量として考察し，それから包接関係を知り，また各種検定量の標本分布の関係を知る第二章からなる。

第一章は“学力偏差値と性格偏差値の導入(Ｉ)，(II)，明星大学研究紀要 Vol.21, Vol.22につづく論文といえる。この部は佐藤が主として考察したものである。第二章は，同じく明星大学理工学部，研究紀要 Vol. 24, Vol. 25, 26の“Generalized linear Model の場合の仮説検定について，(Ｉ)，(II)，(III)，に続くものである。この部分の研究は主として宇喜多が当った。第二章最後のＹがxの１次回帰で各$x=x_i$に対応するY_iが，Y_i非 (独立でないとき) 場合の母回帰係数$m=0$の検定問題を，鋼棒の長さの温度変化に対応する伸び率mについて検討したが，これは小野による仕事である。

第１章　多変量計測値の綜合方式について

§1.　第１章の Summary

例えば，高校生N人について，数学(X)，物理(Y)，化学(Z)の成績として，(x_i, y_i, z_i)　$i=1,2,3,\cdots,N$　が得られているとき，これを基にして，これらN人の生徒の理数科的能力(W)を示す数値を定めようとするならば，数学，物理，化学の成績をどのようにして綜合するのがよいか。

身長(X)，胸囲(Y)，体重(Z)の計測値を基にして，体位(W)を示す数値を定めようとするならば，身長，胸囲，体重の計測値をどのようにして綜合するのがよいか。

これに類した問題が，いろいろな方面に起ること，起っていることは，よく知られており，また，いろいろの方式があることも，よく知られている。平均点とか総点といったものは，その最もよく知られているものである。

§2.　方式説明のための準備

本論で提案しようとする方式の説明をするための準備として，次の事項を掲げる。

変量Xの計測値をx_i，$i=1,2,3,\cdots,N$とするとき，その平均および標準偏差値とは

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,\quad s_x=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$$

*明星大学名誉教授，**一般教養教授　数学

x_iを

$$x_i'=\frac{x_i-\bar{x}}{s_x},\quad i=1,2,3,\cdots,N$$

に変換することを，x_iを標準化するという。

x_iを標準化してx_i'とすると

$$\bar{x}'=0,\quad s_{x'}=1$$

となることは容易に知られるのみならず，計測に用いた単位名や，数のorderにかかわらないということも容易に知られる。

なお，$(X,\ Y)$の計測値を$(x_i,\ y_i)$，$i=1,2,3,\cdots,N$とするとき，X，Y間の相関係数Υ_{xy}というのは，

$\Upsilon_{xy}=\frac{1}{Ns_xs_y}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$で定義されるが，$x_i$，$y_i$を標準化すると

$$\Upsilon_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i'y_i'$$

となることは容易に知られる。またXがどのような変量であろうとも，計測値x_i，$i=1,2,3,\cdots,N$の平均を$\bar{x}$，標準偏差をs_xとすると，このN個の計測値の中で，不等式$|x_i-\bar{x}|>k\ s_x$，$(k>1)$を満足させるものの個数は$\frac{1}{k^2}N$よりは小さく，$|x-\bar{x}|\leqq k\ s_x$，$(k>1)$を満足させるものの個数は$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)N$よりは大きいということ，従って，$x'_i$，$i=1,2,3,\cdots,N$について，$|x'|>k$，$(k>1)$を満足させるものの個数は，$\frac{1}{k^2}N$よりは小さく，$|x'|\leqq k$，$(k>1)$を満足させるものの個数は，$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)N$よりは大きいということも容易に証明できるということを附記しておく。

§3. 2変量の場合の綜合方式

方式の要点をわかり易くするために，変量が2個の場合を取り上げて説明しよう。

例えば，N人の高校一年生に数学(X)のテストと物理(Y)のテストを行って，その点数(x_i,y_i)，$i=1,2,3,\cdots,N$が得られたとする。

そうしたとき，この成績に基づいて，理数科的能力を表す計測値W_i，$i=1,2,3,\cdots,N$を定めようとする場合，次のような方式が取られる。

以下，印刷の便宜上，x_i，y_iは既に標準化されている値とする。従って，$\bar{x}=\bar{y}=0$，$s_x=s_y=1$であり，$\Upsilon_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i$であるとする。

理数科的能力Wの変動要因は，数学的能力Xの変動要因と物理学的能力Y変動要因のそれぞれとある程度の共有部分を有するものと考えられるので，x，y，Wの間に

$$W_i=\beta_1x_i+\beta_2y_i,\quad i=1,2,3,\cdots,N \qquad (3.1)$$

が成り立つものと仮定する。ただし，ここで，β_1，β_2は，未知の定数である。そうすると，

$$\bar{W}=\beta_1\bar{x}+\beta_2\bar{y}=0$$

であり，$\tilde{W}$の標準偏差値は，

$$s_W=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)^2}$$
$$=\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^3+2\beta_1\beta_2\gamma_{xy}} \quad\cdots\cdots(3.2)$$

(x, y)からWへの変換式(3.1)で，未知の定数である係数β_1, β_2が単位ベクトルで，(3.2)を最大ならしめるように，β_1，β_2を決定して(3.1)を作る。

§4. β_1，β_2の値を定める仕方

$$\beta_1{}^2+\beta_2{}^2=1 \quad\cdots\cdots(4.1)$$

という条件下で，

$$s_W{}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)^2 \quad\cdots\cdots(4.2)$$

を最大ならしめるようにβ_1，β_2を決定するというのが考え方の要点である。

ところで，この問題は，数学的には

$$\phi=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)^2-\lambda(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2-1)$$

λはラグランジュの未定係数

を最大ならしるβ_1，β_2の値を求めよ

ということになるということが知られている。

それで

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial\beta_1}=\dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)x_i-2\lambda\beta_1 \\ \qquad =2(\beta_1+\beta_2\gamma_{xy})-2\lambda\beta_1=0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\beta_2}=\dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)y_i-2\lambda\beta_2 \\ \qquad =2(\beta_1\gamma_{xy}+\beta_2)-2\lambda\beta_2=0\end{cases}$$

即ち

$$\begin{cases}(1-\lambda)\beta_1+\beta_2\gamma_{xy}=0 \\ \beta_1\gamma_{xy}+(1-\lambda)\beta_2=0\end{cases} \quad\cdots\cdots(4.3)$$

をβ_1，β_2に関して解けばよい。

(4.3)が$\beta_1=\beta_2=0$以外の解をもつ必要かつ十分条件は

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

である。この方程式を満足するλは

$$\lambda=1\pm\gamma_{xy} \quad (1-\lambda=\mp\gamma_{xy})$$

$\lambda_1=1+\gamma_{xy}$に対して(4.3)式の第１式は，

$-\gamma_{xy}\beta_1+\gamma_{xy}\beta_2=0$　($\gamma_{xy}\fallingdotseq 0$のとき)となり

$$\beta_1=\beta_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ (\beta_1{}^2+\beta_2{}^2=1\text{に注意}) \quad\cdots\cdots(4.4)$$

$\lambda_2=1-\gamma_{xy}$に対して(4.3)と$\beta_1{}^2+\beta_2{}^2=1$より

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \beta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

又は$\beta_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……(4.5)

となる。

また，

$$\begin{bmatrix}(1-\lambda_1) & \gamma_{xy}\\ \gamma_{xy} & (1-\lambda_1)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad (R-\lambda_1 I_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\mathbf{0},\ \text{より}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_i+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_i$の分散は$1+\gamma_{xy}=\lambda_1$,

仝様に，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_i-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_i$の分散は$1-\gamma_{xy}=\lambda_2$

であり，λ_1，λ_2は，$\beta_1^2+\beta_2^2+2\beta_1\beta_2\gamma_{xy}=s_w^2$の最大値，最小値を与える（ただし$\beta_1^2+\beta_2^2=1$の条件下で）ものであるから，

（i）$\gamma_{xy}>0$なら，$\lambda_1>\lambda_2$より，

$$W_i=\frac{1}{\sqrt{2}}x_i+\frac{1}{\sqrt{2}}y_i\quad (i=1,2,\cdots,N)$$

（ii）$\gamma_{xy}<0$なら　$\lambda_1<\lambda_2$より

$$W_i=\frac{1}{\sqrt{2}}x_i-\frac{1}{\sqrt{2}}y_i\quad (i=1,2,\cdots,N)$$

$\beta_1^2+\beta_2^2=1$という条件の下で

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i)^2$$

を最大にするβ_1，β_2として得られる。Wは，

$$w_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_i+y_i),\quad w^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_i-y_i).$$
$$i=1,2,3,\cdots,N$$

が求める綜合式である。

$\bar{w}=0$，$s_w=\sqrt{1+\gamma_{xy}}$と$s_w{}^*=\sqrt{1-\gamma_{xy}}$であるから，$W_i,(i=1,2,3,\cdots,N)$の中で

$$|W|>k\ s_w\ (k>1)$$

を満足させるものの個数は，$\dfrac{1}{k^2}N$より小さく，

$$|W|\leqq k\ s_w(k>1)$$

を満足させるものの個数は，$\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)N$より大きいということがいえる。

このようなわけで，上述の方式は，数学の成績と物理の成績とを綜合して理数科能力の程度を表現するのに用いることができる。

§5. 一般の場合

変量が n 個の場合の綜合方式は，$n=3$ の場合の方式を示せば，それによって容易に類推できる。それで，

同一集団に属する N 個の物または事の各々につき，その属性 X，Y，Z を計測して

$$(x_i, y_i, z_i),\quad i=1,2,3,\cdots,N$$

が得られたとき，これを基にして，X，Y，Z を綜合した属性 W のとる値 w_i，$i=1,2,3,\cdots,N$ を定める方式

について述べる。以下記述の便宜上，x_i，y_i，z_i は，既に標準化された数値を表すものとする。従って

$$\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0,\quad s_x=s_y=s_z=1$$

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i y_i,$$

$$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i z_i,$$

$$\gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i z_i$$

X，Y，Z を身長，胸囲，体重と考え，W を体位と想像して読まれたい。

§6. 基本となる考え方

W の変動要因は，X，Y，Z それぞれの変動要因のある部分から成り，その値は

$$w_i=\beta_1 x_i+\beta_2 y_i+\beta_3 z_i,\quad i=1,2,3,\cdots,N \quad (1)$$

ただし，β_1，β_2，β_3 は以下に述べるような方法で定められる定数である。

で表されるものと想定する。

上のように想定すると，

$$\bar{w}=\beta_1\bar{x}+\beta_2\bar{y}+\beta_3\bar{z}=0$$

$$s_w{}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i+\beta_3 z_i)^2$$

$$=\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^3+2(\beta_1\beta_2\gamma_{xy}+\beta_2\beta_3\gamma_{yz}+\beta_3\beta_1\gamma_{zx})$$

となることは，容易に知られる。

ところで，x_i，y_i，z_i については，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，$\bar{z}=0$，$s_x=1$，$s_y=1$，$s_z=1$ である。ベクトル $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\boldsymbol{\beta}'$ が $\|\boldsymbol{\beta}\|^2=\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2=1$ の条件下で，

$$\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2+2(\beta_1\beta_2\gamma_{xy}+\beta_2\beta_3\gamma_{yz}+\beta_3\beta_1\gamma_{zx})$$

を最大ならしめる $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ を求める。

この問題を解くには，2変量の場合と同じく，次の方法をとればよいということが知られている。即ち

$$\phi=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1 x_i+\beta_2 y_i+\beta_3 z_i)^2$$

$$-\lambda(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2-1)$$

を最大にする β_1，β_2，β_3 を求めればよいということが知られている。λ はラグランジュの未定係数で，その値は解法を進めていく途上で定められる。

§7. 問題の解き方

上述のϕを最大にするβ_1, β_2, β_3の値は,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\beta_1}&=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1x_i+\beta_2y_i+\beta_3z_i)x_i-2\lambda\beta_1=0\\ \frac{\partial\phi}{\partial\beta_2}&=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1x_i+\beta_2y_i+\beta_3z_i)y_i-2\lambda\beta_2=0\\ \frac{\partial\phi}{\partial\beta_3}&=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(\beta_1x_i+\beta_2y_i+\beta_3z_i)z_i-2\lambda\beta_3=0\end{aligned}\right\}$$

即ち

$$\left.\begin{aligned}&(1-\lambda)\beta_1+\beta_2\Upsilon_{yx}+\beta_3\Upsilon_{zx}=0\\ &\beta_1\Upsilon_{xy}+(1-\lambda)\beta_2+\beta_3\Upsilon_{zy}=0\\ &\beta_1\Upsilon_{xz}+\beta_2\Upsilon_{yz}+(1-\lambda)\beta_3=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(7.1)$$

を解くことによって得られるのであるが, (7.1)式はつぎのようにかける。

$$\left[\begin{pmatrix}\Upsilon_{xx}, & \Upsilon_{xy}, & \Upsilon_{xz}\\ \Upsilon_{yx} & \Upsilon_{yy} & \Upsilon_{yz}\\ \Upsilon_{zx} & \Upsilon_{zy} & \Upsilon_{zz}\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって, 相関係数行列をRとすると

(7.1)が$\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$以外の根をもつためには, λの3次方程式

$$|R-\lambda I_3|=0$$

で3実根, $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\lambda_3\geqq0$($R$は準正値行列より)が求められる。

これに対して単位解ベクトル$\boldsymbol{\beta}$は$(R-\lambda_1I_3)\boldsymbol{\beta}_{(1)}=0, (R-\lambda_2I_3)\boldsymbol{\beta}_{(2)}=0, (R-\lambda_3I_3)\boldsymbol{\beta}_{(3)}=0$

$$R\boldsymbol{\beta}_{(1)}=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_{(1)},\quad R\boldsymbol{\beta}_{(2)}=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_{(2)},\quad R\boldsymbol{\beta}_{(3)}=\lambda_3\boldsymbol{\beta}_{(3)}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{(1)}'R\boldsymbol{\beta}_{(1)}=\lambda_1,\quad \boldsymbol{\beta}_{(2)}'R\boldsymbol{\beta}_{(2)}=\lambda_2,\quad \boldsymbol{\beta}_{(3)}'R\boldsymbol{\beta}_{(3)}=\lambda_3$$

ここに$\boldsymbol{\beta}_{(1)}'R\boldsymbol{\beta}_{(1)}=\beta_{(1)1}{}^2+\beta_{(1)2}{}^2+\beta_{(1)3}{}^2+2\beta_{(1)1}\beta_{(1)2}\Upsilon_{xy}$
$+2\beta_{(1)2}\beta_{(1)3}\Upsilon_{yz}+2\beta_{(1)1}\beta_{(1)3}\Upsilon_{xz}$, で,

これは$\boldsymbol{\beta}_{(1)}'\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=w_i,\quad i=1,2,\cdots,N$ ……………(7.2)

によって$(x_i,\ y_i,\ z_i)$からw_iに変換する, このとき

$$s_{w_1}^2=\lambda_1$$

であることは直ちに分る。

§8. 上述の綜合式の実用的意味

同一集団に属するN個の物または事について, Xの計測値としてx_i, $i=1,2,3,\cdots,N$を得, これを標準化して, 即ち, x_iを

$$x_i'=\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\quad i=1,2,\cdots,N\quad\cdots\cdots\cdots(8.1)$$

によって変換したとき, x_i'の中で

$$|x'|>k\quad(k>1)\cdots\cdots\cdots(8.2)$$

を満足させるものの個数N'は$\frac{1}{k^2}N$より小さく

$|x'| \leqq k$, $(k>1)$ ……………………………………………………………(8.3)

を満足させるものの個数$(N-N')$は$\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)N$より大きいということを，前節の$w_i$，$i=1,2,\cdots,N$に適用すれば，次のようになる。

(7.2)でw_iは，$\bar{w}=0$，$s_w=\lambda_1$であるから，そのN個の中で$|w_i| \geqq k\sqrt{\lambda_1}$ $(k>1)$を満足させるものの個数N'は$\dfrac{1}{k^2}N$よりは小さく，$|w_i| \leqq k\sqrt{\lambda_1}$ $(k>1)$を満足させるものの個数$(N-N')$は$\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)N$よりは大きい

といえる。

なお，$(x_i-\bar{x})/s_x$はx_iが$\bar{x}$から正または負の方向にどれほど離れているかをs_xを単位として表したものであるから，

$w_i=\beta_1(\lambda_1)x_i+\beta_2(\lambda_1)y_i+\beta_3(\lambda_1)z_i$

は，w_iと０との差を表わす。いうまでもなく，差に正，負がある。

そこで，$i \neq j$に対して，$w_i<w_j$という結果を見たとすれば，(x_i,y_i,z_i)と(x_j,y_j,z_j)の間の大小，優劣の関係がどのようであろうとも，綜合の結果としてjはiより上位にあると判断される。例えば，(x_i,y_i,z_i)，(x_j,y_j,z_j)が，数学，物理，化学の成績で，w_i，w_jが，数学，物理，化学の学力を綜合して考えられた理数科的総力の度を表すものとすれば，jはiよりも理数科的能力において上位であるということを示すものと考えられ，(x_i,y_i,z_i)と(x_j,y_j,z_j)が身長，胸囲，体重の計測値，w_i，w_jが体位を表す数値として作られたものとすれば，jの体位は，iの体位よりも上位であるといったように解される。

第2章　一般化線形モデルの場合の各種仮説検定量の幾何学的量としての考察

§1.　第2章のSummary

宇喜多“**Generalized Linear Model**の場合の仮説検定について(Ⅲ)”明星大学研究紀要・理工学部第26号(1990)，第１節の３つの基本定理の中であげられた３種類の検定統計量の間の関係を幾何学的量として統一してみること，またこの３種類の検定統計量を代数的量として統一してみる。

このため先行論文の基本定理と，その中の３種類の検定統計量を述べておく。

〈Th.1〉　$\boldsymbol{x} \sim N_a[\boldsymbol{\mu}+R\mathbf{1}_a,\ \Xi]$のとき$\boldsymbol{x}$の$i,i,d$，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n$によって，

H:　$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$　(ただし$\boldsymbol{c}$は$\boldsymbol{c}'\mathbf{1}_a=0$を満足する任意ベクトル)の検定には，$H$が真のときは

$\|P_{S(\hat{\boldsymbol{c}})}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 / \dfrac{\|P_{S(C^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{n-1} \sim F^1_{n-1}$ ……………………………………………………………(a)

をもとにして仮説Hの検定が行える，

ここに，$\hat{\boldsymbol{c}}$は$\hat{\boldsymbol{c}}'=(\underset{(1)}{\boldsymbol{c}'},\underset{(2)}{\boldsymbol{c}'},\cdots,\underset{(n)}{\boldsymbol{c}'})$なる$na$成分ベクトルで，

$\hat{\boldsymbol{x}}'=(\boldsymbol{x}_1',\ \boldsymbol{x}_2',\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n')$である，また

C^-は$S\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = S\left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{c} & \\ \boldsymbol{c} & \\ \vdots & C^- \\ \boldsymbol{c} & \end{array}\right] = S(\hat{c}) \oplus S(C^-)$である。

〈Th.2〉 Th.1と同じく$\boldsymbol{x}$の分布と，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n$から，

仮説H_r：$\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$，$\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$，…，$\boldsymbol{c}_r'\boldsymbol{\mu}=0$(ただし$\boldsymbol{c}_i'1=0$, $i=1,2,\cdots r$ $dimS(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots \boldsymbol{c}_r)=r$)の検定には，

$\underset{r\times a}{C'}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_r' \end{pmatrix}$で，$\boldsymbol{x}$を変換して，$r$成分のベクトル$\boldsymbol{y}$をつくる。

$\boldsymbol{y}=C'\boldsymbol{x}$

これから$\boldsymbol{y}_1=C'\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{y}_2=C'\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n=C'\boldsymbol{x}_n$とすると，

$\bar{\boldsymbol{y}}$；$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$の平均ベクトル

S_{yy}；$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$の修正積和行列$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i-\bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i-\bar{\boldsymbol{y}})'$とする。

H_rが真のときは，

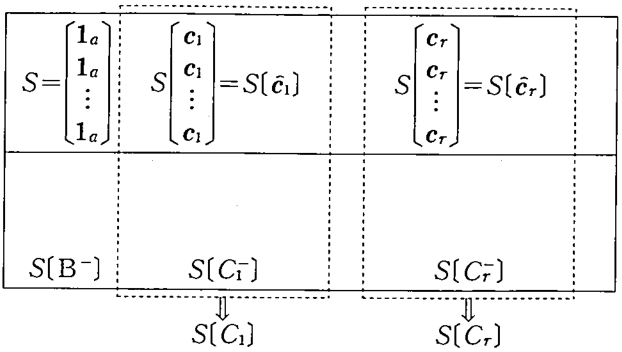
$(n-1)n\bar{\boldsymbol{y}}'S_{yy}^{-1}\bar{\boldsymbol{y}} \sim t^2{}_{n-1}(r)$，（自由度$n-1$の$r$次$t^2$－分布）……………………………($b$)

をもとにして仮説H_rの検定が行える。

〈Th.3〉 Th.2の仮説H_rの特殊な場合で，Ξの行要素の和が一定数$\lambda_0>0$であるとき，すなわち$\Xi 1_a=\lambda_0 1_a$で，λ_0はΞの固有根で，対応する固有単位ベクトルは，$e(1_a)=\frac{1}{\sqrt{a}}1_a$である。他の固有根$\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\cdots\lambda_k>0$があり，対応する固有空間を$S(\lambda_1)$, $S(\lambda_2)$, $\cdots S(\lambda_k)$として各空間の次元をr_1，$r_2\cdots r_k$とする。いまλ_0以外の任意の固有根λがr重根とすると，対応する固有空間$S(\lambda)$の中に単位直交ベクトル$e(\boldsymbol{c}_1)$, $e(\boldsymbol{c}_2)$, $\cdots e(\boldsymbol{c}_r)$が得られる，　仮説$H_r'$：$\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=\cdots=\boldsymbol{c}_r'\boldsymbol{\mu}=0$の検定には，

$\dfrac{\|P_{S(\hat{c}_1,\,\hat{c}_2,\,\cdots\,\hat{c}_r)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{r} \bigg/ \dfrac{\|P_{S(C_1^-,\,C_2^-,\,\cdots\,C_r^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{r(n-1)} \sim F^r_{r(n-1)}$ ……………………………………(c)

（H_r'が真のときに限り$F^r_{r(n-1)}$分布をなす），ここに$S(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \cdots, \hat{c}_r{}^-)$と$S(C_1^-, C_2^-, \cdots, C_r^-)$はつぎの空間である。



$$S[C_i]=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{c}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{c}_i \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_i & \\ \boldsymbol{c}_i & C_i^- \\ \vdots & \\ \boldsymbol{c}_i & \end{bmatrix} = S[\hat{c}_i] \oplus S[C_i^-]$$

§ 2でのこれ等3つの定理にあらわれた(a), (b), (c)の統計量の幾何学的表現での統一，また代数的表現での統一をもとにして，§ 3で，(a), (b), (c)統計量の関連性，すなわち特殊，一般の関係や，包接関係を調べ，併せて分布の関係も調べる。最後に(考察，4)としてTh.1の有効な応用問題として，Generalizedされた1次回帰問題の理論と応用を取扱う，§ 4では〈Th. 3〉の一般化定理ともいえる(c)と(d)を共に用いた検定法で，分割法実験データの分散分析法を解説する。ここに(d)とは§ 2節で述べるTh. 3の系の中にあらわれる統計量である。

§2. (a), (b), (c)の3種の統計量の幾何学的表現と代数的表現

§ 1のTh. 1での(a)統計量を，他の幾何学的表現で行う。

仮説：$c'\mu=0$ ($c'1=0$である)：なるcによって，xからyへの変換　$y=c'x$を考え，$x_1, x_2, \cdots x_n$に対応するyを$y_1, y_2, \cdots, y_n$とする，$\hat{x}$の$\hat{c}$への正射影の長さ〈$P_{\hat{c}}\hat{x}$〉は，

$$\langle P_{\hat{c}}\hat{x}\rangle=\frac{(c', c', \cdots, c')\hat{x}}{\sqrt{n}\|c\|}=\frac{c'x_1+c'x_2+\cdots+c'x_n}{\sqrt{n}\|c\|}=\frac{\sum y_i}{\sqrt{n}\|c\|}$$
$$=\frac{1}{\|c\|}\langle P_{1n}y\rangle \cdots\cdots (2,1)$$

$$\|Ps(c^-)\hat{x}\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|P_{\hat{c}_i}\hat{x}\|^2-\|P_{\hat{c}}\hat{x}\|=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{\|c\|^2}-\frac{n\bar{y}^2}{\|c\|^2}$$
$$=\frac{1}{\|c\|^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$
$$=\frac{1}{\|c\|^2}\|P_{s(1)^\perp}y\|^2 \cdots\cdots (2,2)$$

(2,2)での$\hat{c}$とか$\hat{c}_i(i=1,2,\cdots n)$とは，Th. 1 .の$S(C)$の直交基底ベクトルで

$$S(C)=S\begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} c & \\ c & \\ \vdots & C^- \\ \vdots & \\ c & \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & \cdots & \hat{c}_n \end{array} \qquad \begin{array}{c} \downarrow \\ \hat{c} \end{array}$$

上のようなベクトルである。

また，$1_n'=(\underbrace{1,1,\cdots 1}_{n})$で，$y'=(y_1,y_2,\cdots y_n)$であり，$S(1_n)$は，$R^n$で，$1_n$の張るベクトル空間で，$S(1_n)^\perp$は，$S(1_n)$の直交補空間である。すなわち$R^n=S(1_n)\oplus S(1_n)^\perp$である。

(2,1)，(2,2)より(a)は

$$\frac{\|P_{s(\hat{c})}\hat{x}\|^2}{\|Ps(c^-)\hat{x}\|^2/n-1}=\frac{\|P_{1n}y\|^2}{\|P_{s(1n)\perp}y\|^2/n-1} \cdots\cdots (2.3)$$
$$=\frac{(\sqrt{n}\,\bar{y})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2/n-1} \cdots\cdots (2.4)$$

とかける。ここに$y=c'x$より，yの分布は，

$$y\sim N_1[c'\mu, c'\Xi c]$$

で，$y_1, y_2, \cdots y_n$はyのi，i，dとみられるから

$$\sqrt{n}\,\bar{y} \sim N_1[\sqrt{n}\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c}],$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 \sim \boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c}\cdot\chi^2{}_{f=n-1}$$

しかもこの2つ量は統計的に独立であるから，
$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$が真のときは，

$$(a) \sim F_{n-1}^{1} = t_{1,n-1}^{2}$$

として分布することも分る。

次に§1のTh.2での(b)統計量の幾何学的表現を試みる。(b)の統計量$n(n-1)\bar{\boldsymbol{y}}'S_{yy}^{-1}\bar{\boldsymbol{y}}$については，Th.2の$\boldsymbol{x}$から$\boldsymbol{y}$への変換　$\boldsymbol{y}=C'\boldsymbol{x}$で，$\boldsymbol{x}$の$i\cdot i\cdot d$ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$に対して得られる$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots \boldsymbol{y}_n$の第1成分ベクトルを$\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}$とし，第2成分ベクトルを$\hat{\boldsymbol{y}}_{(2)}$と……，第$r$成分ベクトルを$\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}$とする，すなわち

$$\begin{array}{llllll}
 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots\ \boldsymbol{x}_n & & \\
y_{(1)}=\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{x} \rightarrow (& y_{(1)1}, & y_{(1)2}, & \cdots y_{(1)n}) \equiv \hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}', & \sum_{i=1}^{n} y_{(1)i} = n\bar{y}_{(1)}, \\
y_{(2)}=\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{x} \rightarrow (& y_{(2)1}, & y_{(2)2}, & \cdots y_{(2)n}) \equiv \hat{\boldsymbol{y}}_{(2)}', & \sum^{n} y_{(2)i} = n\bar{y}_{(2)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_{(r)}=\boldsymbol{c}_r'\boldsymbol{x} \rightarrow (& y_{(r)1}, & y_{(r)2}, & \cdots y_{(r)n}) \equiv \hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}', & \sum y_{(r)i} = n\bar{y}_{(r)} \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \\
 & \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \cdots\ \boldsymbol{y}_r & &
\end{array}$$

とすると，(2,1), (2,2)と同様に

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{n}\,\bar{y}_{(1)} = \langle P_{1n}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\rangle = \|\boldsymbol{c}_1\|\langle P_{\tilde{c}1}\hat{\boldsymbol{x}}\rangle \\
\sqrt{n}\,\bar{y}_{(2)} = \langle P_{1n}\hat{\boldsymbol{y}}_{(2)}\rangle = \|\boldsymbol{c}_2\|\langle P_{\tilde{c}2}\hat{\boldsymbol{x}}\rangle \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sqrt{n}\,\bar{y}_{(r)} = \langle P_{1n}\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}\rangle = \|\boldsymbol{c}_r\|\langle P_{\tilde{c}r}\hat{\boldsymbol{x}}\rangle
\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2.5)$$

ここに$\tilde{\boldsymbol{c}}_\alpha'=(\boldsymbol{c}_\alpha', \boldsymbol{c}_\alpha', \cdots \boldsymbol{c}_\alpha')$, $\alpha=1,2,\cdots r$，$\boldsymbol{1}_n'=(1,1,\cdots 1)$である，また

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{(\alpha)i}-\bar{y}_{(\alpha)})^2 = \sum y_{(\alpha)i}^2 - n\bar{y}_{(\alpha)}^2 = \|P_{s(1n)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)}\|^2 \quad \cdots\cdots(2.6)$$

$$\sum(y_{(\alpha)i}-\bar{y}_{(\alpha)})(y_{(\beta)i}-\bar{y}_{(\beta)}) = \sum_{i=1}^{n} y_{(\alpha)i}y_{(\beta)i} - n\bar{y}_{(\alpha)}\bar{y}_{(\beta)}$$

$$= \hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)}'\hat{\boldsymbol{y}}_{(\beta)} - \langle P_{1n}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)}\rangle\langle P_{1n}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\beta)}\rangle = (P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)})'(P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\beta)}) \quad \cdots\cdots(2.7)$$

よって修正積和行列S_{yy}は，

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i' - n\bar{\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{y}}' = [\boldsymbol{y}_1, \cdots \boldsymbol{y}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_n'\end{bmatrix} - n\begin{bmatrix}\bar{y}_{(1)} \\ \vdots \\ \bar{y}_{(r)}\end{bmatrix}[\bar{y}_{(1)}\cdots\bar{y}_{(r)}]$$

$$= \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}' \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}'\end{bmatrix}[\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}, \cdots \hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}] - n\begin{bmatrix}\bar{y}_{(1)} \\ \vdots \\ \bar{y}_{(r)}\end{bmatrix}[\bar{y}_{(1)}\cdots\bar{y}_{(r)}]$$

$$= [(\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)}'\hat{\boldsymbol{y}}_{(\beta)} - n\bar{y}_{(\alpha)}\bar{y}_{(\beta)})] = [(P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)})'(P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\beta)})]$$

$$=\begin{bmatrix}(P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)})' \\ \vdots \\ (P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)})'\end{bmatrix}[P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}, P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(2)}\cdots P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}]$$

$$=P_{s(1)^\perp}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}' \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}'\end{bmatrix}\cdot P_{s(1)^\perp}[\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}]$$

$$\equiv P_{s(1)^\perp}{}^{[2]}[\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}] \quad \cdots\cdots(2.8)$$

(2.5), (2.8)より(b)統計量はつぎのように表現される。

$$n(n-1)\bar{\boldsymbol{y}}'S_{yy}^{-1}\bar{\boldsymbol{y}}=n(n-1)(\bar{y}_{(1)}, \bar{y}_{(2)}, \cdots \bar{y}_{(r)})(\sum \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{y}_i'-n\bar{\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{y}}')^{-1}\begin{bmatrix}\bar{y}_{(1)} \\ \vdots \\ \bar{y}_{(r)}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(2.9)$$

$$=(n-1)P_1(\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}, \cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)})\cdot[P_{s(1)^\perp}{}^{[2]}(\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)})]^{-1}P_1\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(2,10)$$

注意1.

$$\sum_i(y_{(a)i}-\bar{y}_{(a)})^2=\sum_i y^2_{(a)i}-n\bar{y}_{(a)}^2=\|P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(a)}\|^2 \text{であり，また}$$
$$=\sum(\boldsymbol{c}_a'\boldsymbol{x}_i)^2-\|\boldsymbol{c}_a\|^2\|P\hat{\boldsymbol{c}}_a\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$$
$$=\sum\|\boldsymbol{c}_a\|^2\|P\underset{i}{\hat{\boldsymbol{c}}_a}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|\boldsymbol{c}_a\|^2\|P\hat{\boldsymbol{c}}_a\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$$
$$=\|\boldsymbol{c}_a\|^2\cdot\|P_{s(C_{\bar{a}})}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$$

として$\hat{x}\epsilon R^{na}$の$S(C_a^-)$への正射影としてかける。しかし

$$\sum_{i=1}^n y_{(1)i}y_{(2)i}-n\,\bar{y}_{(1)}\bar{y}_{(2)}=\|\boldsymbol{c}_1\|\,\|\boldsymbol{c}_2\|\{\sum\langle P_{\underset{i}{\hat{c}_1}}\hat{\boldsymbol{x}}\rangle\langle P_{\underset{i}{\hat{c}_2}}\hat{\boldsymbol{x}}\rangle-\langle P\hat{\boldsymbol{c}}_1\hat{\boldsymbol{x}}\rangle\langle P\hat{\boldsymbol{c}}_2\hat{\boldsymbol{x}}\rangle\}$$
$$\neq\|\boldsymbol{c}_1\|\,\|\boldsymbol{c}_2\|\{(P_{s(C_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}})'(P_{s(C_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}})\}$$

であることは注意すべきである。ここに$\underset{i}{\hat{\boldsymbol{c}}_a}$とは,

$$(\underset{(1)}{\boldsymbol{0}'},\ \underset{(2)}{\boldsymbol{0}'},\ \cdots\ \underset{(i-1)}{\boldsymbol{0}'},\ \underset{(i)}{\boldsymbol{c}_a'},\ \boldsymbol{0}_1'\cdots\underset{(n)}{\boldsymbol{0}'})\equiv\underset{i}{\hat{\boldsymbol{c}}_a'}\text{であり，}\ \|\underset{i}{\hat{\boldsymbol{c}}_a}\|^2=\|\boldsymbol{c}_a\|^2,\ \ \underset{i}{\hat{\boldsymbol{c}}_a'}\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{c}_a'\boldsymbol{x}_i$$

である。

注意2.

行列$[z_1, z_2, \cdots, z_r]$は$m\times r$行列とし$(m\geqq r)$,

列ベクトル$z_i\sim N_m(\boldsymbol{0}, \underset{ii}{\sigma}I_m)\quad(i=1,2,\cdots r)$

$cov(z_i, z_j)=\underset{ij}{\sigma}I_m\quad(i\neq j,\ \ i, j=1,2,\cdots r)$

であるとき$r\times r$行列$[(z_i'z_j)]$は，自由度m，媒介行列$\Sigma=(\underset{ij}{\sigma})$をもつ **Wishart** 分布をなす，すなわち

$$\begin{bmatrix}z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_r'\end{bmatrix}[z_1, z_2, \cdots z_r]=[(z_i'z_j)]\sim W_r(m, \Sigma)$$

この定理より，

$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)}\sim N_n[\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{1}_n, \boldsymbol{c}_i'\Xi\boldsymbol{c}_iI_n]$, $cov(\hat{\boldsymbol{y}}_{(i)}, \hat{\boldsymbol{y}}_{(j)})=\boldsymbol{c}_i'\Xi\boldsymbol{c}_jI_n(i=1,2,\cdots r,\ i\neq j,\ i,j=1,2\cdots r)$は容易に分かり，

これから，$\ell, m=1,2\cdots r$, $\ell \neq m$に対して，つぎのことから

$P_{S(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_l \sim N_{n-1}(\boldsymbol{O}_{n-1}, \boldsymbol{c}_l'\Xi \boldsymbol{c}_l I_{n-1})$

$P_{S(1)}cov(P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_l, P_{s(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_m)=\boldsymbol{c}_l'\Xi \boldsymbol{c}_m I_{n-1}$

と，S_{yy}の幾何学的表現(2.8)より容易にその分布は

$S_{yy} \sim W_r(n-1, C'\Xi C)$

であることを知る。

§ 1 の **Th.** 3 での(c)統計量の代数的表現を試みる。

$(c)=\dfrac{\|P_{S(\hat{c}_1,\hat{c}_2\cdots\hat{c}_r)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(C_1^-,C_2^-,{}_1C_r^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}\dfrac{r(n-1)}{r}$はもともと幾何学的表現であるから，$(b)$の場合と逆に代数的表現を行う。$\Xi$の固有根$\lambda$($r$重根)に対応する固有空間$S(\lambda)$の中の基本単位直交ベクトル$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c}_1)$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c}_2)$, $\cdots \boldsymbol{e}(\boldsymbol{c}_r)$を$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_r$とする。いま

$\hat{y}_{(\alpha)}=\boldsymbol{e}'_\alpha \boldsymbol{x}$で，$\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots \boldsymbol{x}_n$の$\hat{y}_{(\alpha)}$を$\hat{y}_{(\alpha)1}$, $\hat{y}_{(\alpha)2}\cdots\hat{y}_{(\alpha)n}$とし$(\hat{y}_{(\alpha)1}, \hat{y}_{(\alpha)2}, \cdots, \hat{y}_{(\alpha)n})=\hat{\boldsymbol{y}}'_{(\alpha)}$とする$(\alpha=1,2\cdots r)$

$$\|P_{s(\hat{c}_1,\cdots\hat{c}_r)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum_{\alpha=1}^{r}\|P_{s(\hat{c}_\alpha)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum\frac{(\hat{\boldsymbol{c}}'_\alpha\hat{\boldsymbol{x}})^2}{\|\hat{\boldsymbol{c}}_\alpha\|^2}$$

$$=\sum\frac{(y_{(\alpha)1}+\cdots+y_{(\alpha)n})^2}{n\|\boldsymbol{c}_\alpha\|^2},\quad \left(\hat{y}_{(\alpha)}=e(\boldsymbol{c}_\alpha)'\boldsymbol{x}=\frac{y_{(\alpha)}}{\|\boldsymbol{c}_\alpha\|}\text{より}\right)$$

$$=\sum(\hat{y}_{(\alpha)1}+\cdots+\hat{y}_{(\alpha)n})^2/n=\sum_{\alpha=1}^{r}n\bar{\hat{y}}_{(\alpha)}^2 \quad\cdots\cdots(2.11)$$

$$\|P_{s(C_1^-,\cdots C_r^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum_{\alpha=1}^{r}\|P_{s(C_\alpha^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{1}{\|\boldsymbol{c}_\alpha\|^2}\|P_{S(1)^\perp}\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)}\|^2\quad(\text{注意1より})$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\sum(y_{(\alpha)}i-\bar{y}_{(\alpha)})^2}{\|\boldsymbol{c}_\alpha\|^2}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_{(\alpha)i}-\bar{\hat{y}}_{(\alpha)})^2\quad\cdots\cdots(2.12)$$

(2.11)と(2.12)より(C)統計量は，

$$(C)=\frac{\|P_{S(\hat{c}_1,\cdots\hat{c}_r)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(C_1^-,\cdots C_r^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}\frac{r(n-1)}{r}=\frac{\sum_{\alpha=1}^{n}n\bar{\hat{y}}_{(\alpha)}^2/r}{\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_{(\alpha)i}-\bar{\hat{y}}_{(\alpha)})^2/r(n-1)}\quad\cdots\cdots(2.13)$$

ここに$\hat{y}_{(\alpha)i}=\boldsymbol{e}(c_\alpha)'\boldsymbol{x}_i$で，$\hat{y}_{(\alpha)i}(i=1,2,\cdots n)$の平均が$\bar{\hat{y}}_{(\alpha)}$である。

〈Th.3の系〉 **Th.3** の条件下で，λ_0がΞの単根でなくk重根のとき，λ_0に対応する固有空間$S(\lambda_0)$は，$S(\lambda_0)=S(\boldsymbol{1}_\alpha, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots \boldsymbol{d}_{k-1})$　ここに$\boldsymbol{1}_\alpha, \boldsymbol{d}_1, \cdots \boldsymbol{d}_{k-1}$は$S(\lambda_0)$の直交基底とする。仮説$S(\boldsymbol{d}_1,\cdots \boldsymbol{d}_{k-1})\perp\mu$が真なら

$$\frac{\|P_S(\boldsymbol{d}_1,\cdots\boldsymbol{d}_{k-1})\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/k-1}{\|P_{S(D_1^-,\cdots D_{k-1}^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/(k-1)(n-1)}\sim F_{(k-1)(n-1)}^{k-1}\quad\cdots\cdots(d)$$

なることがいえる。

§ 2 の内容を次のように一表にしておく。

帰無仮説 $\boldsymbol{c}_i\perp 1$	検索統計量の		備　考
	幾何学的表示	代数的表示	
$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$	$(a)=\dfrac{\Vert P_{S(\hat{c})}\bar{\boldsymbol{x}}\Vert^2}{\Vert P_{S(C^-)}\bar{\boldsymbol{x}}\Vert^2/n-1}$	$=\dfrac{(\sqrt{n}\,\bar{y})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2/n-1}$ $\sim F_{n-1}^{1}$	$i,i,d,\boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n$に対する変換$y=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$での$y_1$, $y_2\cdots y_n$についての$\bar{y}$とs_y^2について,
rケの独立式 $\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$ $\boldsymbol{c}_2^1\boldsymbol{\mu}=0$ $\vdots$ $\Leftrightarrow$ $S(\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r)\perp\boldsymbol{\mu}$	$(n-1)P_1[\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}]$ $[P_{s(1)^\perp}{}^{[2]}(\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)})]^{-1}$ $\cdot P_1\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}\end{bmatrix}$ $=(b)$	$=n(n-1)\bar{\boldsymbol{y}}'\underset{(r\times r)}{S_{yy}}{}^{-1}\bar{\boldsymbol{y}}$ $\sim t_{n-1}^2(r)$	$i,i,d,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n$に対する変換 $y_{(\alpha)}=\boldsymbol{c}_\alpha'\boldsymbol{x}$での$(y_{(\alpha)1}\cdots y_{(\alpha)n})\equiv\hat{\boldsymbol{y}}_{(\alpha)}'$ とその平均$\bar{y}_{(\alpha)}(\alpha=1,2,\cdots r)$と$\hat{\boldsymbol{y}}_{(1)}\cdots\hat{\boldsymbol{y}}_{(r)}$の積和行列$S_{yy}$について
$\varXi\boldsymbol{1}_a=\lambda_0\boldsymbol{1}_a$が成立し$\lambda_0$でない他の固有根$\lambda$($r$重根)に対する固有空間$S(\lambda)$に対し $S(\lambda)=S(\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r)\perp\boldsymbol{\mu}$ ($\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r$は直交基底)	$\dfrac{\Vert P_{S(\hat{c}_1\cdots\hat{c}_r)}\bar{\boldsymbol{x}}\Vert^2/r}{\Vert P_{S(C_1^-,\cdots C_r^-)}\bar{\boldsymbol{x}}\Vert^2/r(n-1)}$ $=(C)$	$=\dfrac{\sum_{c=1}^{n}n\bar{\bar{y}}_{(c)}^2/r}{\sum_{c=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_{(c)i}-\bar{\bar{y}}_{(c)})^2/r(n-1)}$ $\sim F_{r(n-1)}^{r}$	$i,i,d\ \boldsymbol{x}_1\cdots\boldsymbol{x}_n$に対する変換 $\bar{y}_a=\dfrac{\boldsymbol{c}_a'}{\Vert\boldsymbol{c}_d\Vert}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_a'\boldsymbol{x}$での$(\bar{y}_{(\alpha)1}\cdots\bar{y}_{(\alpha)n})$とその平均$\bar{\bar{y}}_{(\alpha)}$ と偏差平方和の和 $(d=1\sim r)$について
上のλ_0が単根でなくk重根のとき，この固有根間$S(\lambda_0)$とその直交基底$S(\lambda_0)=S(\boldsymbol{1},\boldsymbol{d}_r\cdots\boldsymbol{d}_{k-1})$で $S(\boldsymbol{d}_1\cdots\boldsymbol{d}_{k-1})\perp\boldsymbol{\mu}$	$\dfrac{\Vert P_S(\hat{\boldsymbol{d}}_1\cdots\hat{\boldsymbol{d}}_{k-1})\bar{\boldsymbol{x}}\Vert^2/k-1}{\Vert P_{S(D_1^-,\cdots D_{k-1}^-)}\bar{\boldsymbol{x}}\Vert^2/(k-1)(n-1)}$ $=(d)$		上の備考に準ずる。

§3. (a),(b),(c)の関連と分布の研究

(b), $T^2=(n-1)(\sqrt{n}\,\bar{\boldsymbol{y}})'S_{y\bar{y}}^{-1}(\sqrt{n}\,\bar{\boldsymbol{y}})=n(n-1)\bar{\boldsymbol{y}}'S_{y\bar{y}}^{-1}\bar{\boldsymbol{y}}\sim t_{r,f=n-1}^2$,(under H_r, $\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=\cdots=\boldsymbol{c}_r'\boldsymbol{\mu}=0$が真のとき), すなわち$(b)$が$t^2$分布であることを簡単に証明する。

$$\boldsymbol{y}=C'\boldsymbol{x}\quad ここにC'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_1'\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_r'\end{pmatrix},\ \rho(C)=rとすると,$$

$\boldsymbol{y}$の分布は,

$$\boldsymbol{y}\sim N_r(C'\boldsymbol{\mu},C'\varXi C)$$

で$\boldsymbol{y}_a=C'\boldsymbol{x}_a$は，$\boldsymbol{x}_a(\alpha=1,2,\cdots n)$は独立より，$\boldsymbol{y}_1,\cdots\boldsymbol{y}_n$は独立である。

よって,

$$\bar{\boldsymbol{y}}\sim N_r[C'\boldsymbol{\mu},C'\varXi C'/n]\Rightarrow\quad\sqrt{n}\,\bar{\boldsymbol{y}}\sim N_r[\sqrt{n}\,C'\boldsymbol{\mu},C'\varXi C]\ \cdots\cdots(3.1)$$

$$s_{n-1}^2\equiv\frac{1}{n-1}\sum(\boldsymbol{y}_a-\bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_a-\bar{\boldsymbol{y}})'=\frac{1}{n-1}S_{yy}である。$$

$$S_{yy}=\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{y}_a-\bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_a-\bar{\boldsymbol{y}})'(=C'\sum(\boldsymbol{x}_a-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_a-\bar{\boldsymbol{x}})'C)\sim W_r[n-1,C'\varXi C]\quad\cdots\cdots(3.2)$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}\perp\!\!\!\perp S_{yy}\ \cdots\cdots(3.3)$$

ゆえに，H_rが真のときは$\sqrt{n}\,\bar{\boldsymbol{y}}\sim N_r[0,C'\varXi C]$より,

$$(n-1)(\sqrt{n}\,\bar{\boldsymbol{y}})'S_{y\bar{y}}^{-1}(\sqrt{n}\,\bar{\boldsymbol{y}})\sim t_{r,f=n-1}^2,(\text{under H}_r\text{ is true}).$$

(考察.1)

この(b)で，$c_1'=(1,-1,0,\cdots 0),\cdots c_{a-1}'=(1,0,0,\cdots,0,-1)$

とすると仮説は，

$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_a$(母平均一様性の仮説)

となる。

(考察.2)

(b)検定で，仮説$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$の1本の式のみなら$\boldsymbol{y}$はスカラーで

$$y=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \quad \sim \quad N_1[\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c}\equiv\alpha^{*2}]$$

ゆえに，$\sqrt{n}\,\bar{y}\sim N_1[\sqrt{n}\,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\alpha^{*2}]$,

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}^2)=S_{yy}\sim\alpha^{*2}\cdot\chi^2_{f=n-1}$$

$$\sqrt{n}\,\bar{y}\perp\!\!\!\perp S_{yy}$$

この3条件から，H_1:　　$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$なら，次式左辺は$F$-分布である

$$\frac{(\sqrt{n}\,\bar{y})^2}{S_{yy}/n-1}=(n-1)n\bar{y}S_{yy}^{-1}\bar{y}\sim F_{n-1}^{1}\equiv t_{1,n-1}^{2}\cdots(3.4)$$

(考察.3)

(3.4)は§2の(2.4)で示したように，

$$\frac{(\sqrt{n}\,\bar{y})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2/n-r}=\frac{\|P_{S(\hat{c})}\bar{\boldsymbol{x}}\|^2}{\|P_{S(c^-)}\bar{\boldsymbol{x}}\|^2/n-1}\sim F_{n-1}^{1}$$

(under H : $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ is true)

(考察.4)　$\boldsymbol{Y}\sim N_a(\boldsymbol{\mu}+R_y\boldsymbol{1}_a,\Xi)$のときの$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$の検定の例を，$Y$が確定変数$x$の1次回帰のときの回帰係数$m$の仮説：$m=0$の検定の応用にみよう。

観測値(x,Y)でxは$x_1,x_2,\cdots x_n$の値をとり，$x=x_i$のときの(x_i,Y_i)が

$$Y_i=m(x_i-\bar{x})+b+r+E_i \quad (r\text{は対象固有の効果})$$

(i)　$E_i\sim N(0,\sigma_{ii}=\sigma_i^2)$, σ_i^2は未知，$i=1,2,\cdots a$.

(ii)　$Cov(E_i,E_j)=\sigma_{ij}$　$i,j=1,2,\cdots a$,　$i\neq j$

とする。

$$\boldsymbol{Y}\sim N_a[m(\boldsymbol{x}-\bar{x}\boldsymbol{1}_a)+(b+r_y)\boldsymbol{1}_a,\ \Xi=(\sigma_{ij})]$$

いま Th.1 で$\boldsymbol{c}'\equiv(x_1-\bar{x},x_2-\bar{x},\cdots,x_a-\bar{x})$として良い（このことは$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1}_a=\sum(x_i-\bar{x})=0$となるからである）

また，仮説，$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=(\boldsymbol{x}-\bar{x}\boldsymbol{1}_a)'[m(\boldsymbol{x}-\bar{x}\boldsymbol{1}_a)+(b+r_y)\boldsymbol{1}_a]$

$$=m\|\boldsymbol{x}-\bar{x}\boldsymbol{1}_a\|^2=0$$

で，仮説$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$は，回帰係数$m=0$と同値である。

$$\|P\hat{\boldsymbol{c}}\hat{\boldsymbol{Y}}\|^2\sim e(\boldsymbol{c})'\Xi e(\boldsymbol{c})\cdot\chi_1'^2[2\lambda=m^2\cdot n\|\boldsymbol{c}\|^2]$$

$$\|P_{S(c^-)}\hat{\boldsymbol{Y}}\|^2\sim e(\boldsymbol{c})'\Xi\, e(\boldsymbol{c})\cdot\chi^2_{n-1}$$

$$\|P\hat{\boldsymbol{c}}\hat{\boldsymbol{Y}}\|^2\perp\!\!\!\perp\|P_{S(c^-)}\hat{\boldsymbol{Y}}\|^2$$

よって

H：$m=0$（回帰係数0の意味）に対する検定は，

$$\frac{\|P\hat{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{Y}\|^2}{\|P_{S(c^-)}\boldsymbol{Y}\|^2/n-1}\sim F_{n-1}^{1}\ \text{(under } m=0 \text{ is true)}$$

によって実行出来る。

例. 3本の鋼棒を10°C，15°C，20°C，25°C，30°Cでその長さを計って次の表のデータを得た。長さは温度の1次関数であるといえるかどうかの問題の考察。

温度(x)	$\boldsymbol{x}-\bar{x}\boldsymbol{1}$	A_1	A_2	A_3
10°C	−10	1003	1010	1005
15°C	−5	1005	1018	1010
20°C	0	1010	1020	1010
25°C	5	1011	1024	1015
30°C	10	1014	1030	1015

$y=R+m(x-20)+E_x.$

$E_x\sim N(0,\sigma_x^2)$
$cov(E_{xi},E_{xj})=\sigma_{ij}$
とする

解

$$(\boldsymbol{x}-\bar{x}\boldsymbol{1})'=(-10,-5,0,5,10,-10,-5,0,5,10,-10,-5,0,5,10)=\tilde{\boldsymbol{c}}'$$

$$\boldsymbol{c}'\equiv(-10,-5,0,5,10)\quad \|\boldsymbol{c}\|=\sqrt{(-10)^2+(-5)^2+0^2+5^2+10^2}=\sqrt{250}$$

$$\|P_{S(C)}\hat{\boldsymbol{y}}\|^2=\{(-10,-5,0,5,10)\begin{pmatrix}1003\\1005\\1010\\1011\\1014\end{pmatrix}\}^2/250 \quad =\frac{1}{250}(140^2+230^2+125^2)$$
$$=352.5$$

$$+\{(-10,-5,0,5,10)\begin{pmatrix}1010\\1018\\1020\\1024\\1030\end{pmatrix}\}^2/250$$

$$+\{(-10,-5,0,5,10)\begin{pmatrix}1005\\1010\\1010\\1015\\1015\end{pmatrix}\}^2/250$$

$$\|P_{\tilde{c}}\hat{\boldsymbol{y}}\|^2=(140+230+125)^2/250\times3=326.7$$

$$\|P_{S(C^-)}\hat{\boldsymbol{y}}\|^2=352.5-326.7=25.8 \qquad \dim S(C^-)=2$$

H： $m=0$の検定には，

$$326.7/\frac{25.8}{2}=25.32558>F_2^1(0.05)=18.51 \quad m=0\text{棄却}$$
$$<F_2^1(0.01)=98.49 \quad m=0\text{採択}$$

§4. 分割法実験の分散分析法と検定量(c)と(d)との関係

第1要因Aは2水準A_1,A_2で，第2要因BはB_1,B_2,B_3,B_4で，くり返しR_1,R_2,R_3とする分割法実験で

	R_1								R_2		R_3	
	A_1				A_2				A_1	A_2	A_1	A_2
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4				
測定値[	$x_{11(1)}$,	$x_{12(1)}$,	$x_{13(1)}$,	$x_{14(1)}$,	$x_{21(1)}$,	$x_{22(1)}$,	$x_{23(1)}$,	$x_{24(1)}$⋮	$x_{ij(2)}\cdots$,		$x_{ij(3)}\cdots]\equiv\tilde{x}'$	
一般平均	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1	$m_2(1,1,1,1 \vdots 1,1,1,1)$		$m_3(1111, \vdots 1111)$	
A主効果	α_1	α_1	α_1	α_1	α_2	α_2	α_2	α_2	仝左		仝左	
B主効果	β_1	β_2	β_3	β_4	β_1	β_2	β_3	β_4	〃		〃	
1次交互	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}	γ_{24}	〃		〃	
(上の行の和)	$(\mu_1$	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	$\mu_8)$	$(\mu_1\cdots\cdots\cdots\mu_8)$		$(\mu_1\cdots\cdots\cdots\mu_8)$	
第1誤差	e_1	e_1	e_1	e_1	e_2	e_2	e_2	e_2	…………		…………	
第2誤差	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}	…………		…………	

とし，確率変数である第1誤差e_iと，第2誤差e_{ij}について，

$$V(e_1)=V(e_2)=\underset{1}{\sigma}^2,\quad V(e_{1i})=V(e_{2i})=\underset{2}{\sigma}^2,\quad cov(e_{1i},e_{1j})=\rho\underset{2}{\sigma}^2,\quad cov(e_{2i},e_{2j})=\rho\underset{2}{\sigma}^2,$$

$$e_i \perp\!\!\!\perp e_{kl} \quad e_1 \perp\!\!\!\perp e_2,\quad e_{1i} \perp\!\!\!\perp e_{2j}$$

が成立するとする。これより，

$$cov(e_1+e_{11},e_1+e_{12})=\underset{1}{\sigma}^2+\rho\underset{2}{\sigma}^2\equiv d_2^2\cdots\cdots(4.1)$$

$$cov(e_1+e_{11},e_2+e_{21})=0$$

$$V(e_1+e_{11})=\underset{1}{\sigma}^2+\underset{2}{\sigma}^2\equiv d_1^2\cdots\cdots(4.2)$$

いま，
$$\underset{8\times 8}{\Xi}\equiv\begin{bmatrix} d_1^2 & d_2^2 & d_2^2 & d_2^2 & & & & \\ d_2^2 & d_1^2 & d_2^2 & d_2^2 & & O & & \\ d_2^2 & d_2^2 & d_1^2 & d_2^2 & & & & \\ d_2^2 & d_2^2 & d_2^2 & d_1^2 & & & & \\ & & & & d_1^2 & & & \\ & & O & & & d_1^2 & (d_2^2) & \\ & & & & & & d_1^2 & \\ & & & & & (d_2^2) & & d_1^2 \end{bmatrix}$$
とすると，

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.3)$$

一連の測定値$\tilde{x}'=[x_{11(1)},x_{12(1)}\cdots x_{24(1)} \vdots x_{11(2)}\cdots x_{24(2)} \vdots x_{11(3)}\cdots x_{24(3)}]$の分散共分散行列$V[\tilde{x}]$は，

$$\underset{24\times 24}{V}(\bar{x})=\begin{bmatrix} \Xi & & O \\ & \Xi & \\ O & & \Xi \end{bmatrix}\equiv\widehat{\Xi} \cdots\cdots\cdots (4.4)$$

Ξの固有根は2重根をもつ$\lambda_1=d_1^2+3d_2^2$と，6重根をもつ$\lambda_2=d_1^2-d_2^2$であり，各根に対応する固有空間$S[\lambda_1]$と$S[\lambda_2]$をそれぞれの独立基底ベクトルで示すと，

$$S[\lambda_1]=S\left[\boldsymbol{1}_8 \;\vdots\; \begin{matrix}\boldsymbol{1}_4\\ -\boldsymbol{1}_4\end{matrix}\right]=S[\boldsymbol{1}_8]\oplus S[\boldsymbol{\ell}],\quad \boldsymbol{\ell}'\equiv(\boldsymbol{1}_4',-\boldsymbol{1}_4')$$

$$S[\lambda_2]=S\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{n}_3 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{l} =S[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3,\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3] \\ \qquad (\text{独立基底}) \\ =S[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3]\oplus S[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3] \end{array}$$

$S[\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3]=S[\boldsymbol{m}_1^*,\boldsymbol{m}_2^*,\boldsymbol{m}_3^*]$, ($\boldsymbol{m}_1^*,\boldsymbol{m}_2^*,\boldsymbol{m}_3^*$は互に直交するベクトル)

$S[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3]=S[\boldsymbol{n}_1^*,\boldsymbol{n}_2^*,\boldsymbol{n}_3^*]$, ($\boldsymbol{n}_1^*,\boldsymbol{n}_2^*,\boldsymbol{n}_3^*$は互に直交するベクトル)

とかける。また，R^{24}空間の部分ベクトル空間については，

$$S\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1 & 0\cdots 0 & \boldsymbol{m}_2 & 0\cdots 0 & \boldsymbol{m}_3 & 0\cdots 0 \\ 0 & \boldsymbol{m}_1\cdots 0 & 0 & \boldsymbol{m}_2\cdots 0 & 0 & \boldsymbol{m}_3\cdots 0 \\ \vdots & 0\cdots\vdots & (\vdots & \mathrm{M} &) & \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0\cdots \boldsymbol{m}_1 & 0 & 0\cdots \boldsymbol{m}_2 & 0 & 0\cdots \boldsymbol{m}_3 \end{bmatrix} = S\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \boldsymbol{m}_1^* & 0\cdots 0 & \boldsymbol{m}_2^* & 0\cdots 0 & \boldsymbol{m}_3^* & 0\cdots 0 \\ 0 & \boldsymbol{m}_1^*\cdots 0 & 0 & \boldsymbol{m}_2^*\cdots 0 & 0 & \boldsymbol{m}_3^*\cdots 0 \\ \vdots & 0\cdots\vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0\cdots\boldsymbol{m}_1^* & 0 & 0\cdots\boldsymbol{m}_2^* & 0 & 0\cdots\boldsymbol{m}_3^* \end{array}\right]$$

$$=S\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{m}_1^* & \\ \boldsymbol{m}_1^* & \\ \vdots & M_1^{*-} \\ \boldsymbol{m}_1^* & \end{array}\right]\oplus S\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{m}_2^* & \\ \boldsymbol{m}_2^* & \\ \vdots & M_2^{*-} \\ \boldsymbol{m}_2^* & \end{array}\right]\oplus S\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{m}_3^* & \\ \boldsymbol{m}_3^* & \\ \vdots & M_3^{*-} \\ \boldsymbol{m}_3^* & \end{array}\right]$$

(where the stacked columns $\boldsymbol{m}_1^*,\ldots,\boldsymbol{m}_1^*$ etc. are denoted $\widehat{\boldsymbol{m}}_1^*, \widehat{\boldsymbol{m}}_2^*, \widehat{\boldsymbol{m}}_3^*$)

$$=S[\widehat{\boldsymbol{m}}_1^*,\widehat{\boldsymbol{m}}_2^*,\widehat{\boldsymbol{m}}_3^*]\oplus S[M_1^{*-},M_2^{*-},M_3^{*-}]$$

一方，
$$S(M)=S\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & \\ \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & M^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \text{直交補空間} \\ \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & \end{array}\right]=S(\widehat{\boldsymbol{m}}_1,\widehat{\boldsymbol{m}}_2,\widehat{\boldsymbol{m}}_3)\oplus S(M^-)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \widehat{\boldsymbol{m}}_1 & \widehat{\boldsymbol{m}}_2 & \widehat{\boldsymbol{m}}_3 \end{array}$$

明らかに，$S(\hat{\boldsymbol{m}}_1,\hat{\boldsymbol{m}}_2,\hat{\boldsymbol{m}}_3)=S(\hat{\boldsymbol{m}}_1^*,\hat{\boldsymbol{m}}_2^*,\hat{\boldsymbol{m}}_3^*)$より，$S(M_1^{*-},M_2^{*-},M_3^{*-})=S(M^-)$である。全様に$S(\hat{\boldsymbol{n}}_1,\hat{\boldsymbol{n}}_2,\hat{\boldsymbol{n}}_3)=S(\hat{\boldsymbol{n}}_1^*,\hat{\boldsymbol{n}}_2^*,\hat{\boldsymbol{n}}_3^*)$より，$S(N_1^{*-},N_2^{*-},N_3^{*-})=S(N^-)$が成立つ。

R^{24}を$\hat{\Xi}$の固有根λ_1,λ_2と固有空間$S_{\hat{\Xi}}(\lambda_1),S_{\hat{\Xi}}(\lambda_2)$によって分割する。

$$S_{\hat{\Xi}}(\lambda_1)=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_8&0&0\\0&\boldsymbol{1}_8&0\\0&0&\boldsymbol{1}_8\end{bmatrix}\oplus S\begin{bmatrix}\boldsymbol{\ell}&0&0\\0&\boldsymbol{\ell}&0\\0&0&\boldsymbol{\ell}\end{bmatrix}=S[\boldsymbol{1}_{24}\ \vdots\ D_1^-]\oplus S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{\ell}&\\\boldsymbol{\ell}&D_2^-\\\boldsymbol{\ell}&\end{array}\right]$$

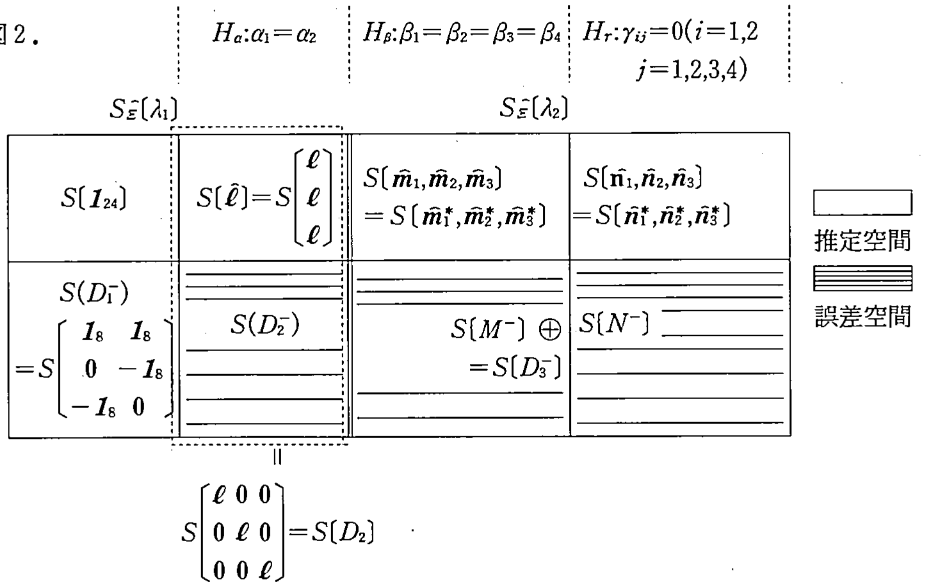
ここにD_1^-は，$S[\boldsymbol{1}_{24}]\oplus S[D_1^-]=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_8&0&0\\0&\boldsymbol{1}_8&0\\0&0&\boldsymbol{1}_8\end{bmatrix}$なる，24×2行列で

D_2^-も，$S[\hat{\boldsymbol{\ell}}]\oplus S[D_2^-]=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{\ell}&0&0\\0&\boldsymbol{\ell}&0\\0&0&\boldsymbol{\ell}\end{bmatrix}$なる，24×2行列である。また，

$$\begin{aligned}S_{\hat{\Xi}}(\lambda_2)&=S[\hat{\boldsymbol{m}}_1^*,\hat{\boldsymbol{m}}_2^*,\hat{\boldsymbol{m}}_3^*]\oplus S[M_1^{*-},M_2^{*-},M_3^{*-}]\oplus S[\hat{\boldsymbol{n}}_1^*,\hat{\boldsymbol{n}}_2^*,\hat{\boldsymbol{n}}_3^*]\oplus S[N_1^{*-},N_2^{*-},N_3^{*-}]\\&=S[\hat{\boldsymbol{m}}_1,\hat{\boldsymbol{m}}_2,\hat{\boldsymbol{m}}_3]\oplus S[M^-]\oplus S[\hat{\boldsymbol{n}}_1,\hat{\boldsymbol{n}}_2,\hat{\boldsymbol{n}}_3]\oplus S[N^-]\end{aligned}$$

以下をまとめて図示すると図２となる。

図２．



ここに $\langle P_a\hat{\boldsymbol{x}}\rangle$ は正規分布するのは勿論であるが，更に，$V[P_a\hat{\boldsymbol{x}}]=\lambda_1$，ここに$^\forall \boldsymbol{a}\epsilon S_{\hat{\Xi}}(\lambda_1)$，また$V[P_b\hat{\boldsymbol{x}}]=\lambda_2$，ここに$^\forall \boldsymbol{b}\epsilon S_{\hat{\Xi}}(\lambda_2)$であり，$cov(P\boldsymbol{c}_1\hat{\boldsymbol{x}},P\boldsymbol{c}_2\hat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{0}$（ここに$\boldsymbol{c}_1\perp\boldsymbol{c}_2$)である。また，$S(D_2^-)$は２次元空間で誤差空間に含まれ，$S[M^-]\oplus S[N^-]\equiv S(D_3^-)$は12次元空間で，また誤差空間に含まれる。

つぎに各部分空間への射影の長さの平方の分布を調べる。

$$\left.\begin{array}{l}\|P_{S[D_1^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_1\chi'^2_{f=2}\xrightarrow{m_1=m_2=m_3\text{なら}}\lambda_1\chi^2_{f=2}\\\|P_{S[\hat{\ell}]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_1\chi'^2_{f=1}\xrightarrow{\alpha_1=\alpha_2\text{なら}}\lambda_1\chi^2_{f=1}\\\|P_{S[D_2^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_1\chi^2_{f=2}\ \text{(Absolutely)}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

更に上記３つの$\|P_S\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$は統計的に独立である。

また，$\|P_{S[\hat{m}_1^*,\hat{m}_2^*,\hat{m}_3^*]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\|P_{S[\hat{m}_1,\hat{m}_2,\hat{m}_3]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi'^2_{f=3}\xrightarrow{\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4\text{なら}}\lambda_2\chi^2_{f=3}$

$$\|P_{S[\hat{n}_1^*,\hat{n}_2^*,\hat{n}_3^*]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\|P_{S[\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{n}_3]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi'^2_{f=3}\xrightarrow[j=1,2,3,4]{\gamma_{ij}=\gamma\ \ i=1,2}\lambda_2\chi^2_{f=3}$$

$$\|P_{S[D_3^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\sim\lambda_2\chi^2_{f=12}\ \text{(Absolutely)}\qquad\cdots\cdots(4.6)$$

であり，３つの$\|P_S\hat{\boldsymbol{x}}\|$も統計的に独立である。

よって次のような分散分析表をうる。

要　因	平方和	自由度	平均平方和	
ブロック	$\|P_{S[D_1^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	$2(=3-1)$	$\|P_{S[D_1^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2$	Th(3)系
Aの主効果	$\|P_{\hat{\ell}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	$1(=2-1)$	$\|P_{\hat{\ell}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/1$	の(d)で
第１誤差	$\|P_{S(D_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	$2(=(3-1)(2-1))$	$\|P_{S(D_2^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2/2$	の検定法
Bの主効果	$\|P_{S[\hat{m}_1\hat{m}_2\hat{m}_3]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	$3(=4-1)$	左の平方和/3	Ｔｈ３の
交互作用$A\times B$	$\|P_{S[\hat{n}_1\hat{n}_2\hat{n}_3]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	$3(=(2-1)(3-1))$	左の平方和/3	(c)での
第２誤差	$\|P_{S[D_3^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	$12=a(r-1)(b-1)=2\cdot2\cdot3$	左の平方和/12	検定法

各平方和の計算法は従来の２元配置法での平方和計算と殆んど同一である。

$$S\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}_8&0&0\\0&\boldsymbol{1}_8&0\\0&0&\boldsymbol{1}_8\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{1}_8&\\\boldsymbol{1}_8&D_1^-\\\boldsymbol{1}_8&\end{array}\right]\to\|P_{S[D_1^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum_{i=1}^{3}\|P_{\hat{1}_i}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\boldsymbol{1}_{24}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$$

$$\begin{matrix}\|&\|&\|\\\hat{\boldsymbol{1}}_1&\hat{\boldsymbol{1}}_2&\hat{\boldsymbol{1}}_3\end{matrix}\qquad=\frac{T(R_1)^2+T(R_2)^2+T(R_3)^2}{8}-\frac{T^2}{24}\quad\cdots\cdots(4.7)$$

$$\|P_{\hat{\ell}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\frac{[\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{x}_{(1)}+\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{x}_{(2)}+\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{x}_{(3)}]^2}{3\|\boldsymbol{\ell}\|^2}=\frac{[T(A_1)-T(A_2)]^2}{24}=\frac{T(A_1)^2+T(A_2)^2}{12}-\frac{T^2}{24}$$

$$S\begin{bmatrix}\boldsymbol{\ell}&0&0\\0&\boldsymbol{\ell}&0\\0&0&\boldsymbol{\ell}\end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{\ell}&\\\boldsymbol{\ell}&D_2^-\\\boldsymbol{\ell}&\end{array}\right]\to\|P_{S[D_2^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\sum_{i=1}^{3}\|P_{\hat{\ell}_i}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\hat{\ell}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$$

$$\begin{matrix}\|&\|&\|&&\|\\\hat{\boldsymbol{\ell}}_1&\hat{\boldsymbol{\ell}}_2&\hat{\boldsymbol{\ell}}_3&&\hat{\boldsymbol{\ell}}\end{matrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{[T(A_1|R_i)-T(A_2|R_i)]^2}{8}-\frac{[T(A_1)-T(A_2)]^2}{24}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{T(A_1|R_i)^2+T(A_2|R_i)^2}{4}-\frac{T(R_i)^2}{8}\right]-\left[\sum_{a=1}^{2}\frac{T(A_a)^2}{12}-\frac{T^2}{24}\right]$$

$$=\left[\frac{\sum_{a=1}^{2}\sum_{c=1}^{3}T(A_a|Ri)^2}{4}-\frac{T^2}{24}\right]-\left[\frac{\sum_{c}^{3}T(Ri)^2}{8}-\frac{T^2}{24}\right]-\left[\frac{\sum_{a}^{2}T(A_a)^2}{12}-\frac{T^2}{24}\right]$$

$$=S_{RA}-S_R-S_A\equiv S_{E_1}\quad\cdots\cdots(4.8)$$

$\|P_{S[\hat{m}_1,\hat{m}_2,\hat{m}_3]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$，$\|P_{S[\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{n}_3]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$，$\|P_{S[D_3^-]}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$の計算法を示す。

$$
\begin{array}{c}
S\left[\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
\boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{1}_8 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{1}_8 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 & \boldsymbol{1}_8
\end{array}\right]
=S\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{(M)} \\
\multicolumn{4}{c}{\text{繰返し}} \\
\multicolumn{4}{c}{\text{繰返し}}
\end{array}\right], \\
\begin{array}{cccc}
\| & \| & \| & \| \\
\hat{\boldsymbol{m}}_1 & \hat{\boldsymbol{m}}_2 & \hat{\boldsymbol{m}}_3 & \boldsymbol{1}_{24}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\| & \| & \| & \| \\
\hat{\hat{\boldsymbol{m}}}_1 & \hat{\hat{\boldsymbol{m}}}_2 & \hat{\hat{\boldsymbol{m}}}_3 & \hat{\hat{\boldsymbol{m}}}_4
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|P_{S(\hat{m}_1^*,\hat{m}_2^*,\hat{m}_3^*)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\|P_{S(\hat{m}_1,\hat{m}_2,\hat{m}_3)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \\
&=\|P_{S(M)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\boldsymbol{1}_{24}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \\
&=\sum_{i=1}^{4}P_{S(\hat{\hat{\boldsymbol{m}}}_i)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\boldsymbol{1}_{24}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \\
&=\frac{T(B_1)^2+\cdots+T(B_4)^2}{6}-\frac{T^2}{24} \\
&\equiv S_B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
S\left[\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 \\
\boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{n}_3 \\
-1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{n}_3 \\
\boldsymbol{n}_1 & \boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{n}_3
\end{array}\right]
\oplus S[\hat{\boldsymbol{\ell}}]\oplus S[\boldsymbol{1}_{24}]\oplus S[\hat{\boldsymbol{m}}_1,\hat{\boldsymbol{m}}_2,\hat{\boldsymbol{m}}_3]
=S\left[\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} 1 & {}_1O \\ O^1 & {}_1 \end{matrix} & \underset{4\times 4}{O} \\
\hline
\underset{4\times 4}{O} & \begin{matrix} 1 & {}_1O \\ O^1 & {}_1 \end{matrix} \\
\hline
I_4 & O \\
O & I_4 \\
\hline
I_4 & O \\
O & I_4
\end{array}\right]\equiv S(L) \\
\begin{array}{ccc}
\| & \| & \| \\
\hat{\boldsymbol{n}}_1 & \hat{\boldsymbol{n}}_2 & \hat{\boldsymbol{n}}_3
\end{array}
\end{array}
$$

ゆえに

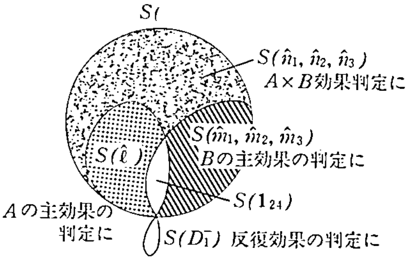
$$
\begin{aligned}
&\|P_{S(\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{n}_3)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\|P_{S(L)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{S(\hat{m}_1^*,\hat{m}_2^*,\hat{m}_3^*)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\hat{\ell}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\|P_{\boldsymbol{1}_{24}}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \\
&=\left(\frac{\sum_j\sum_i T(A_iB_j)^2}{3}-\frac{T^2}{24}\right)-\left(\frac{\sum T(B_i)^2}{6}-\frac{T^2}{24}\right)-\left(\frac{T(A_1)^2+T(A_2)^2}{12}-\frac{T^2}{24}\right) \\
&\equiv S_{AB}-S_B-S_A\equiv S_{A\times B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.10)
\end{aligned}
$$

$$
\|P_{S(D_3^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=\left(\sum x_{ij}^2-\frac{T^2}{24}\right)-\underset{(=\sum\sum T(AR)^2/4-T^2/24)}{(\|P_{S(D_1^-)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2+\|P_{S(\hat{\ell}_1,\hat{\ell}_2,\hat{\ell}_3)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2)}-\underset{(4,8)}{\|P_{S(\hat{m}_1,\hat{m}_2,\hat{m}_3)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}-\underset{(4,9)}{\|P_{S(\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{n}_3)}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2}
$$

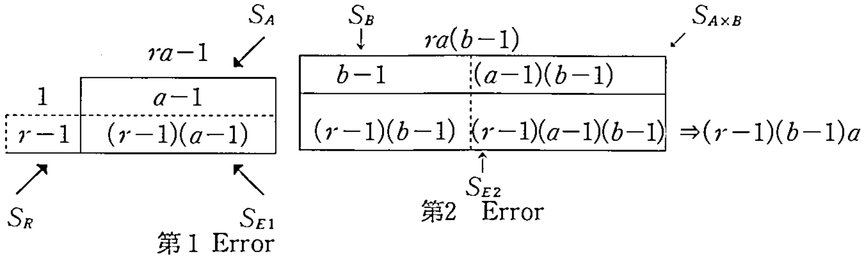
$$
S_{E2}=S_T \qquad -S_{RA} \qquad\qquad -S_B \qquad -S_{A\times B} \qquad \cdots(4,11)
$$

として計算される。

図 3　推定空間の分割図



一般に反復r，A要因の水準a，B要因の水準bのときの各自由度はつぎのようになる。



例．奥野忠一他，実験計画法（培風館，昭44）（P135～140）より，オイルレス・ベアリングの強度に effect すると考えられる 2 つの因子を取り上げ，

A：焼結温度 $A_1=800, A_2=820, A_3=840, A_4=860$の 4 水準

B：焼結金属の原料配合　B_1，B_2，B_3　(試料)

実験は 1 週間をおいて 2 回実行した　R_1，R_2

		B_1	B_2	B_3	計	ブロック計
R_1	A_1	−1	−5	−12	−18	9
	A_2	4	1	0	5	
	A_3	7	2	6	15	
	A_4	0	−3	10	7	
R_2	A_1	1	−2	−11	−12	−3
	A_2	3	4	0	7	
	A_3	1	0	5	6	
	A_4	−3	−6	5	−4	
R_1+R_2	A_1	0	−7	−23	−30	6
	A_2	7	5	0	12	
	A_3	8	2	11	21	
	A_4	−3	−9	15	3	
B計		12	−9	3	6	

	A_1	A_2	A_3	A_4	計
R_1	−18	5	15	7	9
R_2	−12	7	6	−4	−3
計	−30	12	21	3	6

補正項：$CT=(\sum x)^2/rab=6^2/2\times4\times3=1.5$

$(\mathrm{II})_{RA}=\{(-18)^2+5^2+\cdots+(-4)^2\}/3=868/3=289.3$

$(\mathrm{I})_R=\{9^2+(-3)^2\}/12 \qquad =75$

$(\mathrm{I})_A=\{(-30)^2+12^2+21^2+3^2\}/6 \qquad =249.0$

$S_{RA}=(\mathrm{II})_{RA}-CT=289.3-1.5 \qquad =287.8$

$S_R=(\mathrm{I})_R-CT=7.5-1.5 \qquad =6.0$

$S_A=(\mathrm{I})_A-CT=249.0-1.5 \qquad =247.5$

1次 Error の$S\cdot S=S_{RA}-S_R-S_A=34.3$

個々のデータの2乗和：$(\mathrm{III})=\{(-1)^2+(-5)^2+(-12)^2+\cdots+(-6)^2+5^2\}/1=632$

$S\cdot S=\mathrm{III}-CT=632-1.5=630.5=S_T$

$S_B=\mathrm{I}_B-CT=\{12^2+(-9)^2+3^2\}/8-15=29.3-1.5=27.8$

A,Bの2元表の2乗和$/r=\mathrm{II}_{AB}=\{0^2+(-7)^2+(-23)^2+\cdots+15^2\}/2=578$

交互作用の$S\cdot S=S_{A\times B}=578-\mathrm{I}_A-\mathrm{I}_B+CT=301.2$

2次誤差$Se_2=\mathrm{III}-(\mathrm{II})_{RA}-\mathrm{II}_{AB}+\mathrm{I}_A=S_T-S_{RA}-S_B-S_{A\times B}$

$=13.7$

変動因	自由度	SyS	$M\cdot S\cdot S$	F検定量
	$rab-1=23$	$S_T=630.5$		
1次単位	$ra-1=7$	$S_{RA}=287.8$		
ブロックR	$r-1=1$	$S_R=6.0$	6.0	
温度A	$a-1=3$	$S_A=247.5$	82.5	7.2 (6.7)*
1次 Error	$(r-1)(a-1)=3$	$Se_1=343$	11.4	
2次単位	$ra(b-1)=16$			
原料B	$b-1=2$	$S_B=27.8$	13.9	8.2*
交互	$(a-1)(b-1)=6$	$S_{A\times B}=301.2$	50.2	25**
2次 Error	$a(r-1)(b-1)=8$	$Se_2=13.7$	1.7	

§5. あとがき

これからの検討問題として，(c)検定統計量による検定と，(b)検定統計量による検定の間の関係についてである。

(c)検定での仮説（帰無）は，Ξの固有ベクトル$\boldsymbol{1}$があり，他のr重根の固有根λ^*に対応する固有ベクトル空間$S(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots\boldsymbol{c}_r|\lambda^*)$に対して，仮説は，

Hr：固有ベクトル空間$S(\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r|\lambda^*)\perp\boldsymbol{\mu}$…………………………………………………………(1)

(b)検定は，一般に（固有ベクトル空間でないとき）$\boldsymbol{1}$に垂直なr次元ベクトル空間を$S(\boldsymbol{c}_1,\cdots\boldsymbol{c}_r)$とすると，$H'$：一般的な，$S(\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r)\perp\boldsymbol{\mu}$,（ただし$S(\boldsymbol{c}_1\cdots\boldsymbol{c}_r)\perp\boldsymbol{1}$）…………(2)

これから帰無仮説から見て(c)検定は，(b)検定の特別な場合であるといえる。しかし検定統計量の間に包接関係はない。

$H'r \supset Hr$より，Hrの検定には，(c)法は勿論(b)法でも検定される。したがって，Hrの検定に対して，(c)法と(b)法のいずれが，better な検定であるかの問題がのこる。(直観的にはHrには，(c)法が(b)法より，better に思える)。

引用図書

(1) S.F.Arnold(1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.

(2) A. M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.

(3) T. W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.

(4) 宇喜多義昌 (1975)，実験計画法，森北出版。

(5) 宇喜多義昌 (1988)，多変量統計解析，$\|P_S x\|^2$とその分布の研究，序説一明星大学出版部。

(6) 宇喜多義昌 (1987)，多変量解析一標本分布とその応用一明星大学出版部。

引用論文

(1) Y.Ukita (1976)，Hypothesis Spaces and Decomposition of Sum of Square in Linear Models (Ogawa Volume).

(2) 宇喜多義昌 (1980)，$\langle P_a x\rangle$ $\|P_S x\|^2$の分布と応用について (東京理科大学・理学専攻科雑誌，No.1，Vol.1)。

(3) 宇喜多義昌，外2名 (1981)，$\|P_{S_1}x\|^2/\|P_{S_2}x\|^2$の分布に関する定理 (東京理科大学，理学専攻科雑誌，No.1，Vol.2)。

(4) Y.Ukita (1982)，On a Geometrical Meaning of $A_{22,1}$ and its Ditribution(Tensor, N. S. Vol. 39).

(5) 宇喜多義昌 (1982，Basic 数学，No.10～No.12，1983) 統計的実験の計画と，実験データの解析(I，II，III，IV)。

(6) 日本数学会研究発表アブストラクト (統計数学)，1985年，秋季大会 (富山大学)，1986年春季大会 (京都大学)。

(7) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学研究紀要 (理工学部)。1987

(8) Y.Ukita & K.Noda：About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1987。

(9) Y.Ukita & K. Noda：Testing Hypotheses on Generalized Linears Models in ANOVA (ISI 46th Contributed Papers) 1987.

(10) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized linear Model の場合の仮説検定について，明星大学研究紀要一理工学部，1988(第24号)

(11) 宇喜多義昌・小野英夫：Generalized Linear Model の場合のF一検定法の応用，明星大学研究紀要一理工学部1989(第25号)

(12) 宇喜多義昌：Generalized Linear Model の場合の仮説検定について(II)，明星大学研究紀要一理工学部1989(第25号)

(13) Y.Ukita "The Decomposition of The Principal Space and Its Application to

The Analysis of Variance on The Linear Model.（東京理科大学研専攻科雑誌。
No.1， Vol 5, 1984.

(14) Y.Ukita, K. Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis contrast $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$, And Its Application to The Regression Theorem" (Japan China Symposium on Statisics) 1989.

(15) 宇喜多義昌：Generalized Linear Model の場合の仮説検定についてIII，明星大学研究紀要―理工学部1990（第26号），