Generalized Linear Model の場合の F-検定法の応用

宇喜多　義　昌*・小　野　英　夫**

§1. Summary

明星大学研究紀要-理工学部-第 24 号と本紀要第 25 号とで，「Generalized Linear Model の場合の仮説検定について」「同名 (II)」で宇喜多，小野は，$\mathbf{X}\sim N_a\left(\boldsymbol{m}=\sum_{i=1}^{a}\boldsymbol{a}_i\mu_i+R\boldsymbol{1}_a,\ \Xi\right)$ のサイズ n の無作為標本 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n$ によって，仮説 (H)，$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$（ただし $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1}_a=0$）についての F-検定統計量を求めた。そのうち

（1） $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1}_a=0$ である任意に定められた a 次元ベクトルのとき，仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ の検定法。

（2） $\boldsymbol{c}$ は Ξ の固有根 λ に対応する固有ベクトルで，かつ $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1}_a=0$，とした場合の仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ の検定法。

を述べてある。第 24 号の小文では（1）の場合の適用例を 1 題，（2）の場合の適用例を 4 題しめしてある。

本小文では，（1）の場合の適用例として，第 2，第 3 節で同一対象の追跡調査による回帰問題解明を，第 4 節は Ξ が 5×5 の正値対称行列の場合を取扱い，実験データにより仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ の検定を行う。

§2. 直線回帰 $Y=a+mx+E$ の方向係数 $m=0$ の検定

観測値 $(x,\ Y)$ があり x は $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a$ の値をとる，$x=x_i$ のときの $(x_i,\ Y_i)$ の Y_i は普通一定値でなくて，その構造式は，

$$Y_i=a+mx_i+E_i=m(x_i-\overline{x})+b+E_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ a \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

と見る。ここで誤差変動 E_i につき次の仮定をおくのが普通である。

（i） $E_i\sim N(0,\ \sigma^2)$，σ^2：未知，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ a$

（ii） E_i Ш

したがって，$\mathbf{Y}'=(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_a)$ とすると，次の分布をなす。

$$\mathbf{Y}\sim N_a(m(\boldsymbol{x}-\overline{x}\,\boldsymbol{1})+b\boldsymbol{1}_a \qquad \sigma^2 I_a)$$

このとき，回帰係数 $m=0$ の仮説検定法はよく知られている。

しかし，同一対象を追跡観測し，$(x_1,\ y_1)\cdots$，$(x_a,\ y_a)$ が得られるならば，(2.1) の構造式は修正して

$$Y_i=m(x_i-\overline{x})+b+r+E_i,\quad r：対象固有の効果。$$

---

*，**　一般教養教授　数学

(i)° $E_i \sim N(0,\ \sigma_{ii} \equiv \sigma_i^2)$, σ_i^2：未知, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ a.$,

(ii)° E_i は独立といえず, $\mathrm{cov}(E_i,\ E_j)=\sigma_{ij}$, $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ a,\ i \neq j$, とみるのが妥当である。したがって

$$\mathbf{Y} \sim N_a(m(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})+(b+r)\boldsymbol{1},\ \Xi=(\sigma_{ij}))$$

と見られる。本節では, この条件下で,

我々は n 個の対象につき, 系統的に $x=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_a$ での対応する $Y_1 \cdots Y_a$ を調べることにより, 回帰係数 m につき, 仮説 $m=0$ 検定法と, m に対する区間推定を研究する。

i 対象に対して, $\mathbf{Y}_i$ とすると, $\mathbf{Y}_i \sim N_a(m(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})+(b+r_i)\boldsymbol{1},\ \Xi)$ で, 無作為に抽出される n ケの対象の $\mathbf{Y}_1,\ \mathbf{Y}_2,\ \cdots,\ \mathbf{Y}_n$ は互に独立と見てよい。したがって,

$\hat{\mathbf{Y}}' \equiv (\mathbf{Y}_1',\ \mathbf{Y}_2',\ \cdots,\ \mathbf{Y}_n')$, $b+r_i \equiv \rho_i$, とすると, $\hat{\mathbf{Y}}$ の構造式は

$$\hat{\mathbf{Y}}=\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_n\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a, & \boldsymbol{1}_a & 0 & \cdots & 0\\ \boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a, & 0 & \boldsymbol{1}_a & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\,(\mathrm{B}) & & \vdots\\ \boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a, & 0 & 0 & & \boldsymbol{1}_a\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow\\ \hat{\boldsymbol{d}} & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{array}\end{array}\begin{pmatrix}m\\ \rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_n\end{pmatrix}+\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{E}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\ \uparrow\\ \hat{\boldsymbol{E}}\end{array}=\hat{\boldsymbol{m}}+\hat{\boldsymbol{E}}, \qquad \cdots\cdots(2.\ 1)$$

で, $\hat{\boldsymbol{m}}$ は $\hat{\mathbf{Y}}$ の平均ベクトルで, $\hat{\boldsymbol{E}}$ は $\hat{\mathbf{Y}}$ の誤差ベクトルである。また $V[\hat{\mathbf{Y}}]=V(\hat{\boldsymbol{E}})=diag(\Xi,\ \Xi,\ \cdots,\ \Xi)$ であるから $\hat{\mathbf{Y}}$ は Generalized Linear Model をなす。また $\hat{\mathbf{Y}}$ の分布は

$$\hat{\mathbf{Y}} \sim N_{na}(\hat{\boldsymbol{m}},\ diag(\Xi,\ \Xi,\ \cdots,\ \Xi)) \qquad \cdots\cdots(2.\ 2)$$

である。

推定空間：$S(\hat{\boldsymbol{d}},\ \overbrace{\boldsymbol{b}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n}^{\mathrm{B}})=S(\hat{\boldsymbol{d}})\oplus S(\boldsymbol{1}_{na})\oplus S(B^-)$

誤差空間：$S^{\perp}(\hat{\boldsymbol{d}},\ B)$, $dim S^{\perp}(\hat{\boldsymbol{d}},\ B)=na-(n+1)$,

いま検定方式(1), すなわち, $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1}_a=0$ なる任意に固定されたベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して, 仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ の検定として, いま特に $\boldsymbol{c}$ とし $(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a)$ を選ぶと, $(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a)'\boldsymbol{1}_a=0$ となり, 仮説 H は $(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a)'\cdot m(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a)=0$ で, これは $m=0$ と同値である。

$\because\ \ (\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a)'m(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a)=0 \longleftrightarrow m\cdot\|\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}_a\|^2=0 \longleftrightarrow m=0$

よって, $\boldsymbol{d}\equiv(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})$ としてつぎのように $S(D)$ をつくると

$$S(D)\equiv S\begin{pmatrix}\boldsymbol{d} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\boldsymbol{d} & \\ \boldsymbol{d} & \\ \vdots & D^-\\ \boldsymbol{d} & \end{pmatrix}=S(\hat{\boldsymbol{d}})\oplus S(D^-) \qquad \cdots\cdots(2.\ 3)$$

$S(D)$ は (2. 3) のように分解出来て, 次の関係が成立する。

$$S(\hat{\boldsymbol{d}})\subset S(\hat{\boldsymbol{d}},\ B),\ \ S(D^-)\subset S^{\perp}(\hat{\boldsymbol{d}},\ B),\ \ dim S(D^-)=n-1 \qquad \cdots\cdots(2.\ 4)$$

また, $\langle P_{\hat{d}}\hat{\mathbf{Y}}\rangle=\boldsymbol{e}(\hat{\boldsymbol{d}})'\hat{\mathbf{Y}}=\dfrac{\hat{\boldsymbol{d}}'}{\sqrt{n}\,\|\boldsymbol{d}\|}\hat{\mathbf{Y}} \sim N_1[m\sqrt{n}\,\|\boldsymbol{d}\|,\ \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{d})\Xi\boldsymbol{e}(\boldsymbol{d})]$

$\longrightarrow \| P_{\hat{d}} \hat{\mathbf{Y}} \|^2 \sim e(\boldsymbol{d})' \Xi e(\boldsymbol{d}) \cdot \chi'^2_1 [2\lambda = m^2 n \| \boldsymbol{d} \|^2]$ ……(2.4)

一方，$\| P_{S(D^-)} \hat{\mathbf{Y}} \|^2 \sim e(\boldsymbol{d})' \Xi e(\boldsymbol{d}) \cdot \chi^2_{n-1}$(absolutely) ……(2.5)

$\| P_{\hat{d}} \hat{\mathbf{Y}} \|^2 \perp\!\!\!\perp \| P_{S(D^-)} \hat{\mathbf{Y}} \|^2$ ……(2.6)

よって，回帰係数 m につきつぎのように検定する。

$H : m=0 \rightleftarrows (\boldsymbol{x}-\overline{x}\,\boldsymbol{1}_a)' m (\boldsymbol{x}-\overline{x}\,\boldsymbol{1}_a) = m \| \boldsymbol{x}-\overline{x}\,\boldsymbol{1}_a \|^2 = 0$ に対し

$$\frac{\| P_{\hat{d}} \hat{\mathbf{Y}} \|^2}{\| P_{S(D^-)} \hat{\mathbf{Y}} \|^2 / n-1} \sim F_{n-1}{}^1 (\text{under } m=0 \text{ is true})$$

注　(2.1)の構造模形のときの誤差空間を調べる。

誤差空間 $S^{\perp}(\hat{\boldsymbol{d}}, B) = S(D^-) \oplus S(H)$ となる。この $S(H)$ はどんなベクトル空間か調べる。まず次元は

(i) $dim S(H) = n(a-2)$

(ii) $\boldsymbol{d}'\boldsymbol{z}=0$，$\boldsymbol{1}'\boldsymbol{z}=0$ を満足する $\boldsymbol{z}$ の張る空間は $a-2$ 次元ベクトル空間で，直交基底ベクトル $\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，…，$\boldsymbol{d}_{a-2}$ がとれる。これらから

$$S(D_i) \equiv S \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_i & \boldsymbol{0} \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d}_i & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \cdots & \boldsymbol{d}_i \end{pmatrix}。\qquad i=1, 2, \cdots, a-2,$$

なる空間 $S(D_i)$ は，まず $dim S(D_i)=n$ であり，かつ，明かに，$S(D_1)$，$S(D_2)$，…，$S(D_{a-2})$ は互に直交していることが分る。また，$S(D_i) \subset S^{\perp}(\hat{\boldsymbol{d}}, B)$ なることも次の計算

$$(\boldsymbol{0}' \cdots \boldsymbol{0}', \boldsymbol{d}_i', \boldsymbol{0}', \cdots, \boldsymbol{0}')\hat{\boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{0}', \cdots, \boldsymbol{0}', \boldsymbol{d}_i', \boldsymbol{0}' \cdots \boldsymbol{0}')\boldsymbol{b}_j = 0$$

$i=1, 2, \cdots, a-2$, $j=1, 2, \cdots, n$,　　から分る。

また $S(D_i) \perp S(D)$ より $S(D_i) \perp S(D^-)$ である。以上のこのことから

$$S(H) = S(D_1) \oplus S(D_2) \oplus \cdots \oplus S(D_{a-2})$$

であることを知る。これを図示したのが図1である。

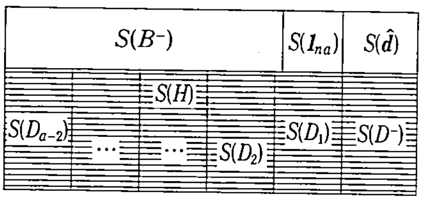

図　1

なお(2.4)，(2.5)，(2.6)から，回帰係数 m の区間推定が行える。それは，

$$\left\{ \frac{\hat{\boldsymbol{d}}'\hat{\mathbf{Y}}}{\sqrt{n}\,\| \boldsymbol{d} \|} - m\sqrt{n}\,\| \boldsymbol{d} \| \right\} \sim N(0, e'(\boldsymbol{d}) \Xi e(\boldsymbol{d})),\ ((2.4) より)$$

と(2.5)，(2.6)を併せ考えて

$$\frac{\langle P_{\hat{d}}\hat{\mathbf{Y}}\rangle - m\sqrt{n}\,\|\boldsymbol{d}\|}{\sqrt{\dfrac{\|P_{S(D^-)}\hat{\mathbf{Y}}\|^2}{n-1}}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\,\|\boldsymbol{d}\|}\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})'\mathbf{Y}_i\right] - m\sqrt{n}\,\|\boldsymbol{d}\|}{\sqrt{\dfrac{\sum\{(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})'\mathbf{Y}_i\}^2}{\|\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}\|^2}\cdots\dfrac{\{\sum(\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})'\mathbf{Y}_i\}^2}{n\,\|\boldsymbol{x}-x\,\boldsymbol{1}\|^2}}}\sqrt{n-1}$$

いま，$\|\boldsymbol{d}\| = \sqrt{\|\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1}\|^2}$ で，$Z_i \equiv (\boldsymbol{x}-\bar{x}\,\boldsymbol{1})'\mathbf{Y}_i$，$i=1, 2, \cdots, n$ とすると

$$= \frac{(\sum Z_i - mn\sum(x_i-\bar{x})^2)}{\sqrt{\sum Z_i^2 - \dfrac{(\sum Z_i)^2}{n}}}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$\sim t_{n-1}$ (自由度 $n-1$ の t-分布をなす)

よって

$$\left|\frac{\sum Z_i - mn\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sqrt{\sum Z_i^2 - \dfrac{(\sum Z_i)^2}{n}}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right| < t_{n-1,1-\alpha}$$

の不等式から m につき信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間をうる。

§ 3. 直交多項式回帰問題 x の次数決定問題

観測値 (x, Y) があり x は $x_1, x_2, \cdots, x_a$ の値をとる。$x=x_i$ のときの (x_i, Y_i) の Y_i の構造式が，つぎの形とする。

$$Y_i = a_0 + a_1P_1(x_i) + \cdots + a_kP_k(x_i) + E_i \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

ここで，$P_\alpha(x)$ は次の関係をみたす α 次の直交多項式である。

$$\sum_{i=1}^{a} P_\alpha(x_i)P_\beta(x_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{a} P_\alpha(x_i)=0 \quad \alpha\neq\beta,\ \alpha,\ \beta=1, 2, \cdots k, \qquad \cdots\cdots(3.2)$$

このとき $(E_1, E_2, \cdots, E_a)=\boldsymbol{E}'$ は誤差ベクトルであるが，普通 $\boldsymbol{E}$ の分散共分散行列 $V(\boldsymbol{E})=\sigma^2 I_a$ として，仮説 $a_k=0$ の検定や，a_k の区間推定が行われている。しかし§2 でも述べたように，同一対象の $x_1, x_2 \cdots x_a$ に対応する $Y_1, Y_2 \cdots Y_a$ のときは (3.1) の構造式でも，$\boldsymbol{E}$ の $V(\boldsymbol{E})$ は

$$V(\boldsymbol{E}) = \Xi > 0 \qquad \cdots\cdots(3.3)$$

と見るべきである。本節では n 個の対象につき x については $x_1, x_2, \cdots, x_a$ に対応する $Y_1, Y_2, \cdots, Y_a$ を調べて，$a_k=0$ の検定，ついで $a_k=0$ のときの $a_{k-1}=0$ の検定等を研究する。第 l 対象について $Y_1(l), Y_2(l), \cdots, Y_a(l)$ を a 次元ベクトル $\mathbf{Y}_l$ とする

$$\mathbf{Y}_l' \equiv [\,Y_1(l),\ Y_2(l),\ \cdots,\ Y_a(l)\,] \quad l=1, 2, \cdots, n$$

$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \cdots, \mathbf{Y}_n$ は $\mathbf{Y}\sim N_a[(a_0+R)\boldsymbol{1}+a_1\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})+\cdots+a_k\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{x}),\ diag(\Xi)]$

$$\cdots\cdots(3.4)$$

の無作為標本ベクトルとみられる。(3.4) で $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x})$ とは，

$$\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{x})' = (P_i(x_1),\ P_i(x_2),\ \cdots,\ P_i(x_a)),\quad i=1, 2, \cdots, k$$

で，R は調査対象個体による個体効果で，l 対象について $a_0+R_l\equiv\rho_l$，$l=1, 2, \cdots, n$ とする。これから

$$\mathbf{Y}_l = \rho_l\boldsymbol{1} + a_1\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{x}) + \cdots + a_k\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}_l,\quad \boldsymbol{E}_l\sim N_a(\boldsymbol{0},\ \Xi),\quad \boldsymbol{E}_l ⫫$$

とみて良い。

$\hat{\mathbf{Y}}' \equiv (\mathbf{Y}_1', \mathbf{Y}_2', \cdots, \mathbf{Y}_n')$ とすると

$$\hat{Y}=\begin{pmatrix} Y_1\\ Y_2\\ Y_3\\ \vdots\\ Y_n \end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} P_1(x)\cdots P_k(x) & 1_a & 0 & \cdots & 0\\ P_1(x)\quad\ \vdots & 0 & 1_a & \cdots & 0\\ \vdots\qquad\quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots\qquad\quad \vdots & \vdots & & (B) & \vdots\\ P_1(x)\cdots P_k(x) & 0 & 0 & \cdots & 1_a \end{pmatrix}\\ \uparrow\quad\ \uparrow\qquad\ \uparrow\quad \uparrow\cdots\uparrow\\ \hat{c}_1\cdots\hat{c}_k\qquad b_1\quad b_2\quad b_n\end{array}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_k\\ \rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_n \end{pmatrix}+\begin{array}{c}\begin{pmatrix} E_1\\ E_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \\ \\ E_n \end{pmatrix}\\ \uparrow\\ \hat{E}\end{array} \quad\cdots\cdots(3.4)$$

$$=\hat{m}+\hat{E}$$

で $\hat{Y}$ の分布は

$$\hat{Y}\sim N_{na}(\hat{m},\ diag(\Xi,\ \Xi,\ \cdots,\ \Xi))$$

であり，$\hat{Y}$ は Generalized Linear Model で，正規分布である。

推定空間，誤差空間について調べると

推定空間 $S(\hat{c}_1,\ \hat{c}_2,\ \cdots\hat{c}_k,\ b_1\cdots b_n)=S(\hat{c}_1)\oplus\cdots\oplus S(\hat{c}_k)\oplus S(1_{na})\oplus S(B^-)$

誤差空間 $S^{\perp}(\hat{c}_1,\ \cdots\ \hat{c}_k,\ B)=S(C_1^-)\oplus S(C_2^-)\oplus\cdots\oplus S(C_k^-)\oplus S(H)$,

$dimS(H)=na-(n+k)-k(n-1)=n(a-k-1)$ である。これを図示すると図 2 のようになる。

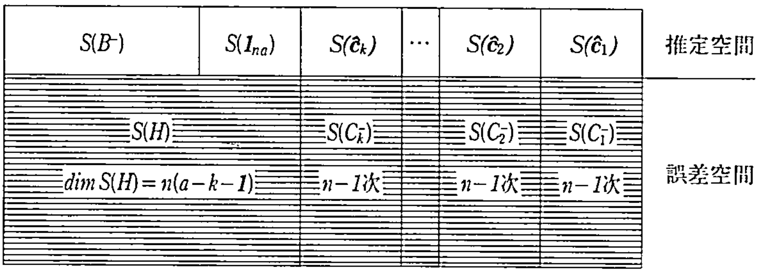

図　2

$P_k(x)'1=0$ であるから，検定方式 I に従って，仮説

$P_k''(x)[a_1P_1(x)+a_2P_2(x)+\cdots+a_kP_k(x)]=0 \rightleftarrows a_k\|P_k(x)\|^2=0 \rightleftarrows a_k=0$

が検定出来る。すなわち

$$\langle P_{\hat{c}_k}\hat{Y}\rangle\sim N_1(\sqrt{n}\,\|P_k(x)\|\,a_k,\ \ e[P_k(x)]'\Xi e[P_k(x)]) \quad\cdots\cdots(3.5)$$

$$\|P_{S(C_k^-)}\hat{Y}\|^2\sim e[P_k(x)]'\Xi e[P_k(x)]\cdot\chi^2_{n-1}\quad \text{(absolutely)} \quad\cdots\cdots(3.6)$$

$$\langle P_{\hat{c}_k}\hat{Y}\rangle \perp\!\!\!\perp \|P_{S(C_k)}\hat{Y}\|^2 \quad\cdots\cdots(3.7)$$

(3.5)(3.6)(3.7) より

仮説，$a_k=0$ が真のとき

$$\frac{\|P_{\hat{c}_k}\hat{Y}\|^2}{\|P_{S(C_k)}\hat{Y}\|^2/n-1}\sim F^1_{n-1}\quad \text{(under } a_k=0 \text{ is true)} \quad\cdots\cdots(3.8)$$

として F-検定すると良い。

注　(3.8) の検定の最高次 k 次項の存在が否定されたとき ($a_k=0$) が採択されたら，次

に，$a_{k-1}=0$ の検定に移る。その検定式は (3.8) で kを $k-1$ におきかえたものを使うとよい。以下採択されたら順次同じ手順を繰返す。

§4. 順序ある繰返し実験で，A 種の小麦が連作可能か否かの実験 (Program 計算は，東京情報大学：増田文夫による)

A 種の小麦で，6 地区の試験区を 5 年間連作って連作の可否を見たいとした実験データである。$X[i, j]$ の i は第 i 年次を，j は試験区番号での収穫量を示した。

$$(X[1, j], X[2, j] \cdots X[5, j]) \equiv \mathbf{X}_j'$$

$$\mathbf{X}_j \sim N_5[\boldsymbol{\mu}+R_j\boldsymbol{1}, \Xi] \quad j=1, 2\cdots 6$$

として検定法 1 にしたがって

H_1 : $(1, 0, 0, 0 -1)'\boldsymbol{\mu}=(\mu_1-\mu_5)=0$ の検定 (1 年次と 5 年次の母平均差の検定)

H_2 : $(1, 0, -2, 0, 1)'\boldsymbol{\mu}=(\mu_1-2\mu_3+\mu_5)=0$ の検定 (2 年間の母平均の階差相等の検定)

を行った。次にその program list を示す。

TURBO PASCAL Program Lister., Copyright 1983 Borland International Page Listing of : UKITA 2. PAS

```
program   g__linear ;
const     p = 5 ; n = 6 ;
type      __p = 1 . . p ; __n = 1 . . n ;
var       a : array [__p] of real ; x : array [__p, __n] of real ;
          f ; array [1..2] of real ; i. j : integer ;
procedure set__x ;
begin
x [1, 1] : =82.1 ; x [1, 2] : =85.7 ; x [1, 3] : =85.0 ; x [1, 4] : =86.6 ; x [1, 5] : =77.4 ; x [1, 6] :
=71.6
x [2, 1] : =70.2 ; x [2, 2] : =82.8 ; x[2, 3] : =84.8 ; x[2, 4] : =68.0 ; x [2, 5] : =73.4 ; x [2, 6] ;
=63.8
x [3, 1] : =81.1 ; x [3, 2] ; =84.5 ; x[3, 3] ; =77.9 ; x [3, 4] ; =78.7 ; x [3, 5] ; =76.0 ; x [3, 6] :
=74.3
x [4, 1] : =79.4 ; x [4, 2] : =82.6 ; x [4, 3] : =84.4 ; x [4, 4] : =78.2 ; x [4, 5] : =75.8 ; x [4, 6] :
=79.6
x [5, 1] : =83.4 ; x [5, 2] : =89.4 ; x [5, 8] : =85.7 ; x [5, 4] : =86.6 ; x [5, 5] : =78.0 ; x [5, 6] :
=78.0
end ;
function project : real ;
var       norm, numerator, denominator, s, ss : real ;
begin
s : =0 ; for i : =1 to p do s : = s + sqr (a [i]) ; norm : =s ;
s : =0 ; for i : =1 to p do for j : =1 to n do s : = s + a [i]* x [i, j] ;
numerator : = sqr (s)/ (n* norm) ; ss =0 ;
for j : =1 to n do
```

```
begin
      s: =0; for i: =1 to p do s: = s + a [i]* x [i,  j ]; ss: = ss + sqr (s);
end;
denominator: = ss / norm-numerator;
proiect: = numerator / denominator* (n−1);
end;
begin { main }
set__x;
a [1]: =1; a [2]: =0; a [3]: =0; a [4]: =0; a [5]: =−1; f [1]: = project;
a [1]: =1; a [2]: =0; a [3]: =−2; a [5]: =0; a [5]: =1; f [2]: = project;
writeln (lst, ' original data: p =5; n =6');
writeln (lst); write (lnt, ' ': 2);
for j: =1 to n do write (1 st, j: 8); writeln (1 st);
for i: =1 to p do
begin
      write (1 st, i: 1,  ']');
      for j: =1 to n do write (1 st, x [i,  j]: 8: 1); writeln (1 st);
end;
writeln (1 st);
writeln (1 st, ' hypothesis 1: μ1−μ5=0;              f__value =',f [1]: 8: 3);
writeln (1 st, ' hypothesis 2: μ1−2*μ3+μ5=0;     f__value =', f [2]: 8: 3);
end.
```

original data: p=5; n=6

	1	2	3	4	5	6
1]	82.1	85.7	85.0	86.6	77.4	71.6
2]	70.2	82.8	84.8	68.0	73.4	63.8
3]	81.1	84.5	77.9	78.7	76.0	74.3
4]	79.4	82.6	84.4	78.2	75.8	79.6
5]	83.4	89.4	85.7	86.6	78.0	78.0

hypothesis 1: $\mu1-\mu5=0$; f__value$=4,435<6,608=F^1_5(0.05)$

hypothesis 2: $\mu1-2^*\mu3+\mu5=0$; f__value$=8.159>6.608=F^1_5(0.05)$

参考文献

(1) S. F. Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.

(2) A. M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.

(3) T. W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.

(4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版。

(5) 宇喜多義昌 (1983), 多変量統計解析, その3：標本分布論, 翔人社。

(6) 宇喜多義昌 (1987), 多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部。

(7) 宇喜多義昌 (1988), 多変量解析—$\| P_s\boldsymbol{x} \|^2$ とその分布の研究—序説—明星大学出版部

引 用 論 文

(1) Y. Ukita (1976), Hypothesis Spaces and Decomposition of Sum of Squares in Linear Models (Ogawa Volume).

(2) 宇喜多義昌 (1980), $\langle P_a x\rangle$, $\| P_S x^2 \|$ の分布と応用について (東京理科大学・理学専攻科雑誌, No. 1, Vol. 1)

(3) 宇喜多義昌, 外 2 名 (1981), $\| P_{S_1} x \|^2 / \| P_{S_2} x \|^2$ の分布に関する定理 (東京理科大学, 理学専攻科雑誌, No. 1, Vol. 2)

(4) Y. Ukita (1982), On a Geometrical Meaning of $A_{22.1}$ and its Distribution (Tensor, N. S. Vol. 39)

(5) 宇喜多義昌 (1982, Basic 数学, No. 10～No. 12, 1983), 統計的実験の計画と, 実験データの解析 (I, II, III, IV)

(6) 日本数学会研究発表アブストラクト (統計数学), 1985 年, 秋季大会 (富山大学), 1986 年春季大会 (京都大学)

(7) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用…明星大学紀要 (理工学部)。1986

(8) Y. Ukita & K. Noda : About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium an Statistics) 1986.

(9) Y. Ukita & K. Noda : Testing Hypotheses on Generalized Linears Models in ANOVA (ISI 46th Contributed Papers) 1987.

(10) 宇喜多義昌, 小野英夫 ; Generalized Linear Model の場合の仮説検定について, 明星大学紀要 (理工学部) 1987

(11) 宇喜多義昌 "Generalized Linear Model の場合の F-検定について" 文部省科学研究費総会研究 A「多変量データ解析の理論と適用の研究」予稿集 (1987)

(12) 宇喜多義昌, 野田一夫 "Generalized Linear Model の場合の F-検定量について (I), (II)", 日本数学 1988 春季研究会, 統計数学予稿集