

# Generalized Linear Model の場合の 仮説検定について

宇喜多 義 昌\*・小 野 英 夫\*\*

## §1. Introduction と Summary

### Generalized Linear Model の定義

$p$  変量ベクトル  $\mathbf{x}$  が, 平均ベクトル,  $E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i p_i$ , ここに,  $\mathbf{a}_i$  は既知ベクトル,  $p_i$  は未知母数とする。  $i=1, 2, \dots, 3$  にわたる。

分散共分散行列  $V(\mathbf{x}) = E$ , ここに  $E > 0$  である。このとき,

「 $\mathbf{x}$  を Generalized Linear Model をなす」という。

一般には,  $\mathbf{x}$  が  $p$ -変量正規分布をなすとする。すなわち

$$\mathbf{x} \sim N_p \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i p_i, E \right) \quad \dots\dots (1.1)$$

である。便宜上  $m \equiv \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i p_i$  とかく。

(1.1) の場合の例としては,

(1.1.1) 分割法実験 (Split Plot Design)

(1.1.2) 単純な同対象のくり返し実験 (Repeated Observation)

(1.1.3) 系統的くり返し実験 (Systematic Repeated Observation)

等々がある。本小文は此等の場合につき, 「母平均ベクトル  $\mathbf{m}$  が, 特定なベクトル空間  $S^*$  に垂直であるとする帰無仮説  $H_0$ , すなわち

$$H_0; \mathbf{m} \perp S^* \quad \dots\dots (1.2)$$

の検定法」について述べる。

$S^* \perp \mathbf{m}$  を解析的に表現する,  $\dim S^* = f$  とすると,  $S^*$  の基底となる  $f$  個の独立なベクトル  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_f$  に対して

$$\mathbf{c}_i' \mathbf{m} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, f) \quad \dots\dots (1.3)$$

ということと同値である。すなわち

$$(1.2) \iff (1.3)$$

である。

単なる Linear Model のとき, すなわち

$$E = \sigma^2 I_p \quad \dots\dots (1.4)$$

のときは,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  の張るベクトル空間  $S(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \equiv S(A)$  と,  $p$  次元ユークリッド空間  $R^p$  の中で  $S(A)$  の直交補空間  $S^\perp(A)$  とを考え, 前者  $S(A)$  を推定空間といい,

後者  $S^\perp(A)$  を誤差空間という。

(1.4) のとき、すなわち  $\mathbf{x} \sim N_p(\Sigma \mathbf{a}_i p_i, \sigma^2 I_p)$  なら  $S(A)$  の任意の部分ベクトル空間  $S^*$  に対して

仮説  $H_{S^*}: \mathbf{m} \perp S^*$

の検定 ( $F$ -検定) が可能で

$$\|P_{S^*} \mathbf{x}\|^2 = \sigma^2 \chi_f^2 (2\lambda = \|P_{S^*} \mathbf{m}\|^2) \quad \dots\dots (1.5)$$

$$\|P_{S^{\perp}(A)} \mathbf{x}\|^2 = \sigma^2 \chi_g^2 \quad \dots\dots (1.6)$$

$$\|P_{S^*} \mathbf{x}\|^2 \perp \|P_{S^{\perp}(A)} \mathbf{x}\|^2 \quad \dots\dots (1.7)$$

であることが知られている。

ここに  $P_S \mathbf{x}$  は  $\mathbf{x}$  の空間  $S$  への正射影 (ベクトル) を意味し、 $\|P_S \mathbf{x}\|^2$  は正射影の norm の平方である。また、 $\|P_{S^*} \mathbf{x}\|^2$  は  $\sigma^2 \chi_f^2 (2\lambda = \|P_{S^*} \mathbf{m}\|^2)$  としたのは前者は  $\sigma^2 \chi_f^2$  分布をなす統計量である意味である。(1.6) についても同様である。また (1.7) の  $\perp$  は、左右の 2 種類の統計量が統計的に独立という意味である。また、 $f = \dim S^*$ ,  $g = \dim S^\perp(A)$  である。

(1.5), (1.6), (1.7) より、仮説  $H_{S^*}$  が真のときは

$$\frac{\|P_{S^*} \mathbf{x}\|^2 / \dim S^*}{\|P_{S^{\perp}(A)} \mathbf{x}\|^2 / \dim S^\perp(A)} = F_{\dim S^*, \dim S^\perp(A)}^{\dim S^*} \quad (F \text{ 統計量}) \quad \dots\dots (1.8)$$

となり、仮説  $H_{S^*}$  の統計的仮説検定が可能である。このことはよく知られていることである。

(1.8) による検定法は、 $V(\mathbf{x}) = \sigma^2 I_p$  であること。また  $S^*$  は、 $S^* \subset S(A)$  で、任意に固定された部分空間であることに注目すべきである。

2 節以下で述べる検定は、 $V(\mathbf{x}) = E$  である。 $S(A)$  の部分空間  $S^*$  は任意という訳には行かず、特定された  $S^*$  について、仮説「 $\mathbf{m} \perp S^*$ 」が  $F$  検定されることを述べる。

その  $S^*$  の決定の方法は

方法 1:  $E$  の固有根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  と対応する固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  と固有ベクトル空間に注目して  $S^*$  を決める方法。

方法 2: 「 $\mathbf{m} \perp S^*$ ,  $S^* \subset S(A)$ 」が統計的に意味があるとき、 $\|P_{S^*} \mathbf{x}\|^2 = \sigma^{*2} \chi_f^2 (2\lambda = \|P_{S^*} \mathbf{m}\|^2)$ ,  $f = \dim S^*$  なる  $\sigma^{*2}$  に注目し、 $S^\perp(A)$  の部分空間  $S^{*\perp}$  で

$$\|P_{S^{*\perp}} \mathbf{x}\|^2 = \sigma^{*2} \chi_g^2, \quad g = \dim S^{*\perp}$$

となる  $S^{*\perp}$  が存在するかどうか調べ、存在するとき、 $F$ -検定で仮説検定する。

(注) 勿論、方法 1, 方法 2 共に各種の  $\|P_S \mathbf{x}\|^2$  を用いるが、これが母数  $p_1, \dots, p_m$  や  $E$  の elements  $\xi_{ij}$  に無関係に計算可能であることは言をまたない。

以下第 2 節では、3 段の Split Plot Design について述べる。第 3 節では、Repeated Observation で Subject の効果がある場合について述べる。第 4 節では、Systematic Repeated Observation で  $E$  が two type diagonal matrix の場合を方法 1 で論ずる。

更に第 5 節では第 4 節と同じ分布をもつ  $\mathbf{x}$  につき、方法 2 によって、仮説検定を行う。

## § 2. Split Plot Design (3 step) の場合 (S.P.D とかく)

$k$  step の S.P.D で、 $r$ -反復の場合を論ずべきであるが、ここでは 3-step, 2 反復の

S. P. D で第 1 因子 2 水準, 第 2 因子も 2 水準, 第 3 因子も 2 水準について論ずる。しかし解説は一般性を失しないように説明するから S. P. D が  $k$ -step で, 第 1 因子  $n_1$  水準, 第 2 因子  $n_2$  水準, …第  $k$  因子  $n_k$  水準で,  $r$  反復の場合も容易に理解出来るであろう。

反復	$R_1$								$R_2$							
A 因子	$A_1$				$A_2$				$A_1$				$A_2$			
B 因子	$B_1$		$B_2$		$B_1$		$B_2$		$B_1$		$B_2$		$B_1$		$B_2$	
C 因子	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
測定値 (實現位)	80	82	75	70	100	105	90	80	60	62	52	50	80	80	70	60
小 計	(162)		(145)		(205)		(170)		(122)		(102)		(160)		(130)	
中 計	((307))				((375))				((224))				((290))			
反復計	((682))								((514))							

$$\begin{aligned} \text{測定値}(u_{111}, u_{112}, u_{121}, u_{122} | u_{211}, u_{212}, u_{221}, u_{222}) (\dot{u}_{111}, \dot{u}_{112}, \dot{u}_{121}, \dot{u}_{122} | \dot{u}_{211}, \dot{u}_{212}, \dot{u}_{221}, \dot{u}_{222}) \\ = u_1' \qquad \qquad \qquad = u_2' \end{aligned}$$

$$u_{ijk}, \dot{u}_{ijk} \text{ の平均値 } E(u_{ijk}) = E(\dot{u}_{ijk}) = \mu_{ijk}$$

$x_i, x_i'$  は第 1 実験誤差,  $y_i, y_i'$  は第 2 実験誤差,  $z_i, z_i'$  は第 3 実験誤差,  $R_1, R_2$  はそれぞれ第 1 反復, 第 2 反復での共通効果で,  $R_1 + R_2 = 0$  として一般性失しない。 $u_{ijk}$  の構造式は

$$u_1 \begin{cases} u_{111} = \mu_{111} + R_1 + x_1 + y_1 + z_1, & x_1 + y_1 + z_1 = e_1 \\ u_{112} = \mu_{112} + R_1 + x_1 + y_1 + z_2, & x_1 + y_1 + z_2 = e_2 \\ u_{121} = \mu_{121} + R_1 + x_1 + y_2 + z_2', & " \\ u_{122} = \mu_{122} + R_1 + x_1 + y_2 + z_2', & " \\ u_{211} = \mu_{211} + R_1 + x_1' + y_1' + z_1'', & " \\ u_{212} = \mu_{212} + R_1 + x_1' + y_1' + z_2'', & " \\ u_{221} = \mu_{221} + R_1 + x_2' + y_2' + z_1''', & " \\ u_{222} = \mu_{222} + R_1 + x_2' + y_2' + z_2''', & x_2' + y_2' + z_2''' = e_8 \end{cases} \dots\dots (2.1)$$

とかける。

$$(\mu_{111}, \mu_{112}, \dots, \mu_{222}) = \mu' \quad (e_1, e_2, \dots, e_8) = e_8'$$

前者を平均ベクトル, 後者を誤差ベクトルとすると,

$$(2.1) \Rightarrow, u_1 = (I_8, 1_8) \begin{bmatrix} \mu' \\ R_1 \end{bmatrix} + e_8 \quad \dots\dots (2.2)$$

ただし,  $I_8$  は  $8 \times 8$  の単位行列,  $1_8' = \underbrace{(1, 1, 1, \dots, 1)}_{8 \text{ 個の } 1}$  である。同様に

$$u_2 = (I_8, 1_8) \begin{bmatrix} \mu' \\ R_2 \end{bmatrix} + e_8 \quad \dots\dots (2.3)$$

(2.2), (2.3) より

$$u \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_8 & 1_8 & 0 \\ I_8 & 0 & 1_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_8 \\ e_8 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (2.4)$$

(2.4) はつぎのようにまとめられる。

$$u = [a_1 a_2 \dots a_8 : b_1 b_2] \begin{bmatrix} \mu \\ R \end{bmatrix} + e_{16} = m + e_{16} \quad \dots\dots (2.5)$$

ここに

$$\begin{aligned} a_1' &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ a_2' &= (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ &\vdots \\ a_8' &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \\ b_1' &= (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ b_2' &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 : 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ R &= (R_1, R_2) \\ e_{16}' &= (e_8', e_8') \dots\dots \text{誤差ベクトルという} \end{aligned}$$

いま  $e_{16} \sim N_{16}(0, V(e_{16}))$  とする。

しかも  $V(e_{16}) \equiv E$  とし,  $A = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ ,  $B = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + l\sigma_3^2$ ,  $C = \sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + b\sigma_3^2$  ( $\sigma_i^2$  は第  $i$ -step の実験誤差の分散,  $b, d, l$  は定数)。とすると。

$$E = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} A & B & C & C & & & & \\ B & A & C & C & & & & \\ & & (\frac{E}{L}) & & 0 & & & \\ C & C & A & B & & & & \\ C & C & B & A & & & & \\ & & & & A & B & C & C \\ & & & & B & A & C & C \\ 0 & & & & & & (\frac{E}{L}) & \\ & & & & C & C & A & C \\ & & & & C & C & B & A \\ \hline & & & & 0 & & & \left( \begin{array}{cc} \frac{E}{L} & 0 \\ 0 & \frac{E}{L} \end{array} \right) \equiv \frac{E}{M} \end{array} \right]$$

この  $E$  の固有根  $\lambda$  と固有空間  $S[\lambda]$  は

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = A + B + 2C & \lambda_2 = A + B - 2C & \lambda_3 = A - B \\ 4 \text{ 重根} & 4 \text{ 重根} & 8 \text{ 重根} \\ S[\lambda_1] & S[\lambda_2] & S[\lambda_3] \end{array}$$

$$\begin{aligned}
S[\lambda_1] &= S \begin{bmatrix} (1_{16}) & (c_1) & (c_2) \\ 1_4 & 1_4 & 1_4 & 1_4 \\ 1_4 & 1_4 & -1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & 1_4 & -1_4 \\ 1_4 & -1_4 & -1_4 & 1_4 \end{bmatrix} \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{推定空間ベクトル}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{誤差空間ベクトル}} \\
S[\lambda_2] &= S \begin{bmatrix} (c_3) & (c_4) \\ 1_2 & 1_2 & 1_2 & 1_2 \\ -1_2 & -1_2 & -1_2 & -1_2 \\ 1_2 & -1_2 & 1_2 & -1_2 \\ -1_2 & 1_2 & -1_2 & 1_2 \\ 1_2 & 1_2 & -1_2 & -1_2 \\ -1_2 & -1_2 & 1_2 & 1_2 \\ 1_2 & -1_2 & -1_2 & 1_2 \\ -1_2 & 1_2 & 1_2 & -1_2 \end{bmatrix} \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{推定空間ベクトル}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{誤差空間ベクトル}} \\
S[\lambda_3] &= S \begin{bmatrix} (c_5) & (c_6) & (c_7) & (c_8) \\ e_1 & e_2 & e_1 & e_2 & e_1 & e_2 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & -e_1 & -e_2 & e_1 & e_2 & -e_1 & -e_2 \\ e_1 & e_2 & e_1 & e_2 & -e_1 & -e_2 & -e_1 & -e_2 \\ e_1 & e_2 & -e_1 & -e_2 & -e_1 & -e_2 & e_1 & e_2 \end{bmatrix} \\
&\quad \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{\text{推定空間ベクトル}} \quad \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{\text{誤差空間ベクトル}}
\end{aligned}$$

ここに  $e_1' = (1, -1, 1, -1)$ ,  $e_2' = (1, -1, -1, 1)$

$S[\lambda_3]$ 次元 8	$S[\lambda_2]$ 次元 4	$S[\lambda_1]$ 次元 4
$S(c_5) \rightarrow C$ の主効果差検定	$S(c_3) \rightarrow B$ の主効果差	$S(1_{16})$
$S(c_6) \rightarrow A \times C$ の有意差検定	$B_1 - B_2 = 0$ の検定	$S(1_4' 1_4' - 1_4' - 1_4') \rightarrow R_1 - R_2 = 0$
$S(c_7) \rightarrow B \times C$ "	$S(c_4) \rightarrow A \times B$ の有意	$c_1'$ の検定
$S(c_8) \rightarrow A \times B \times C$ "	差検定	$S(1_4', -1_4', 1_4', -1_4') \rightarrow A$ の主
		$c_2'$ 効果差
		$A_1 - A_2 = 0$
		の検定
	$S_2^\perp$ 次元 2	
		$S_1^\perp$ 次元 1
$S_3^\perp$ 次元		

推定空間

誤差空間

$\|P_e x\|^2 = [e(v)'x]^2$ ,  $e(v)$  は  $v$  方向の単位ベクトルとする。

$$\begin{aligned}
\|P_{S[\lambda_1]} u\|^2 &= \|P_{1_{16}} u\|^2 + \|P_{c_1} u\|^2 + \|P_{c_2} u\|^2 + \|P_{S_1^\perp} u\|^2 \\
&= \lambda_1 \dot{\lambda}_1^2 \{[e(1_{16})'m]^2\} + \lambda_1 \dot{\lambda}_1^2 \{[e(c_1)'m]^2\} + \lambda_1 \dot{\lambda}_1^2 \{[e(c_2)'m]^2\} + \lambda_1 \chi_1^2
\end{aligned}$$

なることから

$$H_1: c_1' m = 0 \leftrightarrow R_1 - R_2 = 0 \text{ の検定には, } \|P_{c_1} u\|^2 / \|P_{S_1^\perp} u\|^2 \sim F_1^1$$

$$H_2: c_2' m = 0 \leftrightarrow A \text{ の主効果差 } \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \text{ の検定には, } \|P_{c_2} u\|^2 / \|P_{S_1^\perp} u\|^2 \sim F_1^1$$

$$\begin{aligned}
\|P_{S[\lambda_2]} u\|^2 &= \|P_{c_3} u\|^2 + \|P_{c_4} u\|^2 + \|P_{S_2^\perp} u\|^2 \\
&= \lambda_2 \{\dot{\lambda}_1^2 \{[e(c_3)'m]^2\} + \dot{\lambda}_1^2 \{[e(c_4)'m]^2\} + \lambda_2 \chi_2^2\} \text{ より}
\end{aligned}$$

$H_3 : c_3'm=0$ ,  $B$  の主効果差  $\beta_1-\beta_2=0$  の検定に

$$\|P_{e_3}u\|^2 / \frac{\|P_{S_2^\perp}u\|^2}{2} \sim F_2^1$$

$H_4 : c_4'm=0$ ,  $A \times B$  の有意差検定に

$$\|P_{e_4}u\|^2 / \frac{\|P_{S_2^\perp}u\|^2}{2} \sim F_2^1$$

$H_{3,4} : c_3'm=0, c_4'm=0$  の同時成立の検定に

$$\frac{\|P_{S(\epsilon_3, \epsilon_4)}u\|^2/2}{\|P_{S_2^\perp}u\|^2/2} \sim F_2^2$$

$$\begin{aligned} \|P_{S(\lambda_3)}u\|^2 &= \sum_{\alpha=5}^8 \|P_{e_\alpha}u\|^2 + \|P_{S_2^\perp}u\|^2 \\ &= \lambda_3 \left\{ \sum_{\alpha=5}^8 \hat{\chi}_1^2 \{[e(c_\alpha)'m]^2\} \right\} + \lambda_3 \chi_4^2 \text{ より} \end{aligned}$$

$H_\alpha : c_\alpha'm=0$  の検定では

$$\|P_{e_\alpha}u\|^2 / \frac{\|P_{S_2^\perp}u\|^2}{4} \sim F_4^1 \quad (\alpha=5, 6, 7, 8)$$

$H_{\alpha\beta} : c_\alpha'm=0, c_\beta'm=0$  の同時成立の検定に

$$\frac{\|P_{S(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta)}u\|^2/2}{\|P_{S_2^\perp}u\|^2/4} \sim F_4^2$$

に等々で  $F$ -検定法が得られる。

§2 の数値例については,

$$\begin{aligned} \|P_{S(\lambda_1)}u\|^2 &= 92287.5 \\ \|P_{1_6}u\|^2 &= 89401, \quad \|P_{e_1}u\|^2 = 1764.1, \quad \|P_{e_2}u\|^2 = 1122.25 \\ \|P_{S_1^\perp}u\|^2 &= 9228.7 - 1764.1 - 1122.25 - 89401 = 0.25 \end{aligned}$$

$H_{e_1} : R_1=R_2$  に対して,

$$1764/0.25 = 67056 > F_1^1(0.01) \text{ より}$$

仮説  $R_1=R_2$  は棄却される。

$H_{e_2} : A$  の主効果,  $\alpha_1=\alpha_2$  検定は,  $1122.25/0.25 = 4489 > F_1^1(0.01)$  で  $H_{e_2}$  は棄却,

$$\begin{aligned} \|P_{S(\lambda_2)}u\|^2 &= 703.5, \quad \|P_{e_3}u\|^2 = 650.25, \quad \|P_{e_4}u\|^2 = 49.00 \\ \|P_{S_2^\perp}u\|^2 &= 703.5 - 650.25 - 49.00 = 4.25 \\ \|P_{S_2^\perp}u\|^2 \div 2 &= 4.25 \div 2 = 2.125 \end{aligned}$$

$H_{e_3} : B$  の主効果均一の仮説に対する仮説  $c_3'm=0$

$$650.25/2.125 = 306 > F_2^1(0.01) = 93.50$$

仮説  $H_{e_3}$  は棄却,

$H_{\alpha\beta} : A \times B$  の交互作用  $(\alpha\beta)_{11}=(\alpha\beta)_{12}=(\alpha\beta)_{21}=(\alpha\beta)_{22}$  の仮説

$$49/2.125 = 22.12 > F_2^1(0.05) = 18.51$$

危険率 5% で仮説は棄却される。

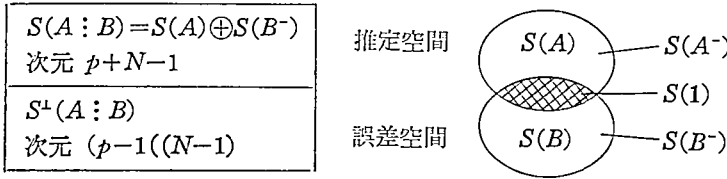
$$\begin{aligned} \|P_{S(\lambda_3)}u\|^2 &= 131, \quad \|P_{e_5}u\|^2 = 20.25, \quad \|P_{e_6}u\|^2 = 9.00 \\ \|P_{e_7}u\|^2 &= 8.1, \quad \|P_{e_8}u\|^2 = 12.25 \text{ より} \\ \|P_{S_3^\perp}u\|^2 &= 8.5, \quad 8.5 \div 4 = 2.125 \end{aligned}$$



$$\sigma^2[\rho E_p + 1 - \rho I_p] = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

このとき, 推定空間  $= S(A : B) = S(A) \oplus S(B^-)$  である。ここに  $S(B^-) \equiv S(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_N, \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_N, \dots, \mathbf{b}_{N-1} - \mathbf{b}_N)$ ,  $S(A) \cap S(B) = S(1_{Np})$ ,  $\dim S(A : B) = p + N - 1$  である。  
誤差空間  $S^\perp(A : B)$ ,  $\dim S^\perp(A : B) = (p-1)(N-1)$  である。

また  $S(A^-) = S(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_p, \dots, \mathbf{a}_{p-1} - \mathbf{a}_p)$  とする



$\tilde{E}$ の固有根	$\lambda_1 = \sigma^2(1 + \bar{\rho} - 1\rho)$	$\lambda_2 = \sigma^2(1 - \rho)$
重 根 数	$N$	$N(p-1)$
固 有 空 間	$S[\lambda_1]$	$S[\lambda_2]$

しかも

$$S[\lambda_1] = S \begin{bmatrix} 1_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_p \end{bmatrix} = S \underbrace{\begin{bmatrix} 1_p & \vdots & 1_p & 0 & \cdots & 0 \\ 1_p & \vdots & 0 & 1_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1_p & \vdots & -1_p & -1_p & \cdots & -1_p \end{bmatrix}}_{\text{推定空間ベクトル}} = S(1_{Np}) \oplus S(B^-)$$
  

$$S[\lambda_2] = S \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & & -1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & & -1 & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right] \begin{array}{l} \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{(p-1)(N-1)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$
  

$$= S(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_p, \dots, \mathbf{a}_{p-1} - \mathbf{a}_p : C)$$

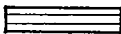
$$= S(A^- : C) = S(A^-) \oplus S(C)$$

$$\dim S(A^-) = p-1$$

$$\dim S(C) = (p-1)(N-1)$$
  

(推定空間ベクトル)      誤差空間ベクトル  
(互に直交する)



$S[\lambda_2]$ 次元 $N(p-1)$	$S[\lambda_1]=S(B)$ 次元 $N$
$S(a_1-a_p, a_2-a_p, \dots, a_{p-1}-a_p)=S(A^-)$ 次元 $p-1$	$S(B)$ 次元 $N$
$S(C)$ 次元 $(N-1)(p-1)$	 誤差空間部分

$$\begin{aligned}\|P_{S[\lambda_2]}\hat{\mathbf{x}}\|^2 &= \|P_{S(A^-)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|P_{S(C)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \\ &= \lambda_2^2 \chi_{p-1}^2 [2\lambda = \|P_{S(A^-)}\mathbf{m}\|^2] + \lambda_2^2 \chi_{(N-1)(p-1)}^2\end{aligned}$$

ここに

$$\|P_{S(A^-)}\mathbf{m}\|^2 = \|P_{S(A)}\mathbf{m}\|^2 - \|P_1\mathbf{m}\|^2 = N \sum_{i=1}^p (\mu_i - \bar{\mu})^2$$

となる。

$H$  帰無仮説  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p \iff \sum (\mu_i - \bar{\mu})^2 = 0$  に対する検定統計量は、

$$\frac{\|P_{S(A^-)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 / p - 1}{\|P_{S(C)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 / (N-1)(p-1)} \sim F_{(N-1)(p-1)}^{p-1}$$

(仮説  $H$  が真のとき)

この場合

$H_i: (a_i - a_p)' \mathbf{m} = (\mu_i - \mu_p)N = 0 \iff \mu_i - \mu_p = 0$  の検定統計量もつぎのように得られる。

$$\|P_{a_i - a_p}\hat{\mathbf{x}}\|^2 / \frac{\|P_{S(C)}\hat{\mathbf{x}}\|^2}{(N-1)(p-1)} \sim F_{(N-1)(p-1)}^1$$

(仮説  $H_i$  が真のとき)

〈例〉 4人の成人男子に 毎晩  $T_1$  (日本酒 1 合),  $T_2$  (1.5 合),  $T_3$  (2 合) を 3 日間にわたり無作為の順序で飲まして 30 分後の酔度を調べて次の測定値を得た。

対象者	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	$T_i$
$T_1$	30	20	25	15	90
$T_2$	35	30	20	25	110
$T_3$	40	40	30	30	140
					340

誤差平方和  $= \|P_{S(C)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 = 100$ , 自由度  $f = 6$

$$\|P_{S(A^-)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 = 90^2 + 110^2 + 140^2 / 4 - 340^2 / 12 = 317$$

仮説  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  に対して

$$\frac{317/2}{100/6} = 9.51 > F_6^2(0.05) = 5.143$$

酔度の母平均均一の仮説は棄却される,

§ 4. Systematic Repeated Observation で,  $\Sigma$  が two type diagonal matrix の場合

$$\mathbf{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Delta(a, b)), \quad \Delta(a, b) \equiv \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} > 0, \quad \boldsymbol{\mu}' = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

から size  $N$  の無作為 sample  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  で,

(4.1) 各  $\mathbf{x}_i$  は Subject effect  $R_i$  がないとき

(4.2) 各  $\mathbf{x}_i$  に固有な Subject effect  $R_i$  があるとき, ただし  $\sum_{i=1}^N R_i = 0$  として一般性を失わない。

に分けてテスト可能な母数 1 次方程式を調べてみる,

(4.1) の場合 (Subject effect のないとき)

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{e}_{3N}, \quad V(\mathbf{e}_{3N}) = \begin{bmatrix} \Delta(a, b) & & 0 \\ & \Delta(a, b) & \\ 0 & & \Delta(a, b) \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{m} + \mathbf{e}_{3N}.$$

このとき  $V(\mathbf{e}_{3N})$  の固有根, 重根度, 固有空間は次のようになる,

固有根	$\lambda_1 = a$	$\lambda_2 = a - \sqrt{2}b$	$\lambda_3 = a + \sqrt{2}b$
重根度	$N$	$N$	$N$
固有ベクトル空間	$S[\lambda_1]$	$S[\lambda_2]$	$S[\lambda_3]$

$$S[\lambda_1] = S \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ -1 & & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ & & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \hline & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \dots, \mathbf{f}_N \\ \text{直交誤差} \\ \text{空間ベクトル} \end{matrix} = S(\mathbf{d}_1) \oplus S(F)$$

$$\parallel \mathbf{d}_1 \in S(A)$$

$$S[\lambda_2] = S \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \cdots & 0 & \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \cdots & 0 & \\ & \hline & 1 & & & \\ \vdots & & & & \\ & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -\sqrt{2} & \\ & & & \hline & & & 1 & \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \\ -\sqrt{2} & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ -\sqrt{2} & \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \cdots, \mathbf{g}_N & \\ 1 & \text{直交誤差} & \\ \vdots & \text{空間ベクトル} & \\ 1 & & \\ -\sqrt{2} & & \\ 1 & & \end{bmatrix} = S(\mathbf{d}_2) \oplus S(G)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \mathbf{d}_2 \in S(A) \end{array}$$

$$S[\lambda_3] = S \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \cdots & 0 & \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ & \hline & 1 & & & \\ \vdots & & & & \\ & & & 1 & \\ 0 & 0 & & \sqrt{2} & \\ & & & \hline & & & 1 & \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \\ \sqrt{2} & & \\ 1 & & \\ 1 & & \\ \sqrt{2} & \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \cdots, \mathbf{h}_N & \\ 1 & \text{直交誤差} & \\ \vdots & \text{空間ベクトル} & \\ 1 & & \\ \sqrt{2} & & \\ 1 & & \end{bmatrix} = S(\mathbf{d}_3) \oplus S(H)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \mathbf{d}_3 \in S(A) \end{array}$$

$S[\lambda_1]$	$S[\lambda_2]$	$S[\lambda_3]$	
$S(\mathbf{d}_1)$	$S(\mathbf{d}_2)$	$S(\mathbf{d}_3)$	推定空間 $S(A)$
$S(F)$	$S(G)$	$S(H)$	誤差空間 $S^\perp(A)$
$=S_1$	$=S_2$	$=S_3$	

このことから

$$\begin{aligned} \|P_{S[\lambda_1]}\hat{\mathbf{x}}\|^2 &= \|P_{\mathbf{d}_1}\hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|P_{S(F)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \\ &= a\hat{\chi}_1^2 \{[e'(\mathbf{d}_1)\mathbf{m}]^2\} + a\chi_{N-1}^2 \end{aligned} \quad \cdots (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} \|P_{S[\lambda_2]}\hat{\mathbf{x}}\|^2 &= \|P_{\mathbf{d}_2}\hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|P_{S(G)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \\ &= (a - \sqrt{2}b)\hat{\chi}_1^2 \{[e'(\mathbf{d}_2)\mathbf{m}]^2\} + (a - \sqrt{2}b)\chi_{N-1}^2 \end{aligned} \quad \cdots (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \|P_{S[\lambda_3]}\hat{\mathbf{x}}\|^2 &= \|P_{\mathbf{d}_3}\hat{\mathbf{x}}\|^2 + \|P_{S(H)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \\ &= (a + \sqrt{2}b)\hat{\chi}_1^2 \{[e'(\mathbf{d}_3)\mathbf{m}]^2\} + (a + \sqrt{2}b)\chi_{N-1}^2 \end{aligned} \quad \cdots (4.1.3)$$

ここに  $e(\mathbf{d}_i)$  は  $\mathbf{d}_i$  方向の単位ベクトルとした。

したがって Testable Parameter Equation の各々は,

$$H_1 : e'(\mathbf{d}_1)\mathbf{m} = 0 \leftrightarrow \mu_1 = \mu_3$$

$$H_2 : e'(d_2)m=0 \leftrightarrow \mu_1 - \sqrt{2}\mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$H_3 : e'(d_3)m=0 \leftrightarrow \mu_1 + \sqrt{2}\mu_2 + \mu_3 = 0$$

$H_i$  に対する  $F$  検定量は, つぎの通りである。

$$\|P_{d_i}\hat{\mathbf{x}}\|^2 / \frac{\|P_{S_i}\hat{\mathbf{x}}\|^2}{N-1} \sim F_{N-1}^1$$

(4.2) の場合 (Subject effect がある場合)

このとき構造は,

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 1_3 & 0 \cdots 0 \\ I_3 & 0 & 1_3 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ I_3 & 0 & 0 \cdots 1_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{3N} \quad \cdots (4.2.1)$$

$$= [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 : \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N] \begin{bmatrix} \mu \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{3N}$$

$$= \begin{bmatrix} A & : & B \\ (3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_{3N} = \mathbf{m} + \mathbf{e}_{3N} \quad \cdots (4.2.2)$$

で,

$$\mathbf{e}_{3N} \sim N_{3N}(0, \tilde{\mathbf{E}}), \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \Delta(a, b) & 0 \\ & \Delta(a, b) \\ 0 & \Delta(a, b) \end{pmatrix}_{3N \times 3N}$$

と考えられる。

推定空間  $S(A : B) = S(A : B^-) = S(A) \oplus S(B^-)$  であり,  $\dim S(A : B) = N+2$ ,

$\dim S(A) = 3$ ,  $\dim S(B^-) = N-1$  であり, 誤差空間  $S^\perp(A : B)$  の次元は  $2N-2$  である。

$S(A : B) = S(A) \oplus S(B^-)$	
次元 $N+2$	
$S^\perp(A : B)$	
次元 $2N-2$	

$S[\lambda_1]$ ,  $S[\lambda_2]$ ,  $S[\lambda_3]$  は (4.1) の場合と全く同じである。

$$S[\lambda_1] = S(d_1) \oplus S(F), \quad S(F) \subset S^\perp(A : B)$$

$$S[\lambda_2] = S(d_2) \oplus S(\bar{G}), \quad S(\bar{G}) \subset S^\perp(A : B)$$

$$S[\lambda_3] = S(d_3) \oplus S(\bar{H}), \quad S(\bar{H}) \subset S^\perp(A : B)$$

であることが示される。すなわち

$S[\lambda_3]$	$S[\lambda_2]$	$S[\lambda_1]$
$S(d_3)$	$S(d_2)$	$S(d_1)$
$d_3 = a_1 + \sqrt{2}a_2 + a_3$	$d_2 = a_1 - \sqrt{2}a_2 + a_3$	$d_1 = a_1 - a_3$
$S(B^-)$		
$S(\bar{H})$	$S(\bar{G})$	$S(F)$
		次元 $N-1$

$$\|P_d \hat{x}\|^2 = \lambda_1 \chi_1^2 [(e(d_1)'m)^2], \quad \|P_{S(F)} \hat{x}\|^2 = \lambda_1 \chi_{N-1}^2$$

ここに,  $\lambda_1 = a$  で,  $\|P_d \hat{x}\|^2 \perp \|P_{S(F)} \hat{x}\|^2$  である。

$H: e(d_1)'m = 0 \leftrightarrow \mu_1 - \mu_3 = 0$  が真のとき

$$\|P_d \hat{x}\|^2 / \frac{\|P_{S(F)} \hat{x}\|^2}{N-1} \sim F_{N-1} \quad \dots\dots (4.2.3)$$

このことから  $H$  の採否の検定を行うことが出来る。

## §5. 方法2による検定法

§2, §3, §4 の仮説検定法はいずれも §1 の中で述べた方法1による検定法であった。本節では方法2によって Testable Parameter Equations を求めてみよう, §5 の Systematic Repeated Observation で,  $E$  が  $3 \times 3$  の two type diagonal matrix で, Subject effect がある場合について調べる。すなわち  $x_1, x_2, \dots, x_N$  の構造は (4.2.1) とする。

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, \dots, b_N] \begin{bmatrix} \mu \\ R \end{bmatrix} + e_{3N} \\ &= \begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ R \end{bmatrix} + e_{3N} = m + e_{3N} \end{aligned}$$

$$e_{3N} \sim N_{3N}(0, \tilde{E}), \quad \tilde{E} = \begin{pmatrix} A(a, b) & & 0 \\ & A(a, b) & \\ 0 & & A(a, b) \end{pmatrix}$$

$$\text{推定空間 } S(A : B) = \underbrace{S(B^-) \oplus S(1_{3N})}_{S(B)} \oplus \overbrace{S(a_1 - a_2) \oplus S(a_1 + a_2 - 2a_3)}^{S(A)} \quad \dots\dots (5.1)$$

$$= S(B^-) \oplus S(1_{3N}) \oplus \underbrace{S(a_1 - a_3) \oplus S(a_1 - 2a_2 + a_3)}_{S(A^-)} \quad \dots\dots (5.2)$$

$$= S(B^-) \oplus S(1_{3N}) \oplus \underbrace{S(a_2 - a_3) \oplus S(-2a_1 + a_2 + a_3)}_{S(A^-)} \quad \dots\dots (5.3)$$

$(a_1 - a_2) \perp m$  の解析的意味は  $(a_1 - a_2)'m = 0$  である。

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)'(\mu_1 + R_1, \mu_2 + R_1, \mu_3 + R_1, \mu_1 + R_2, \mu_2 + R_2, \mu_3 + R_2, \dots, \\ & \quad \mu_1 + R_N, \mu_2 + R_N, \mu_3 + R_N)' \\ & = (\mu_1 - \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2) + \dots + (\mu_1 - \mu_2) = N(\mu_1 - \mu_2) = 0 \end{aligned}$$

より

$$(a_1 - a_2) \perp m \leftrightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (5.4)$$

また

$$\|P_{(a_1 - a_2)} \hat{x}\|^2 = \sigma^{*2} \chi_1^2 [\|P_{(a_1 - a_2)} m\|^2]$$

ここに

$$\sigma^{*2} = (a - b), \quad \|P_{(a_1 - a_2)} m\|^2 = \frac{N(\mu_1 - \mu_2)^2}{2}$$

より

$$\|P_{a_1-a_2}\hat{x}\|^2 = (a-b)\chi_1^2 \left[ \frac{N(\mu_1-\mu_2)^2}{2} \right] \quad \dots\dots(5.6)$$

一方、誤差空間  $S^\perp(A:B)$  の部分空間  $S$  で、 $\|P_S\hat{x}\|^2$  が  $(a-b)\chi_{f=\dim S}^2$  統計量となるようなベクトル空間  $S$  を見出したい、

たがいに直交する  $N$  個の  $3N$  次元ベクトル  $c_1, c_2, \dots, c_N$  の張るベクトル空間  $D_{(a-b)}$  とする、ここに

$$\begin{aligned} c_1' &= (1 \quad -1 \quad 0 \vdots 0 \quad 0 \quad 0 \vdots 0 \quad 0 \vdots \dots \vdots 0 \quad 0 \quad 0) \\ c_2' &= (0 \quad 0 \quad 0 \vdots 1 \quad -1 \quad 0 \vdots 0 \quad 0 \vdots \dots \vdots 0 \quad 0 \quad 0) \\ &\dots\dots\dots \\ c_N' &= (0 \quad 0 \quad 0 \vdots 0 \quad 0 \quad 0 \vdots 0 \quad 0 \vdots \dots \vdots 1 \quad -1 \quad 0) \end{aligned}$$

である。

$$D_{(a-b)} = S \left[ \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ -1 & 0_3 & 0_3 & \dots & 0_3 \\ 0 & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ 0_3 & -1 & 0_3 & \dots & 0_3 \\ & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & \dots & -1 \\ & & & & 0 \\ \hline \parallel & \parallel & \parallel & \dots & \parallel \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_N \end{array} \right] = S \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ -1 \\ 0 \\ \hline \parallel \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right] d_2, d_3, \dots, d_N$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ a_1 - a_2 \end{array}$$

$d_2, \dots, d_N$  はたがいに直交し、第1列ベクトル  $a_1 - a_2$  とも直交するベクトルとする。また  $d_2, \dots, d_N$  の張るベクトル空間を  $S[d_2, \dots, d_N]$  とする、すなわち

$$D_{(a-b)} = S(a_1 - a_2) \oplus S[d_2, \dots, d_N] \quad \dots\dots(5.7)$$

この  $S[d_2, \dots, d_N]$  についてはつぎの定理がいえる。

定理 1.  $S^\perp(A:B) \supset S[d_2, \dots, d_N]$

定理 2.  $\|P_{S[d_2, \dots, d_N]}\hat{x}\|^2 = \sigma^{*2} \chi_{N-1}^2$ ,  $\sigma^{*2} = (a-b)$

定理 1 の証明

$$d_i = \sum_{j=1}^N \lambda_j C_j = (\lambda_1, -\lambda_1, 0 \vdots \lambda_2, -\lambda_2, 0 \vdots \dots \vdots \lambda_N, -\lambda_N, 0)' \quad \dots\dots(5.8)$$

$d_i \perp a_1 - a_2$  より、 $d_i'(a_1 - a_2) = 0$  であるから

$$2(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N) = 0 \quad \dots\dots(5.9)$$

(5.9) より、 $d_i \perp S(A)$  が示されるし、(5.8) より  $d_i \perp S(B)$  も示される ( $i=2, 3, \dots, N$ ) ゆえに

$$d_i \perp S(A:B) \quad i=2, 3, \dots, N$$

ゆえに

$$S^{\perp}(A : B) \supset S(d_2 \cdots d_N)$$

である。

定理 2 の証明

$e(d_i)$  をベクトル  $d_i$  方向の単位ベクトルとする。

$$\|P_{S(d_2 \cdots d_N)} \hat{x}\|^2 = \|P_{e(d_2)} \hat{x}\|^2 + \|P_{e(d_3)} \hat{x}\|^2 + \cdots + \|P_{e(d_N)} \hat{x}\|^2 \quad \cdots (5.10)$$

であり

$$e(d_i)' = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{t=1}^N \lambda_t^2}} (\lambda_1, -\lambda_1, 0 | \lambda_2, -\lambda_2, 0 | \cdots | \lambda_N, -\lambda_N, 0)$$

よって

$e(d_i)' \hat{x}$  は正規分布をなし

$$E[e'(d_i) \hat{x}] = e'(d_i) m = 0 \quad (e(d_i) \in S^{\perp}(A|B), m \in S(A|B) \text{ より})$$

$$\begin{aligned} V[e'(d_i) \hat{x}] &= e'(d_i) \begin{bmatrix} A(a, b) & 0 \\ 0 & A(a, b) \end{bmatrix} e(d_i) \\ &= 2(a-b) \frac{\sum_{t=1}^N \lambda_t^2}{2 \sum_{t=1}^N \lambda_t^2} = (a-b) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\|P_{e(d_i)} \hat{x}\|^2 \sim (a-b) \chi_1^2$$

なる分布をなす、よって  $\|P_{e(d_i)} \hat{x}\|^2 = (a-b) \chi_{(1)}^2$  統計量、このことと (5.10) を併せ考察して、

$$\|P_{S(d_2 \cdots d_N)} \hat{x}\|^2 = (a-b) \{\chi_{(2)}^2 + \chi_{(3)}^2 + \cdots + \chi_{(N)}^2\} = (a-b) \chi_{N-1}^2$$

よって

帰無仮説  $H_{12} : \mu_1 - \mu_2 = 0$  の検定には

$$\|P_{(a_1 - a_2)} \hat{x}\|^2 / \frac{\|P_{S(d_2 \cdots d_N)} \hat{x}\|^2}{N-1} \sim F_{N-1}^1 \quad (H_{12} \text{ が真のとき})$$

として行う。

全く同様にして

帰無仮説  $H : \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 = 0 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 - 2a_3) \perp m$

の検定には

$$\|P_{a_1 + a_2 - 2a_3} \hat{x}\|^2 / \frac{\|P_{S(f_2 \cdots f_N)} \hat{x}\|^2}{N-1} \sim F_{N-1}^1 \quad (H \text{ が真のとき})$$

によって行う

ここに  $S[f_2 \cdots f_N]$  とは

$$\begin{aligned}
\underset{(a-\frac{b}{3})}{D} &\equiv S \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0_3 & \cdots & 0_3 \\ & -2 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0_3 & & 1 & \cdots & 0_3 \\ & & -2 & & \vdots \\ & 0_3 & & 0_3 & & 0_3 \\ & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & 1 \\ 0_3 & 0_3 & \cdots & 1 \\ & & & -2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\parallel \\ \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3}}{\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \dots, \mathbf{f}_N}
\end{aligned}$$

$\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N$  はたがいに直交し、第 1 列ベクトル  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$  と直交するベクトルとする、また  $\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N$  の張るベクトル空間を  $S[\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N]$  とした。このとき

$$\underset{(a-\frac{b}{3})}{D} = S(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3) \oplus S[\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N]$$

で

$$S^\perp(A|B) \supset S[\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N]$$

であり

$$\|P_{S[\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N]} \hat{\mathbf{x}}\|^2 = \sigma^{**2} \chi_{N-1}^2, \quad \sigma^{**2} = \left(a - \frac{b}{3}\right)$$

であることも分る。

		$\underset{(a-b/3)}{D}$	$\underset{(a-b)}{D}$	
$S(B^-)$ 次元 $N-1$	1	$S[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3]$ 次元 1	$S[\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2]$ 次元 1	$S(A B)$
		$S[\mathbf{f}_2 \cdots \mathbf{f}_N]$	$S[\mathbf{d}_2 \cdots \mathbf{d}_N]$	$S^\perp(A B)$
		次元 $N-1$	次元 $N-1$	

帰無仮説  $H_{12}, H$  とともに採択されるときは 処理効果  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  が均一である  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  ことになる。

## § 6. 結 び

Generalized Linear Model のときの処理効果  $\mu_1 \cdots \mu_t$  の estimable な  $l_1\mu_1 + \cdots + l_t\mu_t = \mathbf{l}'\boldsymbol{\mu}$  が 0 であるとする仮説検定、問題は、単に  $\mathbf{l}'\boldsymbol{\mu}$  が estimable であるというだけでは、 $F$  検定されないで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}'\boldsymbol{\mu} &= E(\mathbf{c}'\mathbf{x}), \quad \mathbf{c} \in \text{Estimation Space} \\
\|P_{S(\mathbf{c})}\mathbf{x}\|^2 &= \sigma^{*2} \chi_1^2 [2\lambda = \|\mathbf{e}'(\mathbf{c})\mathbf{m}\|^2]
\end{aligned}$$

であり、



$\exists S: \|P_S \mathbf{x}\|^2 = \sigma^2 \chi^2_{\dim S}$ ,  $S \subset \text{Error Space}$  なるときに, 仮説  $\mathbf{l}'\boldsymbol{\mu} = 0$  が  $F$ -検定されることを示した。§4~§5 では  $E$  が  $3 \times 3$  行列で two type diagonal の場合を取上げて, Testable Parameters Equations を論じた。

$E$  が  $p \times p$  行列で two type diagonal, 更に  $r$ -type diagonal な場合の Testable Parameters Equations の発見と, その検定量を示す問題がある。更に本文は ANOVA-Case である。MANOVA-Case で, sample effects がある場合について, Testable Parameters Equations 問題がある (sample effects がない場合については先行論文(7)で示してある) 本小文の内容, 事例内容については本学名誉教授佐藤良一郎氏と十分検討したもので, 同先生に厚く御礼を申し上げます。

#### 引用図書

- (1) S.F. Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.
- (2) A.M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.
- (3) T.W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Sons.
- (4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版.
- (5) 宇喜多義昌 (1983), 多変量統計解析, その3: 標本分布論, 翔人社.
- (6) 宇喜多義昌 (1987), 多変量解析—標本分布とその応用—明星大学出版部.

#### 引用論文

- (1) Y. Ukita (1976), Hypothesis Spaces and Decomposition of Sum of Squares in Linear Models (Ogawa Volume).
- (2) 宇喜多義昌 (1980),  $\langle P_a \mathbf{x} \rangle$ ,  $\|P_S \mathbf{x}\|^2$  の分布と応用について (東京理科大学・理学専攻科雑誌, No.1, Vol.1).
- (3) 宇喜多義昌, 外2名 (1981),  $\|P_{S_1} \mathbf{x}\|^2 / \|P_{S_2} \mathbf{x}\|^2$  の分布に関する定理 (東京理科大学, 理学専攻科雑誌, No.1, Vol.2).
- (4) Y. Ukita (1982), On a Geometrical Meaning of  $A_{22,1}$  and its Distribution (Tensor, N.S. Vol.39).
- (5) 宇喜多義昌 (1982, Basic 数学, No.10~No.12, 1983), 統計的実験の計画と, 実験データの解析 (I, II, III, IV).
- (6) 日本数学会研究発表アブストラクト (統計数学), 1985年, 秋季大会 (富山大学), 1986年春季大会 (京都大学)・
- (7) 宇喜多義昌: 行列正規分布とその応用・明星大学紀要 (理工学部). 1986
- (8) Y. Ukita & K. Noda: About the Matrix Normal Distribution and its Application to Manava (The Second Japan-China Symposium on Statistics) 1986.
- (9) Y. Ukita & K. Noda: Testing Hypotheses on Generalized Linear Models in ANOVA (ISI 46th Contributed Papers) 1987.