

# Generalized Linear Model の場合の 仮説検定について (III)

— MANOVA CASE —

宇喜多 義昌\*

## 1 はじめに

宇喜多・小野, “Generalized Linear Model の場合の仮説検定について” 明星大学研究紀要 理工学部第 24 号 (1988), 宇喜多義昌, “Generalized Linear Model の場合の仮説検定について (II)” 明星大学研究紀要 理工学部第 25 号 (1989) の 2 篇の論文は, 基本定理として

**Th 1.**  $x \sim N_a(\mu + R1_a, E)$  のとき,  $x$  の  $i \cdot i \cdot d$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . によって,

$H: c'\mu = 0$  (ただし  $c$  は  $c'1_a = 0$  を満足する任意ベクトル)

の検定には,  $H$  が真のときは

$$\|P_s(\bar{c})\bar{x}\|^2 / \frac{\|P_s(c^-)\bar{x}\|^2}{n-1} \sim F_{n-1,1} \quad \dots\dots(1)$$

をもとにして, 仮説  $H$  の検定が行える。

こゝに  $\bar{c}' = (c', c', \dots, c')$  なる  $na$  成分ベクトルである。

$$C^- \text{ は } s \begin{bmatrix} c & 0 \cdots 0 \\ 0 & c \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} \quad C^- = s(\bar{c}) \oplus s(C^-), \text{ である。}$$

Th 1 と同じ仮定のもとで,  $\mu$  について  $r$  個の独立な対比 (contrast) が 0 ということについての検定問題を考える,

**Th 2.**  $H_r: c_1'\mu = 0, c_2'\mu = 0, \dots, c_r'\mu = 0$ . (ただし  $c_i'1_a = 0, i=1, 2, \dots, r, \dim s(c_1,$

$c_2, \dots, c_r) = r$ ) のときは,  $x$  を  $C' = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_r' \end{pmatrix}$  で変換して,  $r$  成分のベクトル  $y$  をつくる

$$y = C'x.$$

この  $y \sim N_r(C'\mu, C'EC)$  なることから,

$\bar{y} = y_1 = C'x_1, y_2 = C'x_2, \dots, y_n = C'x_n$  なる  $y_1, \dots, y_n$  の平均ベクトルで,  $\bar{y} \in R^r$ .

$S_{yy}; y_1, y_2, \dots, y_n$  の修正積和行列とすると,

\* 一般教養教授 数学

$H_r$  が真のときは

$$(n-1)n\bar{y}'S_{yy}^{-1}\bar{y} \sim t_{n-1}^2(r). \quad (f=n-1 \text{ の } t^2\text{-分布}) \quad \dots\dots(2)$$

これから,  $H_r$  は (2) の検定量で検定されることは良く知られている (注, 引用図書 (3)。Anderson)

**Th 3.** Th 2 の仮説  $H_r$  の特殊場合を研究する。  $E$  の行要素の和が一定数  $\lambda_0 > 0$  であるとき, すなわち  $E\mathbf{1}_a = \lambda_0\mathbf{1}_a$  で,  $\lambda_0$  は  $E$  の固有根で, 対応する固有単位ベクトルは,  $e(\mathbf{1}_a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{1}_a$  である。他の固有根  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_k > 0$  があり, 対応する固有空間を  $s(\lambda_1), s(\lambda_2), \dots, s(\lambda_k)$  とし, 各次元を  $\dim s(\lambda_1) = r_1, \dim s(\lambda_2) = r_2, \dots, \dim s(\lambda_k) = r_k$  とする。

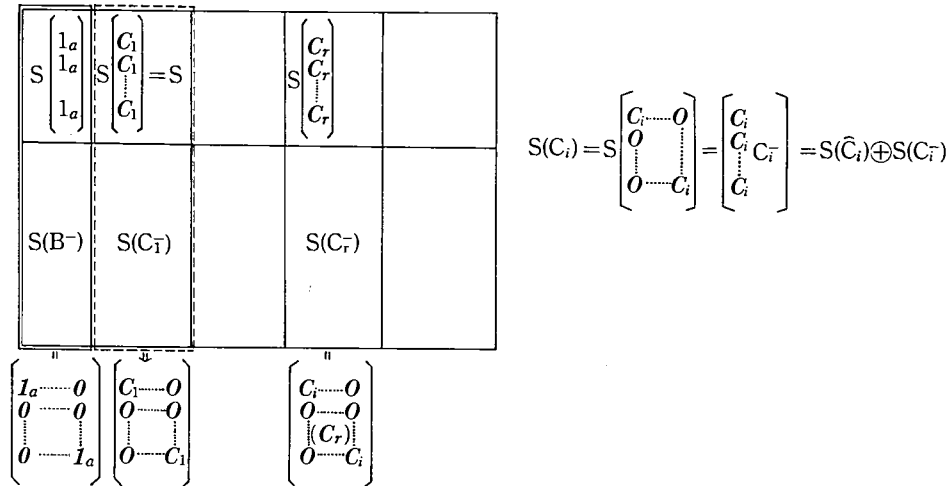
いま  $\lambda_0$  以外の固有根  $\lambda$  が  $r (\geq 2)$  重根とすと, 対応する固有空間  $s(\lambda)$  の中に単位直交ベクトル  $e(c_1), e(c_2), \dots, e(c_r)$  が得られる。

$H_r$  (仮説),  $c_1'\mu = c_2'\mu = \dots = c_r'\mu = 0$  の同時検定に,

$$\frac{\|P_s(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_r)\hat{x}\|^2}{r} \bigg/ \frac{\|P_s(c_1^-c_2^-, \dots, c_r^-)\hat{x}\|^2}{r(n-1)} \sim F_{r(n-1)}^r \quad \dots\dots(3)$$

( $H_r$  が真のときに限り  $F_{r(n-1)}^r$  分布をする)。

図 1.



Th 3, の証明については冒頭の第 24 号の論文に詳述し, かつ分割法実験, くり返し実験にこの検定法が行われることを示した。

本小文は § 2 で, Th 2 の変換  $y = C'x$  によって Th 3 の (3) の検定統計量が導かれることを述べる。(第 24 号論文で, 既に別の方法で, この検定統計量を導いている)。

§ 3 では,  $a \times 3$  行列が, 第  $i$ -対象について  $x, y, z$  を  $a$  回連続くり返し測定したつぎのような行列は,

$$\left[ \begin{matrix} x(i) & y(i) & z(i) \end{matrix} \right] = X(i).$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_a[\mu(x) + R_{i,x}1_a, E(x)], & N_a[\mu(y) + R_{i,y}1_a, E(y)], & N_a[\mu(z) + R_{i,z}1_a, E(z)] \\ \text{cov}(x, y) = \sigma_{12}I_a, & \text{cov}(x, z) = \sigma_{13}I_a, & \text{cov}(y, z) = \sigma_{23}I_a, \end{matrix} \right.$$
 上のよう分布するとき,  $X$  の  $i, i, d$   $X(1), X(2) \cdots X(n)$  から,  
 $H_i: c'\mu(x)=0, c'\mu(y)=0, c'\mu(z)=0$  (たゞし  $c'1_a=0$ ), の検定統計量を導き, その適用例を述べる。

§4では, Th 3 の拡張にあたる特殊であるが有用な仮説,

$$\begin{aligned} H_r: c_1'\mu(x)=0, c_1'\mu(y)=0, c_1'\mu(z)=0, \\ c_2'\mu(x)=0, c_2'\mu(y)=0, c_2'\mu(z)=0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ c_r'\mu(x)=0, c_r'\mu(y)=0, c_r'\mu(z)=0. \end{aligned}$$

なる  $3r$  個の contrast が全部 0 であるとする仮説の検定統計量を導き, その適用例を述べる。

§5では, 論文 24 号, 25 号と本文の各種検定統計量の系統表, 関連表を作って見た。

## §2. $c_1'\mu=c_2'\mu=\cdots=c_r'\mu=0$ の同時検定。

$E>0$  の固有ベクトル  $1$  (固有根は  $E1=k1$  なる  $k$ ) と, 他の固有根  $\lambda$  ( $r \geq 2$  重根) で, 対応する固有単位直交ベクトル

$$e(c_1), e(c_2), \cdots, e(c_r).$$

のとき, (たゞし  $e(c_i)$  は  $c_i$  方向の単位ベクトルとする)。

$H_r$  仮説;  $c'\mu=c_2'\mu=\cdots=c_r'\mu=0$

の検定問題を取扱う。

いま  $e(c_i) \equiv e_i (i=1, 2, \cdots, r)$  とし,  $x$  から  $y$  への変換

$$y = \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_r' \end{bmatrix} x = E'x, \quad x \sim N_a[\mu + R_x 1_a, E] \quad \cdots (2.1)$$

とし,  $x=x_i$  に対応する  $y$  を  $y_i$  とする ( $i=1, 2, \cdots, n$ )

$$y_i = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{r1} \end{bmatrix} = E'x_1, \quad y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{r2} \end{bmatrix} = E'x_2, \quad \cdots, \quad y_n = \begin{bmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{rn} \end{bmatrix} = E'x_n \quad \cdots (2.2)$$

このとき

$$y \sim N_r[E'\mu, \lambda I_r]$$

で,  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  は  $y$  の size  $n$  の  $i, i, d$  とみられる。よって,  $y_1, \cdots, y_n$  の平均ベクトル  $\bar{y}$  と修正積和行列  $S_{yy}$  から, Th 2 によって,  $H_r$  が真のときは, 前節 (2) より

$$(n-1)n\bar{y}'S_{yy}^{-1}\bar{y} \sim t_{n-1}^2(r)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{\mathbf{c}_i'}{\|\mathbf{c}_i\|} \cdot \frac{\mathbf{c}_i'}{\|\mathbf{c}_i\|}, \dots, \frac{\mathbf{c}_i'}{\|\mathbf{c}_i\|} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{n} \|\mathbf{c}_i\|} (\mathbf{c}_i', \mathbf{c}_i' \cdots \mathbf{c}_i') \hat{\mathbf{x}} \\
&= \langle P \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{x}} \rangle \quad (i=1, 2, \dots, r)
\end{aligned}$$

こゝに,  $\hat{\mathbf{c}}_i' \equiv (\mathbf{c}_i', \mathbf{c}_i', \dots, \mathbf{c}_i')$ ,  $\hat{\mathbf{x}}' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$  である。よって

$$\sum_{i=1}^r (\sqrt{n} \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^r \|P \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{x}}\|^2 = \|P_s(\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, \dots, \hat{\mathbf{c}}_r) \hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad \dots\dots(2.9)$$

上で,  $s(\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, \dots, \hat{\mathbf{c}}_r)$  は, たがいに直交しているベクトル  $\hat{\mathbf{c}}_1, \dots, \hat{\mathbf{c}}_r$  の張る  $r$  次元のベクトル空間である。また

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^n (y_{ia} - \bar{y}_i)^2 &= \sum_{a=1}^n y_{ia}^2 - n \cdot \bar{y}_i^2 = \sum_{a=1}^n (\mathbf{e}_i' \mathbf{x}_a)^2 - \|P \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{x}}\|^2 \\
&= \{(\mathbf{e}_i', 0' \cdots 0') \hat{\mathbf{x}}\}^2 + \{(0', \mathbf{e}_i', 0' \cdots 0') \hat{\mathbf{x}}\}^2 + \cdots + \{(0', \dots, 0', \mathbf{e}_i') \hat{\mathbf{x}}\}^2 - \|P \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{x}}\|^2 \\
&= \|P \hat{\mathbf{e}}_{i1} \hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|P \hat{\mathbf{e}}_{i2} \hat{\mathbf{x}}\|^2 + \cdots + \|P \hat{\mathbf{e}}_{in} \hat{\mathbf{x}}\|^2 - \|P \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{x}}\|^2 = \|P_s(\mathbf{c}_i) \hat{\mathbf{x}}\|^2 - \|P \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{x}}\|^2 \\
&= \|P_s(\mathbf{c}_i^-) \hat{\mathbf{x}}\|^2, \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad \dots\dots(2.10)
\end{aligned}$$

こゝに  $\hat{\mathbf{e}}_{i1}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{in}$  とか  $s(\mathbf{C}_i)$ ,  $s(\mathbf{C}_i^-)$  はつぎのようなベクトルと, ベクトル空間である。

$$s(\mathbf{C}_i) = s \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i & 0 \cdots 0 \\ 0 & \mathbf{e}_i \cdots 0 \\ \vdots & 0 \quad \vdots \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots \mathbf{e}_i \end{bmatrix} = s \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{e}_i & \\ \mathbf{e}_i & \mathbf{C}_i^- \\ \vdots & nr \times (n-1) \\ \mathbf{e}_i & \end{array} \right] = s(\hat{\mathbf{e}}_i) \oplus s(\mathbf{C}_i^-)$$

$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$       互に直交  
 $\hat{\mathbf{e}}_{i1} \quad \hat{\mathbf{e}}_{i2} \quad \hat{\mathbf{e}}_{in}$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r \sum_{a=1}^n (y_{ia} - \bar{y}_i)^2 &= \|P_s(\mathbf{c}_1^-) \hat{\mathbf{x}}\|^2 + \cdots + \|P_s(\mathbf{c}_r^-) \hat{\mathbf{x}}\|^2, \quad s(\mathbf{C}_i^-) \text{ は互に直交するから} \\
&= \|P_s(\mathbf{c}_1^-, \mathbf{c}_2^-, \dots, \mathbf{c}_r^-) \hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad \dots\dots(2.11)
\end{aligned}$$

(2.8) と (2.9) と (2.11) より, (2.8) の左の項は §1 の (3) 式となる。

$$\frac{\sum_{i=1}^r (\sqrt{n} \bar{y}_i)^2 / r}{\sum_{i=1}^r \sum_{a=1}^n (y_{ia} - \bar{y}_i)^2 / r(n-1)} = \frac{\|P_s(\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, \dots, \hat{\mathbf{c}}_r) \hat{\mathbf{x}}\|^2}{\|P_s(\mathbf{c}_1^-, \mathbf{c}_2^-, \dots, \mathbf{c}_r^-) \hat{\mathbf{x}}\|^2 / r(n-1)}.$$

§3.  $c'\mu(x)=0, c'\mu(y)=0, c'\mu(z)=0$  (たゞし  $c'1_a=0$ ) の同時検定について。

本節では, 第  $k$  対象 (個体) について  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  の  $p$  種類の測定値に, 処理  $T_1, T_2, \dots, T_a$  を施して

$$\begin{aligned}
&X_1; X_1(T_1), X_1(T_2), \dots, X_1(T_a) \\
&X_2; X_2(T_1), X_2(T_2), \dots, X_2(T_a) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$X_p; X_p(T_1), X_p(T_2), \dots, X_p(T_a)$ 。

を観測する。これを  $n$  個の対象に対して計  $p \times a \times n$  の観測値を得て統計的解析を行うべきであるが、説明を簡単にするために  $p=3$  とし、 $X_1 \rightarrow X, X_2 \rightarrow Y, X_3 \rightarrow Z$  の 3 種類の測定値とし、第  $k$  対象に処理  $T_1, T_2, \dots, T_a$  を施して  $(X, Y, Z)$  を観測するとする。すなわち、

$$\begin{aligned} X(k) &\equiv \begin{bmatrix} X_1(k), & Y_1(k), & Z_1(k) \\ X_2(k), & Y_2(k), & Z_2(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_a(k), & Y_a(k), & Z_a(k) \end{bmatrix} \\ &\equiv [x(k), y(k), z(k)] \end{aligned}$$

こゝにつきのように列ベクトルの分布を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x(k) &\sim N_a[\mu(x) + R_k(x)1_a, E(x)], \\ y(k) &\sim N_a[\mu(y) + R_k(y)1_a, E(y)], \\ z(k) &\sim N_a[\mu(z) + R_k(z)1_a, E(z)]. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[x(k), y(k)] &= \sigma_{12}I_a, \quad \text{cov}[x(k), z(k)] = \sigma_{13}I_a, \quad \text{cov}[y(k), z(k)] = \sigma_{23}I_a \\ &\dots\dots(3.2) \end{aligned}$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \xi_{ji}(x) \\ \xi_{ij}(x) & \sigma_{11} \end{bmatrix}, \quad E(y) = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \xi_{ji}(y) \\ \xi_{ij}(y) & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad E(z) = \begin{bmatrix} \sigma_{33} & \xi_{ji}(z) \\ \xi_{ij}(z) & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

$R_k(x), R_k(y), R_k(z)$  は、第  $k$  対象の各  $X, Y, Z$  に共通に出現する母数。

$$\text{また } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \Sigma' > 0 \text{ とする。}$$

さて、この行列  $X_{a \times n}$  を  $n$  ケの対象について得た無作為標本行列  $X(1), X(2), \dots, X(n)$

からつぎの  $an \times 3$  の行列  $\hat{X}$  をつくる。

$$\hat{X} \equiv \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & 1_a & 0 & \dots & 0 \\ I_a & 0 & 1_a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_a & 0 & 0 & \dots & 1_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu(x), \mu(y), \mu(z) \\ R(x), R(y), R(z) \end{bmatrix} + [\bar{e}(x), \bar{e}(y), \bar{e}(z)]$$

すなわち、 $[x'(1), x'(2) \dots x'(n)] = \bar{x}', [y'(1) \dots y'(n)] = \bar{y}', [z'(1) \dots z'(n)] = \bar{z}'$  とすると、

$$[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_a, \bar{b}_1 \dots \bar{b}_n] \begin{bmatrix} \mu(x), \mu(y), \mu(z) \\ R(x), R(y), R(z) \end{bmatrix} + [\bar{e}(x), \bar{e}(y), \bar{e}(z)] \quad \dots\dots(3.3)$$

こゝに  $R'(x) = [R_{1,x} R_{2,x} \dots R_{n,x}]$ ,  $R'(y) = [R_{1,y} \dots R_{n,y}]$ ,  $R'(z) = [R_{1,z} \dots R_{n,z}]$   
 $\bar{a}_1' = (1, \underbrace{0 \dots 0}_a, 1, \underbrace{0 \dots 0}_a, \dots, 1, 0 \dots 0), \dots, \bar{a}_a' = (0, \underbrace{\dots 0}_a, 1, 0, \underbrace{\dots 0}_a, 1, \dots,$   
 $0, \dots 0, 1).$

$\bar{b}_1' = [1_a', 0', \dots, 0']$ 。  $\dots \bar{b}_n' = (0', 0', \dots, 0', 1_a')$

本論に移る前に良く知られている定理を述べる。

Lemma 1.  $\bar{z}_a \sim N_n(0, \sigma_{aa}I_n)$ ,  $\text{cov}(\bar{z}_a, \bar{z}_\beta) = \sigma_{a\beta}I_n$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p \leq n$ ,  
このとき、つぎの  $p \times p$  行列の分布は、

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_1' \\ \bar{z}_2' \\ \vdots \\ \bar{z}_p' \end{bmatrix} [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_p] = \begin{bmatrix} \bar{z}_1' \bar{z}_1, & \bar{z}_1' \bar{z}_2, & \dots & \bar{z}_1' \bar{z}_p \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{z}_p' \bar{z}_1, & \dots & \dots & \bar{z}_p' \bar{z}_p \end{bmatrix} \sim W_p(n, \Sigma),$$

すなわち、parameter  $\Sigma = (\sigma_{a\beta}) > 0$ , 自由度  $n$  の Wishart 一分布をなす。

Lemma 2.

$p \times p$  行列  $A = [(\bar{a}_\alpha' \bar{a}_\beta)] \sim W_p(n-q, \Sigma)$  ( $p \leq n-q$ ).

$p \times p$  行列  $B = [(\bar{b}_\alpha' \bar{b}_\beta)] \sim W_p'(q, \Sigma)$ , ( $q < p$ ).

すなわち  $A$  は Wishart,  $B$  は Pseudo-Wishart 分布のとき、

$$\frac{|A|}{|A+B|} \sim \Lambda_p(q | (n-q) + q = n); \left( q, n \text{ 自由度の Wilks の } \right) \left( \Lambda_p\text{-分布をなす意味。} \right)$$

もし、 $\bar{b}_\alpha' = (b_{\alpha 1}, b_{\alpha 2}, \dots, b_{\alpha q})$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  の分布が、

$$\bar{b}_\alpha \sim N_q[\epsilon(\bar{b}_\alpha), \sigma_{aa}I_q]$$

$$\text{cov}(\bar{b}_\alpha, \bar{b}_\beta) = \sigma_{a\beta}I_q,$$

$$\Sigma = (\sigma_{a\beta}) > 0$$

で、 $\epsilon(\bar{b}_\alpha) \neq 0$  するとき、

$B \sim \text{non central } W_p'(q, \Sigma)$  分布をする。

といふ、 $|A|/|A+B|$  は、 $\Lambda_p'(q | n)$  なる non central  $\Lambda$ -分布をすることが知られている。(注、宇喜多義昌著：「多変量統計解析—標本分布論とその応用」1987, 明星大学出版部を参照のこと)。

本論に帰る。(3.1)(3.2)(3.3) より、 $\hat{x}$  の  $S(C)$  への正射影  $P_s(c)\hat{x}$  を直交座標系 ( $\hat{c}$ ,  $C^\perp$ ) から見たときのベクトル成分と、その分布はつぎのようになる。

$$P_s(c)\hat{x} = \begin{bmatrix} \langle P\hat{c}\hat{x} \rangle \\ \langle P_{\theta(2)}\hat{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle P_{\theta(n)}\hat{x} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim N_1\left[\frac{\sqrt{n}}{\|c\|}c'\mu(x), \sigma_{11}^* \equiv \frac{c'\Xi(x)c}{\|c\|^2}\right], \\ \sim N_1[0, \sigma_{11}^*], \\ \vdots \\ \sim N_1[0, \sigma_{11}^*]. \end{matrix}$$

すなわち、 $u_i$  は上の右のような正規分布で、互に独立である。同様に、 $P_s(c)\hat{y}$ ,  $P_s(c)\hat{z}$  についても

$$P_s(c)\hat{y} = \begin{bmatrix} \langle P\hat{c}\hat{y} \rangle \\ \langle P_{\theta(2)}\hat{y} \rangle \\ \vdots \\ \langle P_{\theta(n)}\hat{y} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim N_1\left[\frac{\sqrt{n}}{\|c\|}c'\mu(y), \sigma_{22}^* \equiv \frac{c'\Xi(y)c}{\|c\|^2}\right], \\ \sim N_1[0, \sigma_{22}^*], \\ \vdots \\ \sim N_1[0, \sigma_{22}^*]. \end{matrix}$$

$$v_i \perp \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$P_s(c)\bar{z} = \begin{bmatrix} \langle P\bar{c}\bar{z} \rangle \\ \langle P_{g(2)}\bar{z} \rangle \\ \vdots \\ \langle P_{g(n)}\bar{z} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \mathbf{w} \sim \begin{matrix} N_1\left[\frac{\sqrt{n}}{\|\mathbf{c}\|}\mathbf{c}'\boldsymbol{\mu}(z), \sigma_{33}^* = \frac{\mathbf{c}'\Xi(z)\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|^2}\right] \\ N_1[0, \sigma_{33}^*] \\ \vdots \\ N_1[0, \sigma_{33}^*] \end{matrix}$$

$$w_i \perp (i=1, 2, \dots, n)$$

また少し計算するとつぎのことが分る。

$$\text{cov}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma_{12}I_{n-1}, \quad \text{cov}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sigma_{13}I_{n-1}, \quad \text{cov}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sigma_{23}I_{n-1},$$

$$\text{cov}(u_1, v_1) = \sigma_{12}, \quad \text{cov}(u_1, w_1) = \sigma_{13}, \quad \text{cov}(v_1, w_1) = \sigma_{23},$$

$$\text{cov}(u_1, v_\alpha) = \text{cov}(u_1, w_\alpha) = 0, \quad \text{cov}(v_1, u_\alpha) = \text{cov}(v_1, w_\alpha) = 0,$$

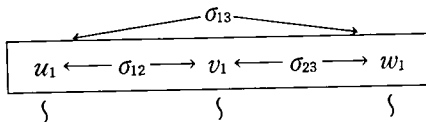
$$\text{cov}(w_1, u_\alpha) = \text{cov}(w_1, v_\alpha) = 0, \quad (\text{こゝに } \alpha=2, 3, \dots, n).$$

上の  $s(C)$  とか,  $\bar{c}$ ,  $C^-$ ,  $g(2)$ ,  $\dots, g(n)$  は, つぎのような空間やベクトルである。

$$s(C) = s \begin{bmatrix} \mathbf{c} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{c} \end{bmatrix} = s \left[ \begin{array}{c} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \end{array} \right] \begin{array}{l} [g(2)\cdots g(n)] \\ C^- \\ \text{互に直交すると} \\ \text{する} \end{array} \right] = s(\bar{c}) \oplus s(C^-)$$

$S(1_{na})$	$S \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ C \end{bmatrix} = S(\hat{C})$
$S(B^-)$	$S[g(2)\cdots g(n)] = S(C^-)$

上のことから,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  については,



$N[k\mathbf{c}'\mathbf{u}(x), \sigma_{11}^*]$   $N[k\mathbf{c}'\mathbf{u}(y), \sigma_{22}^*]$ ,  $N[k\mathbf{c}'\mathbf{u}(z), \sigma_{33}^*]$ , こゝに  $k = \sqrt{n}/\|\mathbf{c}\|$ 。である。

よって, lemma 1. の一般定理より,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} [u_1, v_1, w_1] = \begin{bmatrix} \langle P\bar{c}\bar{x} \rangle \\ \langle P\bar{c}\bar{y} \rangle \\ \langle P\bar{c}\bar{z} \rangle \end{bmatrix} [\langle P\bar{c}\bar{x} \rangle, \langle P\bar{c}\bar{y} \rangle, \langle P\bar{c}\bar{z} \rangle] \equiv P\bar{c}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \equiv B_{3 \times 3}$$



この  $B$  行列は, 自由度 1, parameter 行列  $\Sigma^*$  の pseudo non-central Wishart 分布をなす。すなわち

$$B \sim \text{noncent } W_3'(1 | \Sigma^*) \quad \dots\dots(3.4)$$

こゝに noncentral parameters( $kc'\mu(x)$ ,  $kc'\mu(y)$ ,  $kc'\mu(z)$ ) で,

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^* & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}^* \end{bmatrix} = \Sigma^{*'} > 0 \text{ とする。}$$

一方,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  の同時分布は,

$$\text{cov}(u, w) = \sigma_{13} I_{n-1}$$

$u$	$\underbrace{\hspace{2cm}}_{v}$	$w$
-----	---------------------------------	-----

$$\int \text{cov}(u, v) \int \text{cov}(v, w) \int = \sigma_{12} I_{n-1} \int = \sigma_{23} I_{n-1} \int$$

$$N_{n-1}(0, \sigma_{11}^* I_{n-1}), N_{n-1}(0, \sigma_{22}^* I_{n-1}), N_{n-1}(0, \sigma_{33}^* I_{n-1})$$

よって lemma 1 より,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} [u \ v \ w] = \begin{bmatrix} \langle P_s(c^-) \hat{x} \rangle \\ \langle P_s(c^-) \hat{y} \rangle \\ \langle P_s(c^-) \hat{z} \rangle \end{bmatrix} [P_s(c^-) \hat{x}, P_s(c^-) \hat{y}, P_s(c^-) \hat{z}] \equiv P_s(c^-)^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \equiv A_{3 \times 3}$$

この  $A$  の分布は自由度  $n-1$  で, parameter 行列  $\Sigma^*$  の Wishart 一分布。

$$A \sim W_3(n-1 | \Sigma^*) \quad \dots\dots(3.5)$$

また明らかに  $A \perp B$  である。よって (3.4) と (3.5) と lemma 2 より,

**Th 4.**

$$\frac{|A|}{|A+B|} = \frac{|P_s(c^-)^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})|}{|P_s(c^-)^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) + P\hat{c}^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})|} \sim \text{non cent } \Lambda'(3 | 1 | n)$$

よって,

仮説  $H_c: c'\mu(x) = c'\mu(y) = c'\mu(z) = 0$  (ただし  $c'1_a = 0$ ) が真のとき,

$$\frac{|A|}{|A+B|} \sim \Lambda(3 | 1 | n-1+1=n), \text{ (Wilks の } \Lambda \text{ 分布)}$$

以上の定理の適用例を述べる。

**適用例**— $x$ ,  $y$ ,  $z$  が共に  $t$  の 1 次回帰の場合で,  $t$  は  $t_1, t_2, \dots, t_a$  の値をとる補助変数であり,  $n$  個の各対象に対し  $t_1, t_2, \dots, t_a$  と  $t$  を変えて繰返し観測する, したがって  $i$  対象に対する  $x(i)$  の誤差ベクトル  $e_x(i)$ ,  $y(i)$  の誤差ベクトル  $e_y(i)$ ,  $z(i)$  の誤差ベクトル  $e_z(i)$  の各分散共分散行列は

$$V[e_x(i)] = E(x), \quad V[e_y(i)] = E(y), \quad V[e_z(i)] = E(z)$$

として,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  の回帰係数  $m_1, m_2, m_3$  につき

$$H_3: m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

の検定を考える。

$$i\text{-対象} \quad x(i) = m_1(t - \bar{t}1_a) + \alpha_x 1_a + R_x(i)1_a + e_x(i) = \mu(x) + \hat{R}_x(i)1_a + e_x(i)$$

$$y(i) = m_2(t - \bar{t}1_a) + \alpha_y 1_a + R_y(i)1_a + e_y(i) = \mu(y) + \hat{R}_y(i)1_a + e_y(i)$$

$$z(i) = m_3(t - \bar{t}1_a) + \alpha_z 1_a + R_z(i)1_a + e_z(i) = \mu(z) + \hat{R}_z(i)1_a + e_z(i)$$

で各  $x(i)$ ,  $y(i)$ ,  $z(i)$  は  $a$  成分ベクトルである。また

$$(t - \bar{t} \mathbf{1}_a) = (t_1 - \bar{t}, t_2 - \bar{t}, \dots, t_a - \bar{t}), \quad \bar{t} = \sum t_i / n$$

$$\mu(x) \equiv m_1(t - \bar{t}1_a), \quad \mu(y) \equiv m_2(t - \bar{t}1_a), \quad \mu(z) \equiv m_3(t - \bar{t}1_a)$$

である，また  $X(i)$  はつきのような  $a \times 3$  行列である。

$$X(i) \equiv [x(i), y(i), z(i)]$$

[illegible]

である。

ここで  $X(1), X(2), \dots, X(n)$ , からつくる次の  $an \times 3$  行列の構造式は次のようになる。

$$[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a & \mathbf{1}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_a & \mathbf{0} & \mathbf{1}_a & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1(t - \bar{t}\mathbf{1}_a), & m_2(t - \bar{t}\mathbf{1}_a), & m_3(t - \bar{t}\mathbf{1}_a) \\ R_x(1), & R_y(1), & R_z(1), \\ R_x(2), & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x(n), & R_y(n), & R_z(n) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} E(1) \\ E(2) \\ \vdots \\ E(n) \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon[E(i)] = \underset{a \times 3}{0} \quad E(i) \perp$$

$$V(E_i) = \begin{bmatrix} E(x), & \sigma_{12}I_a, & \sigma_{13}I_a \\ \sigma_{21}I_a, & E(y), & \sigma_{23}I_a \\ \sigma_{31}I_a, & \sigma_{32}I_a, & E(z) \end{bmatrix}$$

こゝで  $(t - \bar{t}1_a)'1_a = 0$  であるから Th4 のベクトル  $c$  として

$$c = (t - \bar{t} \mathbf{1}_a)$$

とすると帰無仮説  $H_c$  は,

$$c'\mu(x)=\|t-\bar{t}1_a\|^2, m_1=0, \quad c'\mu(y)=\|t-\bar{t}1_a\|^2, m_2=0, \quad c'\mu(z)=\|t-\bar{t}1_a\|^2, m_3=0$$

となり、これは

$$Hc : m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

と equivalent である。よって, Th 4 より,

$$\frac{|P_s(c^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}))|}{|P_s(c^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})) + P\hat{c}^{(2)}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})|} \sim \Lambda(3|1|n), \text{ (Hc が真のとき)}$$

こゝに  $s(C^-)$ ,  $\bar{c}$  はつぎのようにして作る

$$s \begin{bmatrix} t - \bar{t}1_a & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & t - \bar{t}1_a, & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots & t - \bar{t}1_a \end{bmatrix} =_s \begin{bmatrix} t - \bar{t}1_a \\ \vdots \\ (\bar{c}) \\ \vdots \\ t - \bar{t}1_a \end{bmatrix} \quad C^- =_s (\bar{c}) \oplus s(C^-)$$

§ 4.  $c_i'\mu(x)=c_i'\mu(y)=c_i'\mu(z)=0$ , (ただし  $c_i'1_a=0$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ ) の同時検定について。

ここに述べる定理は§ 1 の Th 3 の拡張である。Th 3 が, “ $c_i'\mu(x)=0$ ,  $i=1, 2, \dots, r$  の仮定検定” で ANOVA-CASE なら, 本題は,  $\mu(x)$  についてのみならず,  $\mu(y)$ ,  $\mu(z)$  についても “ $c_i'\mu(x)=c_i'\mu(y)=c_i'\mu(z)=0$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ , の仮説検定” を行うもので, MANOVA-CASE への拡張である。さて第  $k$  対象につき  $(X, Y, Z)$  を  $a$  回連続して観測し出来る  $a \times 3$  行列  $X(k)$  の分布については § 3 の (3.1)(3.2) で述べたとうりとし,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  とその構造式も (3.3) の形とする。

更に, 特殊に見えるが, 繰返し実験とか, 分割法実験がそうであるので, つぎの条件をおく。

$E(x)$ ,  $E(y)$ ,  $E(z)$  の行列が相似で, 固有ベクトル  $1_a$  (固有根は  $E(x)1=k_11$ ,  $E(y)1=k_21$ ,  $E(z)1=k_31$  なる  $k_1, k_2, k_3$ ) と, 他の固有根  $\lambda(x)$ ,  $\lambda(y)$ ,  $\lambda(z)$  が共に  $r$  重根で, 対応する固有ベクトル空間  $S[\lambda(x)]$ ,  $S[\lambda(y)]$ ,  $S[\lambda(z)]$  は,

$$S[\lambda(x)]=S[\lambda(y)]=S[\lambda(z)]=S_\lambda, \dim S_\lambda=r \quad \dots\dots(4.1)$$

とする。もちろん  $S_\lambda \subset R^a$  である。

$S_\lambda$  の中に  $r$  個の直交ベクトル  $c_1, c_2, \dots, c_r$  がとれて, これから, § 1 の図 1 から分かるように

$$\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_r, C_1^-, C_2^-, \dots, C_r^-,$$

を作る, § 3 で見たように,  $P_{c_i}\bar{x}$ ,  $P_{c_i}\bar{y}$ ,  $P_{c_i}\bar{z}$  の分布はつぎのようになる。

$$\left[ \begin{array}{l} \langle P\bar{c}_i\bar{x} \rangle = u_i, \langle P\bar{c}_i\bar{y} \rangle = v_i, \langle P\bar{c}_i\bar{z} \rangle = w_i \\ \dots\dots\dots \\ P_s(c_i^-)\bar{x} = u_{(i)}, P_s(c_i^-)\bar{y} = v_{(i)}, P_s(c_i^-)\bar{z} = w_{(i)} \end{array} \right] \text{の分布は,}$$

$$\text{第1行のベクトルの分布は} \sim N_3 \left[ \begin{pmatrix} k_i c_i' \mu(x) \\ k_i c_i' \mu(y) \\ k_i c_i' \mu(z) \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^* & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}^* \end{bmatrix} \equiv \Sigma^* \right]$$

$$\text{他の行ベクトルの分布は} \sim N_3[0, \Sigma^*]$$

$$\text{各列ベクトルの分布は}$$

第1列ベクトル	第2列ベクトル	第3列ベクトル
$\left\{ \begin{array}{c} N_n \left[ \begin{pmatrix} k_i c_i' \mu(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_{11}^* I_n \right]$	$\left\{ \begin{array}{c} N_n \left[ \begin{pmatrix} k_i c_i' \mu(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_{22}^* I_n \right]$	$\left\{ \begin{array}{c} N_n \left[ \begin{pmatrix} k_i c_i' \mu(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_{33}^* I_n \right]$

ここに,  $k_i = \sqrt{n} / \|c_i\|$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, r$  である。

よって

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} u(i)' \\ v(i)' \\ w(i)' \end{bmatrix} [u(i), v(i), w(i)] \sim W_3(n-1, \Sigma^*) \quad \dots\dots(4.2)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} [u_i, v_i, w_i] \sim W_3^*(1, \Sigma^*), \text{ noncentral parameters} \quad \dots\dots(4.3)$$

は  $k_i c_i' \mu(x)$ ,  $k_i c_i' \mu(y)$ ,  $k_i c_i' \mu(z)$  である。

また, 先述の研究紀要 25 号で示してあるように

$$A_i \perp, B_i \perp, A_i \perp B_i \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

よって、よく知られているように、

$$A_1 + A_2 + \dots + A_r \sim W_3[r(n-1), \Sigma^*] \quad \dots (4.4)$$

$$B_1 + B_2 + \dots + B_r \sim W_3^*(r, \Sigma^*) \quad \dots (4.5)$$

$$\Sigma A_i \perp \Sigma B_i \quad \dots (4.6)$$

ここに (4.5) の noncentral parameters は  $k_i c_i' \mu(x)$ ,  $k_i c_i' \mu(y)$ ,  $k_i c_i \mu(z)$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) の  $3r$  個の値である、よって

**Th 5.**

$$\left. \begin{aligned} H; c_1' \mu(x) = c_1' \mu(y) = c_1' \mu(z) = 0 \\ c_2' \mu(x) = c_2' \mu(y) = c_2' \mu(z) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ c_r' \mu(x) = c_r' \mu(y) = c_r' \mu(z) = 0 \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} S(c_1, c_2, \dots, c_r) \equiv S_\lambda \\ S_\lambda \perp \mu(x) \\ S_\lambda \perp \mu(y) \\ S_\lambda \perp \mu(z) \end{cases}$$

が真のときは、

$$\frac{|\sum_{i=1}^r A_i|}{|\sum_{i=1}^r A_i + \sum_{i=1}^r B_i|} \sim \Lambda(3|r| r(n-1) + r = nr) \quad \dots (4.7)$$

また明らかに

$$\begin{aligned} \Sigma A_i &= P_s(c_1^-, c_2^-, \dots, c_r^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] \\ \Sigma A_i + \Sigma B_i &= P_s(c^-, c_2^-, \dots, c_r^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] + P_s(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_r)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] \\ &= P_s(c_1, c_2, \dots, c_r)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] \end{aligned}$$

より (4.7) は、

$$\frac{|P_s(c_1^-, c_2^-, \dots, c_r^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]|}{|P_s(c_1^-, c_2^-, \dots, c_r^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]|} \sim \Lambda(3|r| nr) \quad \dots (4.8)$$

A, B の計算法を示そう。明らかに次式が成立する。

$$P_s(c_i)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] = P \hat{c}_i^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] + P_s(c_i^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]. \quad \dots (4.9)$$

$$P_s(c_i)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] = \begin{bmatrix} \|P_s(c_i) \hat{x}\|^2, & (P_s(c_i) \hat{x})'(P_s(c_i) \hat{y}), & (P_s(c_i) \hat{x})'(P_s(c_i) \hat{z}) \\ \parallel & \|P_s(c_i) \hat{y}\|^2, & (P_s(c_i) \hat{y})'(P_s(c_i) \hat{z}) \\ & \text{(対称行列)} & \\ \parallel & \parallel & \|P_s(c_i) \hat{z}\|^2 \end{bmatrix} \quad \dots (4.10)$$

で行列の element は、ベクトルの座標変更について不変であるから

$$(P_s(c_i) \hat{x})' = (P \hat{x}, P \hat{x}, \dots, P \hat{x}) = \frac{1}{\|c_i\|} [c_i' x_1, c_i' x_2, \dots, c_i' x_n]$$

$$\begin{bmatrix} c_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ c_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_i \end{bmatrix}$$

$$(P_s(c_i) \hat{y})' = \frac{1}{\|c_i\|} [c_i' y_1, c_i' y_2, \dots, c_i' y_n]$$

$$(P_s(c_i) \hat{z})' = \frac{1}{\|c_i\|} [c_i' z_1, c_i' z_2, \dots, c_i' z_n]$$

とし (4.10) を計算するとよい、(4.9) の右辺第 1 項も次を使って求める。

$$\langle P \hat{c}_i \hat{x} \rangle = \frac{\sum_{a=1}^n c_i' x_a}{\sqrt{n} \|c_i\|} = \frac{\sqrt{n}}{\|c_i\|} c_i' \bar{x}, \quad \langle P \hat{c}_i \hat{y} \rangle = \frac{\sqrt{n}}{\|c_i\|} c_i' \bar{y}, \quad \langle P \hat{c}_i \hat{z} \rangle = \frac{\sqrt{n}}{\|c_i\|} c_i' \bar{z}$$

また、これ等から、次の表を参考にして計算する

$P_s(c_1)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ $P_s(c_2)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ $\vdots$ $P_s(c_r)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$	=	$P \hat{c}_1^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ $P \hat{c}_2^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ $\vdots$ $P \hat{c}_r^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$	+	$P_s(c_1^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ $P_s(c_2^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ $\vdots$ $P_s(c_r^-)^{(2)}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$
$\sum A_i + \sum B_i$		$\sum A_i$		$\sum B_i$

適用例, Repeated Observation (MANOVA-CASE) の場合,

第  $i$  対象につき (X, Y, Z) にわたり  $a$  回繰り返し観測する行列を  $\{x(i), y(i), z(i)\}$   
 $= [x_i, y_i, z_i]$  とかく,  $n$  個の対象に対して行列をつぎのようにつくる。

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} = [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$$

$na \times 3$  行列  $[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$  の構造は次のようになり, 誤差行列  $[\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z]$  の分布は下  
 のような行列正規分布をするとする。

$$[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}] = \begin{bmatrix} I_a & 1_a & 0 & \cdots & 0 \\ I_a & 0 & 1_a & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_a & 0 & 0 & & 1_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu(x)\mu(y)\mu(z) \\ R(x)R(y)R(z) \end{bmatrix} + [\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z] \cdots (4.11)$$

( $na \times 3$ )

ここに

$$[\underbrace{\hat{e}_x}_{\text{共分散 } \sigma_{13}I_{na}}, \underbrace{\hat{e}_y}_{\text{共分散 } \sigma_{12}I_{na}}, \underbrace{\hat{e}_z}_{\text{共分散 } \sigma_{23}I_{na}}]$$

$$\hat{e}_x \sim N_{na}[0, \text{diag}(E(x), E(x), \cdots, E(x))]$$

$$\hat{e}_y \sim N_{na}[0, \text{diag}(E(y), E(y), \cdots, E(y))]$$

$$\hat{e}_z \sim N_{na}[0, \text{diag}(E(z), E(z), \cdots, E(z))]$$

Repeated Observation より  $E(x), E(y), E(z)$  は

$$E(x) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & & \\ & \sigma_x^2 & \rho_x \sigma_x^2 \\ & \rho_x \sigma_x^2 & \sigma_x^2 \end{bmatrix}, \quad E(y) = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & & \\ & \sigma_y^2 & \rho_y \sigma_y^2 \\ & \rho_y \sigma_y^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad E(z) = \begin{bmatrix} \sigma_z^2 & & \\ & \sigma_z^2 & \rho_z \sigma_z^2 \\ & \rho_z \sigma_z^2 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

である。また  $E(x), E(y), E(z)$  の固有根と固有ベクトル空間は,

$$E(x); \quad \lambda_1(x) = \sigma_x^2[1 + (a-1)\rho_x] \quad \lambda_2(x) = \sigma_x^2(1 - \rho_x), \quad a-1 \text{ 重根}$$

固有空間  $S(1_a)$                       固有空間  $S(1_a)^\perp$

$$\begin{array}{ll}
E(y); \lambda_1(y) = \sigma_y^2(1 + \overline{a-1}\rho_y) & \lambda_2(y) = \sigma_y^2(1 - \rho_y), \quad a-1 \text{ 重根} \\
\text{固有空間 } S(1_a) & \text{固有空間 } S(1_a)^\perp \\
E(z); \lambda_1(z) = \sigma_z^2(1 + \overline{a-1}\rho_z) & \lambda_2(z) = \sigma_z^2(1 - \rho_z) \text{ は } a-1 \text{ 重根で} \\
\text{固有空間 } S(1_a) & \text{固有空間 } S(1_a)^\perp
\end{array}$$

我々は直交配列表から  $S(1_a)^\perp$  の中で、互いに直交するベクトル

$c_1, c_2, \dots, c_{a-1}$  が得られる、これから例によって

$$S(C_i) \equiv S \begin{bmatrix} c_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_i \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c_i & \vdots \\ c_i & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ c_i & \vdots \end{bmatrix} C_i^- = S(\hat{c}_i) \oplus S(C_i^-)$$

$S(\hat{c}_i) \subset \text{Estimation Space}$ ,  $S(C_i^-) \subset \text{Error Space}$

$$\begin{aligned}
P_s(c_1^-, c_2^-, \dots, c_{a-1}^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= P_s(c_1^-) + \cdots + P_s(c_{a-1}^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\
&= \sum_{i=1}^{a-1} P_s(c_i^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})
\end{aligned}$$

しかも  $P_s(c_i^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \sim W_3(n-1, \Sigma^*)$ ,  $\perp$  (Absolutely) より

$$P_s(c_1^-, \dots, c_{a-1}^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \sim W_3[(n-1)(a-1), \Sigma^*] \quad \dots(4.12)$$

一方,  $P_{\hat{c}_i}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \sim W_3^*(1, \Sigma^*)$  (pseudo, noncentral wishart-分布),  $\perp$ ,

$$\text{より, } \sum_{i=1}^{a-1} P_{\hat{c}_i}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = P_s(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{a-1})^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \sim W_3^*(a-1, \Sigma^*)$$

$\dots(4.13)$

また明らかに

$$\begin{aligned}
&P_s(c_1, c_2, \dots, c_{a-1})^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\
&= P_s(c_1^-, c_2^-, \dots, c_{a-1}^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + P_s(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{a-1})^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad \dots(4.14) \\
&\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
&W_3[(a-1)(n-1), \Sigma^*], \qquad \qquad W_3^*(a-1, \Sigma^*)
\end{aligned}$$

(4.12)(4.13)(4.14) より,

$$\begin{aligned}
&\frac{|P_s(c_1^-, \dots, c_{a-1}^-)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})|}{|P_s(c_1, \dots, c_{a-1})^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})|} \sim \Lambda(3 | a-1 | n(a-1)) \\
&(\text{仮説 } S^\perp(1_a) \perp \mu(x), S^\perp(1_a) \perp \mu(y), S^\perp(1_a) \perp \mu(z) \text{ が真のとき})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{注 1. } S^\perp(1_a) \perp \mu(x) &\iff \mu(x) = \alpha 1_a \iff \mu_1(x) = \mu_2(x) = \cdots \mu_a(x) \\
S^\perp(1_a) \perp \mu(y) &\iff \mu(y) = \beta 1_a \quad \mu_1(y) = \mu_2(y) = \cdots = \mu_a(y) \\
S^\perp(1_a) \perp \mu(z) &\iff \mu(z) = \gamma 1_a \quad \mu_1(z) = \mu_2(z) = \cdots = \mu_a(z)
\end{aligned}$$

注 2  $P_s(c_i)^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{j=1}^n P_{\hat{c}_{ij}}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  として計算する。ここに

$$\hat{c}_{i1}' = (c_i', o', \dots, o'), \quad \hat{c}_{i2}' = (o', c_i', o' \cdots o'), \quad \dots \quad \hat{c}_{in}' = (o', o', \dots, o', c_i')$$

である。

## § 5. 系統関連表

我々は Generalized Linear Model (Variance matrix  $E > 0$ ) について本学研究紀要

23, 24, 25 号にわたって研究発表を行い, 本稿で MANOVA-CASE にまで及んだ。そこで一連の検定法の系統的発展拡張を示す定理系列とその応用例を指示して, 本稿の結びとする。

明星大学研究紀要 25 号拙著の論文の main の次の定理から出発する。

**基本定理 1<sub>A</sub>**(contrast  $c'\mu=0$  の検定問題)–(本文, Th 1)

$x \sim N_a[\mu + R_r 1_a, \Sigma]$  とし,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ; を size  $n$  の  $i, i, d$  とし,

$\hat{x} \equiv (x_1', x_2', \dots, x_n')$

$H: c'\mu=0$  (ここに  $c'1=0$  とする)

$$\frac{\|P_s(\hat{c})\hat{x}\|^2}{\|P_s(c^-)\hat{x}\|^2/n-1} \sim F_{n-1}^1(\text{under } H \text{ is true}),$$

$$S(c) = S \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & & \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & c \end{bmatrix} = S(\hat{c}) \oplus S(c^{-1}).$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline S(I_{na}) & S \begin{bmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} = S(\hat{c}) \\ \hline S(B^-) & S(C^-) \\ \hline \end{array}$$

この基本定理の適用例として,

宇喜多, 小野: “Generalized Linear Model の場合の F-検定法の応用” 明星大学研究紀要一第 25 号で見るように, 「 $x$  が  $t$  の 1 次回帰で,  $V(x)=\Sigma>0$  のとき, 回帰係数  $m=0$  の検定について」, 上の定理を使っている。

また, Y. Ukita, K. Noda “The Fundamental Theorem of The Testing Problem For The Null Hypothesis contrast  $c'\mu=0$ , And Its Application to the Regression Theorem” Japan-China Symposium on Statistics 1989, Abstract. にみるように,  $x$  が  $t_1, t_2$ , 2 変量の 1 次回帰で,  $V(x)=\Sigma>0$  のときの  $t_1$  の回帰係数  $m_1$ ,  $t_2$  の回帰係数  $m_2$  につき,

$H_1: m_1=0$  の検定法,

$H_2: m_2=0$  の検定法

に基本定理 1<sub>A</sub> が応用される。

**基本定理 2<sub>1A</sub>**( $r$  個の独立な contrast,  $c_1'\mu=c_2'\mu=\dots=c_r'\mu=0$  の検定問題), (本文 Th 2.)

$H_r: c_1'\mu=\dots=c_r'\mu=0$  ( $c_i'1_a=0$   $i=1, 2, \dots, r$  とする) の検定に,

$y=c'x \rightarrow x=x_1, x_2, \dots, x_n$  に対応する  $y_1, y_2, \dots, y_n$  で

$(n-1)n\bar{y}'S_{yy}^{-1}\bar{y} \sim t_{n-1}^2(r)$  ( $H_r$  が真のとき)

基本定理 2<sub>1A</sub> は §1 でも述べてあるが, この基本定理の特殊な場合で,  $\Sigma$  の固有根  $k$  と対応する固有ベクトル  $1_a$  の外に,  $r$  重根の固有根  $\lambda$  とこれに対応する固有空間が  $S(\lambda)=S(c_1, c_2, \dots, c_r)$  であるとき,

**基本定理 2<sub>2A</sub>**(固有ベクトル  $c_1, \dots, c_r$  による  $c_i'\mu=0, i=2, \dots, r$ ), (本文 Th 3.)

$H_r: C'\mu=0$  (ここに  $C=[c_1, c_2, \dots, c_r]$ ) の検定には

$$\frac{\|P_s(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_r)\hat{x}\|^2/r}{\|P_s(c_1^-, c_2^-, \dots, c_r^-)\hat{x}\|^2/r(n-1)} \sim F_{r(n-1)}^r(H_r \text{ が真のときのみ})$$

この定理の適用例は

宇喜多義昌, “The Decomposition of The principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The linear Model” 東京理科大学専攻科雑誌 5-1(1984)。

宇喜多, 小野 “Generalized Linear Model の場合の仮説検定について” 明星大学研究紀要—第 24 号の両論文で詳しく述べ, 特に Split Plot Design の場合の分散分析に, また,  $x$  が,  $x$  の単純な  $a$  回の繰返し観測から得られるベクトルのときの分散分析に基本定理  $2_{2A}$  を応用してある。

基本定理  $I_A$  を MANOVA-CASE に拡張したのが, 本文 § 3 に述べてある Th 4 で,  $\hat{X} \equiv [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$  とすると,

基本定理  $1_M$ ,  $c'[\mu(x), \mu(y), \mu(z)] = (0, 0, 0)$  の検定には,

$$\frac{|P_s(c)^{(2)}\hat{X}|}{|P_s(c)^{(2)}\hat{X}|} \sim \Lambda(3 | 1 | n) \text{ (仮説が真のとき)}$$

この適用例は本文 § 3 の後半に述べてある。すなわち,  $[x, y, z]$  が, 本文 § 3 にあるように, 共に  $t$  の 1 次回帰のとき, 各回帰係数  $m_x, m_y, m_z$  について, “仮説,  $m_x = m_y = m_z = 0$  の同時検定” に応用される。

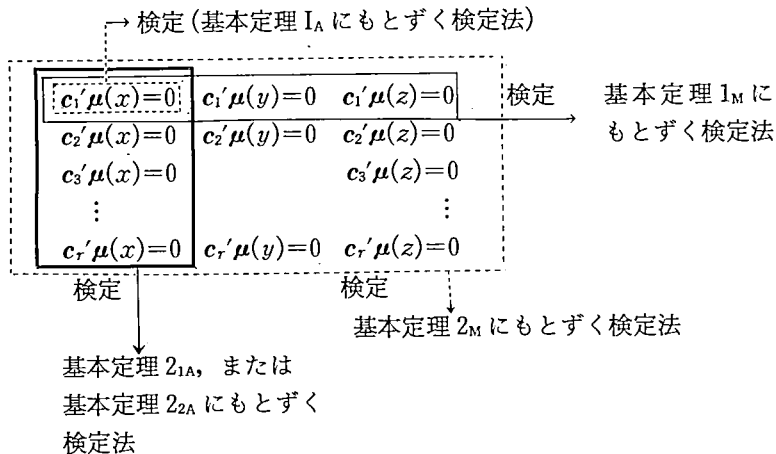
また  $E(x) = E_1, E(y) = E_2, E(z) = E_3$  とし各  $E_1, E_2, E_3$  の固有根  $\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \lambda_{o3}$  に対応する固有ベクトルが  $1_a$  で,  $E_1, E_2, E_3$  の他の固有根  $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}$  が  $r$  重根で, 全く同一の固有ベクトル空間  $S(c_1, \dots, c_r)$ ,  $c_i$  が互いに直交のとき, 基本定理  $2_{2A}, I_M$  の拡張としてつぎの基本定理  $2_M$  を得る。

基本定理  $2_M$   $H: C'[\mu(x), \mu(y), \mu(z)] = 0_{y \times 3}$  の検定に

$$\frac{|P_s^{(2)}(c_1^-, c_2^-, \dots, c_r^-)[\hat{X}]|}{|P_s^{(2)}(c_1, c_2, \dots, c_r)[\hat{X}]|} \sim \Lambda(3 | r | rn)$$

この適用例は本文 § 4 の適用例, Repeated Observation の場合として述べてある。

これを帰無仮説の立場から分類すると次のような表になる。



ただし, 上の  $c_i' (i=1, 2, \dots, r)$  は  $c_i'1_a=0$  で,  $2_{2A}, 2_M$  の場合は  $S(c_1, c_2, \dots, c_r)$  は  $E$  の固有根  $\lambda$  ( $r$  重根) に対応する。固有ベクトル空間で,  $S(c_1, c_2, \dots, c_r) \perp 1_a$  とする。



## 引用図書

- (1) S. F. Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.
- (2) A. M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.
- (3) T. W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.
- (4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版。
- (5) 宇喜多義昌 (1988), 多変量統計解析,  $\|P_s x\|^2$  とその分布の研究, 序説—明星大学出版部。
- (6) 宇喜多義昌 (1987), 多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部。

## 引用論文

- (1) Y. Ukita (1976), Hypothesis Spaces and Decomposition of Sum of Squares in Linear Models (Ogawa Volume).
- (2) 宇喜多義昌 (1980),  $\langle P_s x \rangle \|P_s x^2\|$  の分布と応用について (東京理科大学・理学専攻科雑誌, No. 1, Vol. 1)。
- (3) 宇喜多義昌, 外 2 名 (1981),  $\|F_{s_1} x\|^2 / \|P_{s_2} x\|^2$  の分布に関する定理 (東京理科大学, 理学専攻科雑誌, No. 1, Vol. 2)。
- (4) Y. Ukita (1982), On a Geometrical Meaning of  $A_{22,1}$  and its Distribution (Tensor, N. S. Vol. 39).
- (5) 宇喜多義昌 (1982, Basic 数学, No. 10 ~ No. 12, 1983) 統計的実験の計画と, 実験データの解析 (I, II, III, IV)。
- (6) 日本数学会研究発表アブストラクト (統計数学), 1985 年, 秋季大会 (富山大学), 1986 年春季大会 (京都大学)。
- (7) 宇喜多義昌: 行列正規分布とその応用・明星大学研究紀要 (理工学部)。1987
- (8) Y. Ukita & K. Noda: About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manava (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1987.
- (9) Y. Ukita & K. Noda: Testing Hypotheses on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI 46 th Contributed Papers) 1987.
- (10) 宇喜多義昌・小野英夫: Generalized linear Model の場合の仮説検定について, 明星大学研究紀要—理工学部, 1988(第 24 号)
- (11) 宇喜多義昌・小野英夫: Generalized Linear Model の場合の F 一検定法の応用, 明星大学研究紀要—理工学部 1989(第 25 号)
- (12) 宇喜多義昌: Generalized Linear Model の場合の仮説検定について (II), 明星大学研究紀要—理工学部 1989(第 25 号)
- (13) Y. Ukita "The Decomposition of The Principal Space and Its Application to The Analysis of Variance on The Linear Model. (東京理科大学理学専攻科雑誌. No1, Vol 5, 1984.
- (14) Y. Ukita, K. Noda "The Fundamental Theorem of Testing Problem for The Null Hypothesis contrast  $c'\mu=0$ , And Its Application to The Regression Theorem" (Japan China Symposium on Statistics) 1989.