Generalized Linear Model の場合の仮説検定について（II）

宇喜多　義　昌*

§1. Summary

明星大学研究紀要-理工学部-第 24 号 (1988) で宇喜多，小野は同じ題名の小文において，

$$\mathrm{X}\sim N_p\left(\sum_{i=1}^{m} a_i p_i,\ \Xi\right),\quad m\equiv\sum_{i=1}^{m} a_i p_i,\quad \Xi>0$$

のとき，すなわち

$V(\mathrm{X})=\Xi$ であるときは，帰無仮説 $m\perp S^*$，ただし S^* は推定空間の適当な部分空間，の F-検定法について述べた。

本小文は，$\mathrm{X}\sim N_a\left(m=\sum_{i=1}^{a} a_i\mu_i+R\mathit{1}_a,\ \Xi\right)$ で，R は対象個体の共通効果で，$a_i'=(0, \cdots, 0, \overset{i\text{番目}}{1}, 0, \cdots, 0)$ とする。

このとき，「仮説 $m\perp S^*$, S^* は適当な部分空間」の検定で，この適当な部分空間として，「$c'\mathit{1}_a=0$ なる任意のベクトル c の張る 1 次元のベクトル空間 $S(c)$ に対して，帰無仮説 $m\perp S(c)$ に対する F 検定要領」を示す。また，この検定方式は，x の変換 $Z=c'x$ の検討からしても，同一の F-検定法になることを示す。最後に本文冒頭にあげた先行論文中の検定方法 1. は，この小文の特種な場合であることも示す。

§2. $\hat{\mathrm{X}}'=(\mathrm{X}'(1),\ \mathrm{X}'(2),\ \cdots\mathrm{X}'(n))$ の構造模形と空間構造について

1 元配置 (1 因子実験) では要因 T の水準が T_1, T_2, $\cdots T_a$ のとき na 個の仕切を無作為に抽出し，各 T_i 水準の実験を n 個の仕切で行い，同一仕切で異る 2 水準以上の実験は行はない。すなわち追跡調査は行わない。また na 個の実験はそれぞれ統計的に独立で，同一分散をもつとする。しかし「免疫性を見る実験」とか「作物の連作の可否を見る」実験では，n 個の対象のおのおのに対して，順次 T_1, T_2, $\cdots T_a$ と実験するのが普通である。例えば小麦の連作の可否実験で第 1 年度栽培を T_1，第 2 年度栽培を T_2，$\cdots$第 a 年度栽培を T_a として n 個の試験区で栽培して収量を調べ，連作の可否を調べる場合が考えられる。

処理	T_1	$T_2\ \cdots\ T_a$	
α-対象	$[X_1(\alpha)$	$X_2(\alpha)\cdots X_a(\alpha)]\equiv\mathrm{X}_\alpha'$	
期待値	μ_1+R_α	$\mu_2+R_\alpha\cdots\mu_a+R_\alpha$,	$\alpha=1,\ 2,\ \cdots n$

* 一般教養教授　数学

ここに R_α は α-対象の固有効果で，μ_1，$\cdots\mu_a$ は処理効果と見る。

　このとき次の仮定に従うとする。

$$\mathbf{X}_\alpha \sim N_a(\boldsymbol{\mu}+R_\alpha \boldsymbol{1}_a,\ \Xi)$$

ここに $V(\mathbf{X}_\alpha)=\Xi=(\xi_{ij})>0$，$\boldsymbol{\mu}'=(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\mu_a)$，$\boldsymbol{1}_a'=(1,\ 1,\ \cdots 1)$ で n 個の対象に対する $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，$\cdots\mathbf{X}_n$ のベクトル間は独立と見てよい。すなわち $\mathbf{X}(\alpha)\perp\!\!\!\perp$ とする。

$$(\mathbf{X}_1',\ \mathbf{X}_2',\ \cdots\mathbf{X}_n')\equiv\hat{\mathbf{X}}'$$

の構造模型は次のようになる。

$$\hat{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_a\\ I_a\\ \vdots\\ I_a\end{pmatrix}\boldsymbol{\mu}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}_a & 0\cdots 0\\ 0 & \boldsymbol{1}_a\cdots 0\\ \vdots & \vdots\quad\vdots\\ 0 & 0\cdots\boldsymbol{1}_a\end{pmatrix}\boldsymbol{R}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}I_a & \boldsymbol{1}_a & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}\\ I_a & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}_a\cdots\boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots\\ I_a & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{1}_a\end{pmatrix}\\ \uparrow\cdots\uparrow\ \uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\\ \boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_a\boldsymbol{b}_1\quad\boldsymbol{b}_2\cdots\ \boldsymbol{b}_n\end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ \boldsymbol{R}\end{pmatrix}+\hat{e}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{m}_1\\ \boldsymbol{m}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{m}_n\end{pmatrix}+\hat{e}$$

$$\equiv\hat{m}+\hat{e} \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

　ここに $\boldsymbol{R}'=(R_1,\ R_2,\ \cdots R_n)$，$\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{\mu}+R_i\boldsymbol{1}_a$ である。

したがって $\hat{\mathbf{X}}$ の分布は

$$\hat{\mathbf{X}}\sim S_{na}\left(\hat{m},\ \begin{pmatrix}\Xi & \cdots & 0\\ 0 & \Xi & \vdots\\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \Xi\end{pmatrix}\right) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

ここに $S(A)\equiv S(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots\boldsymbol{a}_a)$，$S(A^-)\equiv S(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_a,\ \boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_a,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{a-1}-\boldsymbol{a}_a)$

　　　$S(B)\equiv S(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots\boldsymbol{b}_n)$，$S(B^-)\equiv S(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_n,\ \boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_n,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_{n-1}-\boldsymbol{b}_n)$

で推定空間，誤差空間は図 1 の通りである。

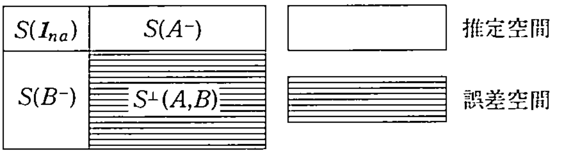


図　1

また

　推定空間 $S(A,\ B)=S(A^-)\oplus S(\boldsymbol{1}_{na})\oplus S(B^-)$

　$dimS(A,\ B)=dimS(A^-)+dimS(\boldsymbol{1}_{na})+dimS(B^-)$

$$=(a-1)\quad+1\quad+(n-1)$$

$$=n+a-1$$

　誤差空間 $S^\perp(A,\ B)$，$dimS^\perp(A,\ B)=(n-1)(a-1)$

である。

　§3 の $Th.1$ のために，次の簡単な空間に対する lemma を述べる。

$\boldsymbol{1}_a'\boldsymbol{d}=0$ なる任意の a 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ から，つぎのような n ケの na 次元ベクトルをつくる。

$\hat{\boldsymbol{d}}_i\equiv(\boldsymbol{0}',\ \boldsymbol{0}',\ \cdots\boldsymbol{0}',\ \boldsymbol{d}',\ \boldsymbol{0}',\ \cdots\boldsymbol{0}')$，$\boldsymbol{0}$ は a 次元零ベクトルとする。

$i=1,\ 2,\ \cdots n$ である。

この互に直交する $\hat{\mathrm{d}}_1, \hat{\boldsymbol{d}}_2, \cdots\hat{\boldsymbol{d}}_n$ を基底とするベクトル空間を $S(D)$ とすると，$dimS(D)=n$ である。いま $\hat{\boldsymbol{d}}'\equiv(\boldsymbol{d}',\ \boldsymbol{d}',\ \cdots,\ \boldsymbol{d}')$ とすると

$$S(D)=S\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & 0\cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{d}\cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{d} & \\ \boldsymbol{d} & \\ \vdots & \\ \vdots & \underbrace{\boldsymbol{g}_2\cdots\boldsymbol{g}_n}_{D^-} \\ \vdots & \\ \boldsymbol{d} & \end{array}\right]=S(\hat{\boldsymbol{d}})\oplus S(D^-)$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ \hat{\boldsymbol{d}}_1 & \hat{\boldsymbol{d}}_2\cdots & \hat{\boldsymbol{d}}_n & & \hat{\boldsymbol{d}} & \underbrace{\qquad}_{\text{互に直交するベクトル}} \end{array}$$

ここに $\boldsymbol{g}_2, \cdots\boldsymbol{g}_n$ は，互に直交し，$\hat{\boldsymbol{d}}$ とも直交する $S(D)$ 内の $n-1$ 個のベクトルで，$\boldsymbol{g}_2, \cdots\boldsymbol{g}_n$ の張るベクトル空間を $S(D^-)$ とした，すなわち $S(\boldsymbol{g}_2,\ \cdots\boldsymbol{g}_n)\equiv S(D^-)$ である。

Lemma 1

$S(\hat{\boldsymbol{d}})\subset S(A,\ B)$，$dimS(\hat{\boldsymbol{d}})=1$

$S(D^-)\subset S^{\perp}(A,\ B)$，$dimS(D^-)=n-1$，

証明

$\boldsymbol{g}_2\in S(D)$ より，$\boldsymbol{g}_2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(2)\hat{\boldsymbol{d}}_i$ とかける。すなわち，

$\boldsymbol{g}_2'=(\alpha_1(2)\boldsymbol{d}',\ \alpha_2(2)\boldsymbol{d}',\ \cdots,\ \alpha_n(2)\boldsymbol{d}')$

とかける。ただし $\hat{\boldsymbol{d}}\perp\boldsymbol{g}_2$ より，次のことが成立つ

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(2)=0 \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

$\boldsymbol{g}_2\perp\boldsymbol{a}_j$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ である。なぜなら (2.3) より

$\boldsymbol{g}_2'\boldsymbol{a}_j=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(2)\right)d_j=0$　(d_j は $\boldsymbol{d}$ の j 番目の成分)。

$\boldsymbol{g}_2\perp\boldsymbol{b}_i$　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である。なぜなら

$\boldsymbol{g}_2'\boldsymbol{b}_i=\alpha_i(2)\cdot\boldsymbol{d}'\boldsymbol{1}=0$　($\boldsymbol{d}'\boldsymbol{1}=0$ より) であるからである。よって $\boldsymbol{g}_2\perp S(A,\ B)$，であり $\boldsymbol{g}_2\in S^{\perp}(A,\ B)$ となる，　我々は他の $\boldsymbol{g}_\alpha$ についても全く同様である。

ゆえに

$$S(\boldsymbol{g}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_n)\equiv S(D^-)\subset S^{\perp}(A,\ B) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

基底 $\boldsymbol{g}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_n$ の直交性から $n-1$ 個のベクトルの独立性より

$dimS(D^-)=n-1$。

前半の証明は

$\hat{\boldsymbol{d}}'=(d_1d_2\cdots d_a,\ d_1,\ d_2,\ \cdots d_a,\ \cdots,\ d_1,\ d_2,\ \cdots d_a)$

$=d_1\boldsymbol{a}_1'+d_2\boldsymbol{a}_2'+\cdots+d_a\boldsymbol{a}_a'\in S(A)\subset S(A,\ B)$

より明らかである。

§3. 帰無仮説 $c'\mu=0$（ただし $c'1_a=0$）の F-検定量について

$c'1_a=0$ なる c' には $(1,\ -1,\ 0,\ \cdots 0)$ とか$(1,-2,1,0\cdots 0)$等があるので，$\mu_1-\mu_2=0$ とか $\mu_2=\dfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_3)$ とかの検定が Generalized Linear Model の場合でも，F-検定可能となり，その検定要領を示す。以下の F-検定要領はいろいろの場合に応用されるが，事例については次の別の小文で示すことにする。

Th.1. $c'1_a=0$ なる任意の a 次元ベクトル c に対して
$\hat{c}'\equiv(c',\ c',\ \cdots,\ c')$ とし

$$S(C)\equiv S\begin{bmatrix} c & 0\cdots & 0\\ 0 & c\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0\\ 0 & 0\cdots & c \end{bmatrix}=S\left[\begin{array}{c:c} c & \\ c & \\ \vdots & C^-\\ \vdots & \\ c & \end{array}\right]=S(\hat{c})\oplus S(C^-)$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow\cdots & \uparrow\\ \hat{c}_1, & \hat{c}_2,\cdots & \hat{c}_n \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}\uparrow\\ \hat{c}\end{array}$$

このとき

$$\langle P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\rangle\sim N_1(\langle P_{\hat{c}}\hat{m}\rangle,\ \sigma^{*2})\cdots(3.1),\quad P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\sim N_{n-1}(0,\ \sigma^{*2}I_{n-1})\cdots(3.2)$$

$\langle P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\rangle \perp\!\!\!\perp P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\cdots(3.3)$，ここに $\sigma^{*2}\equiv e'(c)\Xi e(c)$ とした。が証明される。
上式で $e(c)$ は c 方向の単位ベクトルで，$\langle P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\rangle$ はベクトル $\hat{\mathbf{X}}$ の $\hat{c}$ への正射影ベクトルの正負の符号を含む長さで，$P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}$ はベクトル $\hat{\mathbf{X}}$ のベクトル空間 $S(C^-)$ への $n-1$ 次元の正射影ベクトルである。

証明 $\langle P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\rangle=e(\hat{c})'\hat{\mathbf{X}}$，$\hat{\mathbf{X}}\sim N_{na}(\hat{m},\ diag(\Xi,\ \cdots\Xi))$ より$\langle P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\rangle$ は正規変量である。
また，$E[e(\hat{c})'\hat{\mathbf{X}}]=e(\hat{c})'\hat{m}=\dfrac{1}{\sqrt{n}\,\|c\|}nc'\mu=\dfrac{\sqrt{n}}{\|c\|}c'\mu$，分散については $V[e(\hat{c})'\hat{\mathbf{X}}]$
$=\dfrac{\sum\sum\xi_{ij}c_ic_j}{\sum c_i{}^2}=e(c)'\Xi e(c)$，よって

$$\langle P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\rangle\sim N_1(P_{\hat{c}}\hat{m},\ \sigma^{*2})$$

である。(3.2) を証明する。§2 の Lemma 1 で調べたように，
$S(C^-)\ni g_2,\ g_3,\ \cdots,\ g_n$ なる互に直交し，$\hat{c}$ とも直交する。$g_2\cdots g_n$ が得られる。これから

$$(P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}})'=(\langle P_{g_2}\hat{\mathbf{X}}\rangle,\ \langle P_{g_3}\hat{\mathbf{X}}\rangle,\ \cdots,\ \langle P_{g_n}\hat{\mathbf{X}}\rangle)$$
$$=(e(g_2)'\hat{\mathbf{X}},\ e(g_3)'\hat{\mathbf{X}},\ \cdots,\ e(g_n)'\hat{\mathbf{X}})\ \text{より}$$

$P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}$ は $n-1$ 変数正規分布である。平均ベクトル，分散共分散行列は

$E[e(g_i)'\hat{\mathbf{X}}]=e'(g_i)\hat{m}=0$（$\because \hat{m}\in S(A,\ B)$，$e(g_i)\in S^{\perp}(A,\ B)$）。

$V[e(g_i)'\hat{\mathbf{X}}]=e(g_i)'V(\hat{\mathbf{X}})e(g_i)=e'(c)\Xi e(c)\equiv\sigma^{*2}$，

$cov(e(g_i)'\hat{\mathbf{X}},\ e(g_j)'\hat{\mathbf{X}})=e(g_i)diag(\Xi,\ \Xi,\ \cdots,\ \Xi)e(g_j)$

$=\dfrac{\sum_k\alpha_k(i)\alpha_k(j)}{\sqrt{\sum_k\alpha_k^2(i)\cdot\sum_k\alpha_k^2(j)}}e(c)'\Xi e(c)=0\quad(i\neq j)$，0 となるのは，

$g_i'=(\alpha_1(i)c',\ \alpha_2(i)c',\ \cdots,\ \alpha_n(i)c')$，$g_j'=(\alpha_1(j)c',\ \cdots,\ \alpha_n(j)c')$ なる

$\boldsymbol{g}_i$ と $\boldsymbol{g}_j$ が直交することから $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(i)\alpha_k(j)=0$ であるからである。よって $P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}$ の $(n-1)\times(n-1)$ の分散共分散行列 $V[P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}]$ は

$V[P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}]=\sigma^{*2}\cdot I_{n-1}$

となる。つぎに (3.3) を証明するには

$V[\boldsymbol{e}(\hat{\boldsymbol{c}})'\hat{\mathbf{X}},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{g}_i)'\hat{\mathbf{X}}]=0\quad(i=2,\ 3,\ \cdots n)$ を示すとよい。しかるに

$V[\boldsymbol{e}(\hat{\boldsymbol{c}})'\hat{\mathbf{X}},\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{g}_i)'\hat{\mathbf{X}}]=\dfrac{\sum\alpha_k(i)}{\sqrt{n\cdot\sum_k\alpha_k^2(i)}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c})'\Xi\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c})$ であるが，$\hat{\boldsymbol{c}}\perp\boldsymbol{g}_i$ より $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(i)=0$ となることから 0 となる $(i=2,\ \cdots,\ n)$。

この定理は，$\hat{\mathbf{X}}\sim N_{na}(\hat{\boldsymbol{m}},\ diag(\Xi,\ \cdots\Xi))$ のとき $\hat{\mathbf{X}}$ を，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}(\hat{\boldsymbol{c}})'\\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{g}_2)'\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{g}_n)'\end{bmatrix}\equiv\underset{n\times na}{Q}$$

なる半直交行列での変換 $\boldsymbol{Z}=Q\hat{\mathbf{X}}$ で，$\boldsymbol{Z}$ の分布は，

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{Z}}=Q\hat{\mathbf{X}}\sim N_n\left(\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{n}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{c}\|}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\ \sigma^{*2}I_n\right),\qquad\cdots\cdots(3.4)$$

であることを示したものである。

さて，帰無仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ の F-検定を示す。

(3.1)，(3.2)，(3.3) または (3.4) より

$Z_1{}^2\equiv\|P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2\sim\sigma^{*2}\cdot\chi_1'^2[2\lambda=n(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c})'\boldsymbol{\mu})^2]$

$Z_2{}^2+\cdots+Z_n{}^2=\|P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2=\sum_{i=2}^{n}\|P_{gi}\hat{\mathbf{X}}\|^2\sim\sigma^{*2}\cdot\chi_{n-1}^2$

$\|P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2 \perp\!\!\!\perp \|P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2$

なることから

$\|P_{\hat{c}}\hat{x}\|^2\Big/\dfrac{\|P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2}{n-1}$ は noncetral $\hat{F}_{n-1}^1$ 分布をなす

しかし $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ が成立するとき，central F_{n-1}^1 分布をするから，つぎの F-検定が行える。ただし $\|P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2$ の算出には，$\|P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2=\|P_{S(C)}\hat{\mathbf{X}}\|^2-\|P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|P_{\hat{c}_i}\hat{\mathbf{X}}\|^2-\|P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2$ ……(3.5) として計算される。

検定方式 I

仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$（ただし $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{1}_a=0$）が真なるとき，

$$\frac{\|P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2}{\|P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2/n-1}\sim F_{n-1}^1\qquad\cdots\cdots(3.5)$$

であることから，$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ の仮説検定が行える。

§4. 統計量〔$\| P_{\hat{c}}\mathbf{X}\|^2/\| P_{S(C^-)}\mathbf{X}\|^2$〕$\cdot(n-1)$ の別検討

(3.5)の左項の検定統計量を更に検討する。

$$\| P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2=\frac{(\hat{c}'\hat{\mathbf{X}})^2}{\|\hat{c}\|^2}=\frac{(\boldsymbol{c}'\mathbf{X}_1+\boldsymbol{c}'\mathbf{X}_2+\cdots+\boldsymbol{c}'\mathbf{X}_n)^2}{n\|\boldsymbol{c}\|^2},\quad \boldsymbol{c}'\mathbf{X}_i=Y_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\text{とすると，}$$

$$=\frac{(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)^2}{n}\cdot\|\boldsymbol{c}\|^{-2}=n\overline{Y}^2\cdot\|\boldsymbol{c}\|^{-2} \qquad\cdots\cdots(4.1)$$

$$\| P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2=\| P_{S(C)}\hat{\mathbf{X}}\|^2-\| P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2=\sum_{i=1}^{n}\| P_{\hat{c}_i}\hat{\mathbf{X}}\|^2-n\overline{Y}^2\cdot\|\boldsymbol{c}\|^{-2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{c}'\mathbf{X}_i)^2}{\|\boldsymbol{c}\|^2}-n\overline{Y}^2\cdot\|\boldsymbol{c}\|^{-2}=\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2\right)\|\boldsymbol{c}\|^{-2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\cdot\|\boldsymbol{c}\|^{-2} \qquad\cdots\cdots(4.2)$$

よって，$$\frac{\| P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2}{\| P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2/n-1}=\frac{n\overline{Y}^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2/n-1} \qquad\cdots\cdots(4.3)$$

となることから，次の定理から導かれた統計量とも解釈できる。

***Th* 2.** $\mathbf{X}\sim N_a(\boldsymbol{\mu}+R\mathbf{1},\ \Xi)$ のとき，$Y=\boldsymbol{c}'\mathbf{X}$，$(\boldsymbol{c}'\mathbf{1}=0)$ とすると，$Y\sim N_1(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c})$ である，

$\mathbf{X}$ の無作為標本 $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \cdots,\ \mathbf{X}_n$ から，$Y_i=\boldsymbol{c}'\mathbf{X}_i$ としてえられる $Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n$ は Y の無作為標本とみられ

$$\sqrt{n}\,\overline{Y}\sim N(\sqrt{n}\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c})\rightarrow(\sqrt{n}\,\overline{Y})^2\sim(\boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c})'\chi_1'^2[2\lambda=n(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu})^2]$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\sim(\boldsymbol{c}'\Xi\boldsymbol{c})\cdot\chi^2_{n-1}$$

$$\sqrt{n}\,\overline{Y}\perp\!\!\!\perp\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$$

であることは良く知られている。これから

$$\frac{(\sqrt{n}\,\overline{Y})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2/n-1}\sim F'^1_{n-1},\ \text{noncentral prameter } n(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu})^2 \text{ である。}$$

よって，仮説 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}=0$ のときは

$$\frac{(\sqrt{n}\,\overline{Y})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2/n-1}=\frac{\| P_{\hat{c}}\hat{\mathbf{X}}\|^2}{\| P_{S(C^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2/n-1}\sim F^1_{n-1}\text{。}$$

Lemma 2. $V\left[\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right]=\Xi>0$ の場合の $E(X)=E(Y)$ の検定について

いま，$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\sim N_2\left(\begin{bmatrix}\mu_x\\\mu_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x^2, & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y, & \sigma_y^2\end{bmatrix}\right)$ のとき，$Z=X-Y$ の分布は $Z\sim N(\mu_x-\mu_y,\ \sigma_y^2-2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2)$ と な る，$(X,\ Y)$ の 無 作 為 標 本 $(X_1,\ Y_1)$，$(X_2,\ Y_2)\cdots(X_n,\ Y_n)$ に対して，Z の無作為標本 $Z_1\cdots Z_n$ がえられるが，$\overline{Z}=\sum Z_i/n$，$\sum(Z_i-\overline{Z})^2$ について

$\sqrt{n}\,\overline{Z}\sim N(\sqrt{n}(\mu_x-\mu_y),\ \sigma_x^2+\sigma_y^2-2\rho\sigma_x\sigma_y\equiv\sigma^{*2})$，$\sum(Z_i-\overline{Z})^2\sim\sigma^{*2}\chi^2_{n-1}$，$\overline{Z}\perp\!\!\!\perp\sum(Z_i-\overline{Z})^2$ であるから

仮説 $\mu_x=\mu_y$ が真のときは，ベクトル $(X,\ Y)$ の対差 Z につき

$\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{Z}}{\sum(Z_i-\overline{Z})/n-1} \sim F^1_{n-1}$ となる。

§5. $c_1'\mu=0$, $c_2'\mu=0$（ただし $c_1\perp c_2$, $c_i\perp 1_a$ $i=1, 2$）の同時検定の可否の検討

§1 の lemma 1 のように c_1 から構成する na 次元のベクトル空間 $S(C_1)$ と，c_2 から構成する na 次元のベクトル空間 $S(C_2)$ をつくり，それ等をそれぞれ直交補空間に分ける，すなわち

$$S(C_1)\equiv S\begin{bmatrix} c_1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & c_1\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & c_1 \end{bmatrix} \equiv S\left[\begin{array}{c:c} c_1 & \\ c_1 & \\ \vdots & \underbrace{g_2(1),\ \cdots,\ g_n(1)}_{C_1^-} \\ \vdots & \\ c_1 & \text{直交ベクトル} \end{array}\right] = S(\hat{c}_1)\oplus S(C_1^-)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \cdots\cdots\uparrow & \uparrow \\ \hat{c}_1(1) & \hat{c}_n(1) & \hat{c}_1 \end{array}$$

$g_i'(1)=(\alpha_1(i)c_1', \alpha_2(i)c_1', \cdots\alpha_n(i)c_1')$, $i=2, 3\cdots n$ であり

$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(i)=0$ $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(i)\alpha_k(j)=0$ である。

$$S(C_2)\equiv S\begin{bmatrix} c_2 & 0\cdots & 0 \\ 0 & c_2\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & c_2 \end{bmatrix} \equiv S\left[\begin{array}{c:c} c_2 & \\ c_2 & \\ \vdots & \underbrace{g_2(2),\ \cdots,\ g_n(2)}_{C_2^-} \\ c_2 & \end{array}\right] = S(\hat{c}_2)\oplus S(C_2^-)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \cdots\uparrow & \uparrow \\ \hat{c}_1(2) & \hat{c}_n(2) & \hat{c}_2 \end{array}$$

$g_i'(2)=(\beta_1(i)c_2', \beta_2(i)c_2', \cdots, \beta_n(i)c_2')$, $i=2, 3, \cdots n$ であり，

$\sum_{k=1}^{n}\beta_k(i)=0$, $\sum_{k=1}^{n}\beta_k(i)\beta_k(j)=0$ である。

このとき

$S(\hat{c}_1)\subset S(A, B)$, $S(C_1^-)\subset S^{\perp}(A, B)$,

$S(\hat{c}_2)\subset S(A, B)$, $S(C_2^-)\subset S^{\perp}(A, B)$,

であることは，Lemma 1 で示した通りである。これを図 2 に示す。

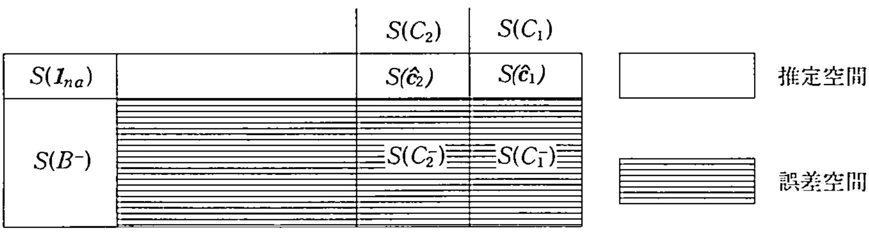


図 2

ここで $S(C_1)\perp S(C_2)$ は明らかである。

§3 の $Th.$ 1. で示したように，$\hat{\mathbf{X}}$ の各空間への正射影の統計的独立性について検討する。

Th. 3. $\langle P_{\hat{c}_i}\hat{\mathbf{X}}\rangle \perp\!\!\!\perp P_{S(C_i-)}\hat{\mathbf{X}} \quad i=1,\ 2,$ ……(5. 1)

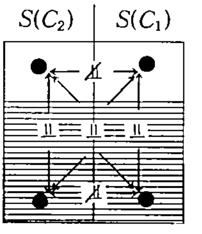
$\langle P_{\hat{c}_i}\hat{\mathbf{X}} \perp\!\!\!\perp P_{S(C_j-)}\hat{\mathbf{X}} \quad i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2$ ……(5. 2)

$\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle \perp\!\!\!\perp \langle P_{c_2}\hat{\mathbf{X}}\rangle$ ……(5. 3)

$P_{S(C_1-)}\hat{\mathbf{X}} \perp\!\!\!\perp P_{S(C_2-)}\hat{\mathbf{X}}$ ……(5. 4)

である。

証明 (5. 1)は $Th.1$ で証明した。



(5. 2)の $\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle$ と $P_{S(C_2-)}\hat{\mathbf{X}}$ の独立性を示す。

$P_{S(C_2-)}\hat{\mathbf{X}}=(e[\boldsymbol{g}_2(2)]'\hat{\mathbf{X}},\ e[\boldsymbol{g}_3(2)]'\hat{\mathbf{X}},\ \cdots e[\boldsymbol{g}_n(2)]'\hat{\mathbf{X}})$

より $cov[\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle,\ e[\boldsymbol{g}_i(2)]'\hat{\mathbf{X}}]$

$$=\frac{\sum_k \beta_k(i)}{\sqrt{n\cdot\sum_k \beta_k(i)^2}}e(\boldsymbol{c}_1)'\Xi e(\boldsymbol{c}_2)=0 \qquad \left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k(i)=0 \text{ より}\right)$$

$i=2,\ 3,\ \cdots n$

よって，$\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle \perp\!\!\!\perp P_{S(C_2-)}\hat{\mathbf{X}}$ である。$\langle P_{\hat{c}_2}\hat{\mathbf{X}}\rangle \perp\!\!\!\perp P_{S(C_1-)}\hat{\mathbf{X}}$ も同様

(5. 3)の $\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle$ と $\langle P_{\hat{c}_2}\hat{\mathbf{X}}\rangle$ は統計的独立とはいえないことは，

$cov[e(\hat{c}_1)'\hat{\mathbf{X}},\ e(\hat{c}_2)'\hat{\mathbf{X}}]=e(\boldsymbol{c}_1)'\Xi e(\boldsymbol{c}_2)\equiv l\neq 0$ ……(5. 5)

からである。

(5. 4)の証明はつぎのことを示せばよい。

$P_{S(C_1-)}\hat{\mathbf{X}}=(e[\boldsymbol{g}_2(1)]'\hat{\mathbf{X}},\ e[\boldsymbol{g}_3(1)]'\hat{\mathbf{X}},\ \cdots,\ e[\boldsymbol{g}_n(1)]'\hat{\mathbf{X}})$ より

$e[\boldsymbol{g}_i(1)]'\hat{\mathbf{X}}$ なる $P_{S(C_1-)}\hat{\mathbf{X}}$ の $(i-1)$ 成分と，$e[\boldsymbol{g}_j(2)]'\hat{\mathbf{X}}$ なる $P_{S(C_2-)}\hat{\mathbf{X}}$ の $(j-1)$ 成分との共分散が必ずしも零でないことを示すとよい。$i,\ j=2,\ 3,\ \cdots n$

$$cov[e[\boldsymbol{g}_i(1)]'\hat{\mathbf{X}},\ e[\boldsymbol{g}_j(2)]'\hat{\mathbf{X}}=\frac{\sum_k \alpha_k(i)\beta_k(j)}{\sqrt{\sum_k \alpha_k^2(i)\cdot\sum_k \beta_k^2(j)}}e(\boldsymbol{c}_1)'\Xi e(\boldsymbol{c}_2)=l_{ij}\neq 0。 \quad ……(5. 6)$$

一般に $\sum_k \alpha_k(i)\beta_k(j)\neq 0$ である。よって，$(5. 6)\neq 0$。

Lemma. 3.

$V[\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle]=V[e[\hat{c}_1)]'\hat{\mathbf{X}}]=\sigma_1^{*2}(\equiv e(\boldsymbol{c}_1)'\Xi e(\boldsymbol{c}_1))$ ……(5. 7)

$V[\langle P_{\hat{c}_2}\hat{\mathbf{X}}\rangle]=V[e[\hat{c}_2]'\hat{\mathbf{X}}]=\sigma_2^{*2}(\equiv e(\boldsymbol{c}_2)'\Xi e(\boldsymbol{c}_2))$ ……(5. 8)

である。

本定理は $\hat{\mathbf{X}}\sim N_{na}(\hat{\boldsymbol{m}},\ diag(\Xi,\ \cdots\Xi))$ のとき $\mathbf{X}$ を

$$\begin{bmatrix} e(\hat{c}_1)' \\ e(\boldsymbol{g}_2(1))' \\ e(\boldsymbol{g}_3(1))' \\ \vdots \\ e(\boldsymbol{g}_n(1))' \\ \hdashline e(\hat{c}_2) \\ e(\boldsymbol{g}_2(2))' \\ \vdots \\ e(\boldsymbol{g}_n(n))' \end{bmatrix} \equiv \underset{(2n\times na)}{Q}{}_{12},$$

なる半直交行列で変換した，$\boldsymbol{Z}=Q_{12}\hat{\mathbf{X}}$ は

$$Z=Q_{12}\hat{\mathbf{X}}\sim N_{2n}\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{n}\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{c}_1\|}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\sqrt{n}\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{c}_2\|}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} & \begin{matrix} l & 0 & \cdots & 0\\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & l_{2n} & \cdots & l_{nn}\end{matrix}\\ \sigma_1^{*2}I_n & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \begin{matrix} l & 0 & \cdots & \sigma\\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{matrix} & \sigma_2^{*2}I_n\end{pmatrix}\right) \qquad \cdots\cdots(5.9)$$

ここに σ_1^{*2}, σ_2^{*2}, l_{ij} は (5.7)(5.8)(5.6) で定めた定数,
以上のことから, §3 の F-検定が成立し, 同時検定では

検定方式II

$H_1: \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$ が真のときは

$$\frac{\|P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\|^2}{\|P_{S(C_1^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2 n-1}\sim F^1{}_{n-1}$$

$H_2: \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$ が真のときは

$$\frac{\|P_{\hat{c}_2}\hat{\mathbf{X}}\|^2}{\|P_{S(C_2^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2/n-1}\sim F^1{}_{n-1}$$

により各個別々に検定し, 検定統計量はそれぞれ異る。

Ξ の固有根 λ が 2 重根 σ^{*2} をもち, 対応する 2 次元の固有空間の直交単位ベクトルを $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c}_1)$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{c}_2)$ で, $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{l}=0$ $(i=1,\ 2)$ のときは, (5.5), …(5.8) から分るように $\sigma_1^{*2}=\sigma_2^{*2}=\sigma^{*2}$, $l=l_{ij}=0$ となり, $\boldsymbol{Z}$ の分布は,

$$\boldsymbol{Z}=Q_{12}\hat{\mathbf{X}}\sim N_{2n}\left(\left(\frac{\sqrt{n}\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{c}_1\|},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \frac{\sqrt{n}\boldsymbol{c}_2'\mu}{\|\boldsymbol{c}_2\|},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \right)',\ \sigma^{*2}I_{2n}\right),\ \text{となる。}$$

各正射影ベクトルの独立性は次のようになる。

$$\langle P_{\hat{c}_1}\hat{\mathbf{X}}\rangle \perp\!\!\!\perp \langle P_{\hat{c}_2}\hat{\mathbf{X}}\rangle,\quad P_{S(C_1)}\hat{\mathbf{X}} \perp\!\!\!\perp P_{S(C_2)}\hat{\mathbf{X}}。$$

$H_{12}: \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$, $\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$ が真のときは

$\|P_{S(\hat{c}_1,\hat{c}_2)}\hat{\mathbf{X}}\|^2\sim\sigma^{*2}\chi^2_2$ (under $\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$, $\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$ is true)。

$\|P_{S(C_1^-,C_2^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2\sim\sigma^{*2}\chi^2_{2(n-1)}$ (absolutely) より

$$\left.\frac{\|P_{S(\hat{c}_1\hat{c}_2)}\hat{\mathbf{X}}\|^2/2}{\|P_{S(C_1^-,C_2^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2/2(n-1)}\sim F^2_{2(n-1)}\right)\quad (\text{under } \boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0,\ i=1,\ 2,\ \text{is true})$$

である。

このことから $\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=0$, $\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{\mu}=0$ の同時検定が行える。

これを拡張して, 次の定理を得る。

***Th* 4.** Ξ の固有根として λ^* が r 重根であるとき, λ^* に対応する固有空間 $S(\lambda^*)$ とすると, $\dim S(\lambda^*)=r$ である

(1) $S(\lambda^*)\ni \boldsymbol{1}_a$ のとき, $S(\lambda^*)=S(\boldsymbol{1}_a)\oplus S^*$, $S^*=S(\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots\ \boldsymbol{c}_{r-1})$, $\boldsymbol{c}_i$ は互に直交。

$\underset{(r-1)}{H}: S^*\perp\boldsymbol{\mu} \Longleftrightarrow \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{\mu}=\cdots=\boldsymbol{c}_{r-1}'\boldsymbol{\mu}=0$ が真のとき

$\|P_{S(\hat{c}_1,\hat{c}_2\cdots\hat{c}_{r-1})}\hat{\mathbf{X}}\|^2\sim\lambda^*\chi^2_{r-1}$ (under H is true)

$\|P_{S(C_1^-,C_2^-,\cdots C_{r-1}^-)}\hat{\mathbf{X}}\|^2\sim\lambda^*\chi^2_{(n-1)(r-1)}$ (absolutely) である。

これより**検定方式III**をうる。

$$\frac{\| P_{S(\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_{r-1})}\hat{\mathbf{X}} \|^2/r-1}{\| P_{S(c_1^-,c_2^-,\cdots c_{r-1}^-)}\hat{\mathbf{X}} \|^2/(n-1)(r-1)} \sim F_{(n-1)(r-1)}^{r-1} \quad \text{(under H is true)}$$

(2) $S(\lambda^*)\perp \boldsymbol{1}_a$ のときは，$S^*=S(\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_r)$ とすると，

$\underset{r}{H}: S^* \perp \boldsymbol{\mu} \Longleftrightarrow \boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots r)$ が真のとき

$\| P_{S(\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_r)}\hat{\mathbf{X}} \|^2 \sim \lambda^*\chi_r^2 \quad (\text{under } \underset{r}{H} \text{ is true})$

$\| P_{S(c_1^-,\cdots,c_r^-)}\hat{\mathbf{X}} \|^2 \sim \lambda^*\chi^2_{r(n-1)} \quad (\text{absolutely})$

よって

$$\frac{\| P_{S(\hat{c}_1\cdots\hat{c}_r)}\hat{\mathbf{X}} \|^2/r}{\| P_{S(c_1^-,\cdots,c_r^-)}\hat{\mathbf{X}} \|^2/r(n-1)} \sim F^r_{(n-1)r} \quad (\text{under } \underset{r}{H} \text{ is true})。$$

Th 4 の方式での仮説検定法とその適用例を，先の第 24 号の小文では検定法(1)として示し，分割法実験，単純繰返し実験，two-type diagonol 3×3 の Ξ の分散分析に適用した。この方式での検定のデメリットは $\boldsymbol{c}_1$，$\cdots \boldsymbol{c}_r$ が Ξ の固有根 λ^* に対応する固有空間の直交ベクトルで，$\boldsymbol{c}_i$ から $\hat{\boldsymbol{c}}_i$ $(i=2,\ \cdots n)$ を作るとき，$\hat{\boldsymbol{c}}_i$ は一般的に Ξ の elements ξ_{ij} の関数となり，Ξ が未知のとき $\| P_{S(\hat{c}_1\cdots\hat{c}_r)}\hat{\mathbf{X}} \|^2$ や $\| P_{S(c_1^-,\cdots c_r^-)}\hat{\mathbf{X}} \|^2$ の計算が出来ないことである。しかし上述の分割法実験，単純繰返し実験等の場合は $\hat{\boldsymbol{c}}_i$ が ξ_{ij} に無関係に決定されることや，また $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{l}_a=0$ でもあるから前論文にあるように $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu}=0$, $i=1\cdots r$ の同時検定が一つの統計量の算出で可能となる。

追記。本小文は，宇喜多，小野の “Generalized Linear Model の場合の仮説検定について”明星大学紀要 (理工学部) 1987 をうけて，検定法 1 と検定法 2 の関連，すなわち検定法 2 は検定法 1 の特別な場合であることを主張するものであるとともに，一般的検定法 1 の理論的裏付けを行ったものである。

この研究に関する一部分は，引用論文 5) で発表済である。

引 用 文 献

1) 宇喜多義昌：行列正規分布とその応用・・明星大学紀要 (理工学部)。1986
2) Y. Ukita & K. Noda : About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manova (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1986.
3) Y. Ukita & K. Noda : Testing Hypotheses on Generalized Linears Models in ANOVA (ISI 46th Contributed Papers) 1987.
4) 宇喜多義昌，小野英夫；Generalized Linear Model の場合の仮説検定について 明星大学紀要 (理工学部)1987。
5) 宇喜多義昌，“Generalized Linear Model の場合の F-検定量について ” 文部省科学研究費総合研究 A「多変量データ解析の理論と適用の研究」予稿集 (1987)。
6) 宇喜多義昌，野田一夫。“Generalized Linear Model の場合の F-検定量について (I), (II)” 日本数学春季研究会，統計数学予稿集 (1988)。