擦弦の振動

(第1報，空気抵抗だけを受けるモノコード-その3，補遺)

前澤成一郎*

Synopsis

As a supplement to 1st Report-No. 3, this paper deals with obtaining in closed form the sums of infinite series representing various coefficients of two infinite sets of simultaneous linear equations for Fourier coefficients of the bow force of a bowed string as an infinite number of unknowns.

1. はしがき

第1報-その3[1]の補遺として，バイオリンのような擦弦楽器の弦の定常振動を維持するに必要な弓力に対するフーリエ係数を未知数とする無限連立一次方程式の係数の計算について述べる。

これらの諸係数は第2章で示すように無限級数の和で与えられるけれども，擦弦が曲げこわさを持たず，完全にたわみ易い弦であって，また正の減衰として空気の粘性抵抗だけが働く場合にはその収束性が良好でなく，精度のよい連立方程式の解を得るためには，電子計算機を以てしても多大な時間あるいは費用を要する。1例を挙げると相対誤差を10^{-5}以内に納めるためには3,000項の和を取っても不十分であり，しかもこのような係数を10万個以上求めないと精度のよいフーリエ級数が得られないのである。

しかし幸なことには，完全にたわみ易い弦が正の減衰として空気の粘性抵抗だけを受ける上述の場合には，これ等の係数を表わす無限級数の和が閉じた形で与えられるのである。第1報-その3主報においては，この閉じた表現の結果のみを記したので，この補遺報において，導出過程の大略を示す。

2. 周波数応答 $M_n \mathrm{Exp}(-j\phi_n)$ の評価

我々の無限連立方程式の係数は次の2組の式で与えられる。共に無限級数表現である。

$$\left.\begin{aligned} C_{km}&=\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k}{}^2-n^2)(\mu_{2m}{}^2-n^2)}M_n\sin\phi_n \\ D_{km}&=-E_{mk}=\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sin n\theta_0}{(\mu_{2k}{}^2-n^2)(\mu_{2m+1}{}^2-n^2)}M_n\cos\phi_n \\ F_{km}&=\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1+\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k+1}{}^2-n^2)(\mu_{2m+1}{}^2-n^2)}M_n\sin\phi_n \end{aligned}\right\}$$

$$(k, m=0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.01)$$

---

* 理工学部機械工学科教授，機械力学

$$\left.\begin{aligned}
\bar{H}_{km}&=-\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k}^2-n^2)(\bar{\mu}_{2m}^2-n^2)}M_n\sin\phi_n\\
\bar{I}_{km}&=\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sin n\theta_0}{(\mu_{2k}^2-n^2)(\bar{\mu}_{2m+1}^2-n^2)}M_n\cos\phi_n\\
\bar{J}_{km}&=\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sin n\theta_0}{(\mu_{2k+1}^2-n^2)(\bar{\mu}_{2m}^2-n^2)}M_n\cos\phi_n\\
\bar{K}_{km}&=\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1+\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k+1}^2-n^2)(\bar{\mu}_{2m+1}^2-n^2)}M_n\sin\phi_n
\end{aligned}\right\}$$

$$(k, m=0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.02)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{2k}&=\frac{2k\pi}{\theta_0}, &\quad \mu_{2k+1}&=\frac{(2k+1)\pi}{\theta_0}\\
\bar{\mu}_{2k}&=\frac{2k\pi}{\bar{\theta}_0}, &\quad \bar{\mu}_{2k+1}&=\frac{(2k+1)\pi}{\bar{\theta}_0}
\end{aligned}\right\}(k=0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots\cdots(2.03)$$

および

θ_0：接着区間の長さ

$\bar{\theta}_0=2\pi-\theta_0$：滑走区間の長さ

$\Omega=\omega/\nu$：振動数比

ω：定常自励振動の円振動数

$\nu=\pi a/l$：弦の基本自然円振動数

l：弦の長さ

$a=\sqrt{T/\mu}$：横波の伝播速度

T：弦の張力

μ：弦の線密度

ξ：擦弦点の左端からの距離

また $M_n\cos\phi_n$ と $M_n\sin\phi_n$ は擦弦点 (bowed point) に働く円振動数 $n\omega(n=1, 2, 3, \cdots)$ の単位の大きさの調和入力に対する同点の変位の周波数応答 $M_n\,\mathrm{Exp}(-j\phi_n)$ の実数部分そのものと虚数部分の符号を変えたものである．すなわち，

$$M_n\,\mathrm{Exp}(-j\phi_n)=M_n\cos\phi_n-jM_n\sin\phi_n,\quad j=\sqrt{-1} \qquad \cdots\cdots(2.04)$$

両端固定で，正の減衰としては，全長にわたる空気の粘性抵抗だけが働く擦弦の運動方程式は，空気抵抗の係数を $2c$ として

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2c\frac{\partial y}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \cdots\cdots(2.05)$$

であって，

$$M_n\,\mathrm{Exp}(-j\phi_n)=\frac{l^2}{\xi\bar{\xi}}\frac{\sin\lambda_n\xi\sin\lambda_n\bar{\xi}}{\lambda_n l\sin\lambda_n l} \qquad \cdots\cdots(2.06)$$

となる[1]。ここに

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\xi}=l-\xi\\
&\lambda_n l=\pi\sqrt{n^2\Omega^2-2j\gamma n\Omega}\\
&\gamma=c/\nu：\text{空気抵抗の減衰比}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(2.07)$$

さて振動数比 Ω を

$$\Omega=1+\delta \qquad \cdots\cdots(2.08)$$

と置いて，δ は γ と同程度の微小量と考える。そのとき γ^2 を 1 に対して省略すれば，(2.06) 式の分子に対して

$$\sin\lambda_n\xi\sin\lambda_n\bar{\xi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2}\left[\cos n\pi\delta-\cos n\phi_0{}^{\#}+j\pi\gamma\left\{\sin n\pi\delta+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\sin n\phi_0{}^{\#}\right\}\right] \quad \cdots\cdots(2.09)$$

を得る。

ここで，

$$\phi_0{}^{\#}=\phi_0-\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\pi\delta,\quad \phi_0\equiv(\xi/l)2\pi \quad \cdots\cdots(2.10)$$

また分母については，複素関数論における部分分数展開[2]

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z^2}+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{z^2-p^2\pi^2} \quad \cdots\cdots(2.11)$$

を用いて

$$\frac{1}{\lambda_n l\sin\lambda_n l}=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2\Omega^2-2j\gamma n\Omega}+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p^2-n^2\Omega^2+2j\gamma n\Omega}\right] \quad \cdots\cdots(2.12)$$

ここで

$$z=\lambda_n l=\pi\sqrt{n^2\Omega^2-2j\gamma n\Omega} \quad \cdots\cdots(2.13)$$

と置いた。

最初に和記号 Σ の中の $p=n$ に対する項を考える，すなわち

$$\frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(1-\Omega^2)+2j\gamma n\Omega}=\frac{1}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{j\gamma n\Omega(1+j\sigma n)} \quad \cdots\cdots(2.14)$$

ここに

$$\sigma=(\Omega^2-1)/(2\gamma\Omega)$$

(2.12) 式の中の残りの諸項の和 $\varDelta$ は

$$\varDelta=\frac{1}{z\sin z}-\frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{(1-\Omega^2)n^2+2j\gamma n\Omega} \quad \cdots\cdots(2.15)$$

となるが，これを2分して

$$\varDelta=\varDelta_1+\varDelta_2 \quad \cdots\cdots(2.16)$$

$$\left.\begin{aligned}\varDelta_1&=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2\{n-(j\gamma-n\delta)\}\{j\gamma-n\delta-\gamma^2/2n\}}-\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi^2\{(j\gamma-n\delta)+j\gamma\delta-\delta^2n/2\}}\\ \varDelta_2&=\frac{1}{z\sin z}-\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2\{n-(j\gamma-n\delta)\}\{j\gamma-n\delta-\gamma^2/2n\}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.17)$$

とする．

ここまでは何等の省略は行っておらず，正確な結果であるが，1に対して γ^2 と δ^2 の程度 (order) の項を省略すると

$$\begin{aligned}\varDelta_1&=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n(j\gamma-n\delta)}\left[\left(1+\frac{j\gamma-n\delta}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma^2/2n}{j\gamma-n\delta}\right)-\left(1-\frac{j\gamma\delta-\gamma^2/2n}{j\gamma-n\delta}\right)\right]\\ &=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2n^2(j\gamma-n\delta)^2}\left[(j\gamma-n\delta)^2+\frac{\gamma^2}{2}+nj\gamma\delta-\frac{\delta^2n^2}{2}\right]\\ &=\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi^2n^2}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(2.18)$$

が成立つ。この結果は n が大きくても γ と δ が一次の微小量であれば成り立つ。

次に $\varDelta_2$ の評価であるが1に対して γ^2 を省略するとき

$$\varDelta_2=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n+n\delta-j\gamma)}\left\{\frac{1}{\sin\pi(j\gamma-n\delta-\gamma^2/2n)}-\frac{1}{\pi(j\gamma-n\delta-\gamma^2/2n)}\right\} \quad \cdots\cdots(2.19)$$

一般に[2]

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2\pi^2}$$

したがって $|z|\leqq\pi/2$ ならば

$$|1/\sin z-1/z|\leqq|2z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^2\pi^2-z^2|}\leqq|2z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-|z|^2}$$
$$\leqq\frac{|2z|}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-(1/2)^2}=\frac{4|z|}{\pi^2}$$

これによって $|n\delta-j\gamma+\gamma^2/2n|<1/2$ すなわち

$$n|\delta|\leqq\frac{1}{2}(\sqrt{1/4-\gamma^2}+\sqrt{1/4-\gamma^2-2\delta\gamma^2})\equiv\frac{1}{2}+\varepsilon \qquad \cdots\cdots(2.20)$$

ならば (ε は γ^2 の order である)

$$|\Delta_2|\leqq\frac{4|n\delta-j\gamma+\gamma^2/2n|}{\pi^3|n+n\delta-j\gamma|}=\frac{4}{\pi^3}\left|\frac{\delta+\dfrac{\gamma^2}{2n^2}-j\dfrac{\gamma}{n}}{1+\delta-j\gamma/n}\right|\leqq\frac{4}{\pi^3}\sqrt{\delta^2+\gamma^2} \qquad \cdots\cdots(2.21)$$

更に $n|\delta|$ が (2.20) の右辺より大きくても

$$n|\delta|\leqq1/2$$

であれば (2.19) の { } 中の絶対値はある定数Cを越えないので

$$|\Delta_2|\leqq\frac{C}{\pi|n+n\delta-j\gamma|}\leqq\frac{C}{\pi n(1+\delta)}\leqq\frac{2C|\delta|}{\pi(1-|\delta|)}\frac{1}{1+2\varepsilon} \qquad \cdots\cdots(2.22)$$

(2.21) と (2.22) を合せて

$n|\delta|\leqq1/2$ ならば，Oを同等以上の微小量を表わす付号として

$$|\Delta_2|=O(\sqrt{\delta^2+\gamma^2})=O(\gamma) \qquad \cdots\cdots(2.23)$$

整数 n_0 および n_1 を

$$n_0\leqq\frac{1}{2|\delta|}<n_1\leqq\frac{1}{2|\delta|}+1 \qquad \cdots\cdots(2.24)$$

のように撰ぶと $n\leqq n_0$ については (2.23) が成り立つ。$n\geqq n_1$ となる n についてはこのような評価は出来ないが，係数 C_{km} 等および $\bar{H}_{km}$ 等に対する Δ_2 による寄与の総和を次のように評価することが出来る。

C_{km} 等および $\bar{H}_{km}$ 等における上記の寄与を Δ_2C_{km} 等および $\Delta_2\bar{H}_{km}$ 等と書くとき，γ^2 の order の項を省略すれば，例えば

$$n_1^2\geqq1.5\,\mathrm{Max}(\mu_k^2,\ \mu_m^2) \qquad \cdots\cdots(2.25)$$

のとき

$$|\Delta_2C_{km}|=\frac{4\Omega}{\pi\theta_0}\sum_{n=n_1}^{\infty}\left|\frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_k^2-n^2)(\mu_m^2-n^2)}\Delta_2\right|\leqq\frac{72\Omega}{\pi\theta_0}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{|\Delta_2|}{n}$$
$$\leqq\frac{72}{\pi^2\theta_0}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{n\pi|\delta|}+\frac{1}{|\sin(n\delta-j\gamma)\pi|}\right\}$$
$$=\frac{72}{\pi^2\theta_0}\sum_{n=n_1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^3|\delta|\pi}+\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{\sin^2 n\pi|\delta|+\sinh^2\gamma\pi}}\right\} \qquad \cdots\cdots(2.26)$$

$\bar{\delta}\equiv|\delta|$ と書いて，先ず

$$\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{\pi\bar{\delta}n^3}=\frac{\bar{\delta}}{\pi}\sum_{u=n_1}^{\infty}\frac{\bar{\delta}}{(n\bar{\delta})^3}\leqq\frac{\bar{\delta}}{\pi}\int_{n_1\bar{\delta}-\bar{\delta}/2}^{\infty}dx/x^3$$
$$\leqq\frac{\bar{\delta}}{\pi}\int_{\frac{1}{2}-\bar{\delta}/2}^{\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{2\bar{\delta}}{\pi(1-\bar{\delta})^2}=O(\bar{\delta}) \qquad \cdots\cdots(2.27)$$

次に $n_1, n_2, \cdots$ を次のように撰ぶと

$$\frac{1}{2\delta} \leqq n_1 < \frac{1}{2\bar{\delta}} + 1, \quad \frac{3}{2\bar{\delta}} \leqq n_2 < \frac{2}{2\delta} + 1, \cdots \qquad \cdots\cdots(2.28)$$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \pi n\bar{\delta} + \sinh^2 \gamma\pi}} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_i}^{n_{i+1}} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 n\bar{\delta}\pi + \sinh^2 \gamma\pi}} \right)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2} \sum_{n=n_i}^{n_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 n\bar{\delta}\pi + \sinh^2 \gamma\pi}} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2 \bar{\delta}} \int_{i-\frac{1}{2}-\delta/2}^{i+\frac{1}{2}+\delta/2} \frac{dx}{(\sin^2 \pi x + \sinh^2 \gamma\pi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+O(\delta^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2 \bar{\delta}} \int_{-\frac{1}{2}-\delta/2}^{\frac{1}{2}+\delta/2} \frac{dy}{\sqrt{\sin^2 \pi y + \sinh^2 \gamma\pi}} + O(\delta^2)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2 \bar{\delta}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\sqrt{4y^2 + \sinh^2 \gamma\pi}} + 0(\delta^2)$$

(ここで $|y| < 1/2$ では $4y^2 \leqq \sin^2 \pi y$ を用いた)

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2 \bar{\delta}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \sinh^2 \gamma\pi}} + O(\delta^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2 \bar{\delta}} \ln\left(z + \sqrt{z^2 + \sinh^2 \gamma\pi}\right) \Big|_0^1 + O(\delta^2)$$

$$= \left(\ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 + \sinh^2 \gamma\pi}}{\sinh \gamma\pi} \right\} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i^2 \bar{\delta}} + O(\delta^2)$$

$$\leqq \{2 + \ln(1/\sinh \gamma\pi)\} 4\bar{\delta} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) + O(\delta^2)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \{2 + \ln(1/\sinh \gamma\pi)\} \bar{\delta} + O(\delta^2) = O(\delta) = O(\gamma)$$

すなわち

$$\sqrt{1.5}\, \mathrm{Max}(\mu_k, \mu_m) \leqq 1/(2|\delta|)$$

のような C_{km} については

$$M_n \,\mathrm{Exp}(-j\phi_n) = \frac{l^2}{\xi\bar{\xi}} \frac{1}{2\pi^2} \left[\cos n\pi\delta - \cos n\phi_0^{\#} + j\gamma\pi \left(\sin n\pi\delta + \frac{\bar{\xi} - \xi}{l} \sin n\phi_0^{\#} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{1}{j\gamma n\Omega(1 + j\sigma n)} + \frac{1}{2n^2} \right] \qquad \cdots\cdots(2.30)$$

としてよい。$\frac{1}{2|\delta|} \leqq n_1 < \frac{1}{2|\delta|} + 1$ のような n_1 以下の n については (2.30) 式自身の誤差が $O(\gamma)$ であり (従って附録によって C_{km} に対する誤差の寄与も $O(\gamma)$ であり), また n_1 以上の n に対しては ((2.30) 式自身の誤差はこれより大きいけれども) C_{km} に対する誤差の寄与が $O(\gamma)$ となるのである。従って全体として (2.30) 式を用いたときの C_{km} の誤差は $O(\gamma)$ である。

他の係数 D_{km} 等, $\bar{H}_{km}$ 等についても全く同様な評価が可能である。

ちなみに $|\delta| = 0.0003$ とするとき, $\xi/l = 1/9$ に対応する $\theta_0 = 320°$ では C_{km} については

$$\mathrm{Max}(k, m) < 1200 < \frac{0.5}{0.0003} \frac{1}{2\sqrt{1.5}} \frac{\theta_0}{\pi} = 1209.6$$

$\bar{H}_{km}$ については

$$\mathrm{Max}(k, m) < 150 < \frac{0.5}{0.0003} \frac{1}{2\sqrt{1.5}} \frac{\bar{\theta}_0}{\pi} = 151.2$$

で十分である（主報[1] の計算例参照）

3. 係数 C_{km} 等に対する閉じた表現

前章（2.30）式から

$$\left.\begin{aligned} M_n \cos\phi_n &= \frac{1}{L\Omega}\left[-\left(\frac{\sigma}{1+\sigma^2 n^2} - \frac{\gamma\Omega}{2n^2}\right)A + \frac{\gamma\pi}{n}\frac{B}{1+\sigma^2 n^2}\right] \\ M_n \sin\phi_n &= \frac{1}{L\Omega}\left[\frac{A}{n(1+\sigma^2 n^2)} + \pi\gamma\sigma\frac{n}{1+\sigma^2 n^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.01)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} &A = \cos n\pi\delta - \cos n\phi_0{}^{\#}, \quad B = \sin n\pi\delta + \frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\sin n\phi_0{}^{\#} \\ &L = \frac{4\xi\bar{\xi}}{l^2}\cdot\frac{\pi^2\gamma}{2}, \quad \delta = \Omega - 1, \quad \sigma = \frac{\Omega^2-1}{2\gamma\Omega} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.02)$$

先ず C_{km} および F_{km} の A を含む項を $C_{km}{}^{(A)}$ および $F_{km}{}^{(A)}$ と書くと

$$\left.\begin{matrix} C_{km}{}^{(A)} \\ F_{km}{}^{(A)} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{L}\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(1\mp\cos n\theta_0)(\cos n\pi\delta - \cos n\phi_0{}^{\#})}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)(1+\sigma^2 n^2)} \quad \cdots\cdots(3.03)$$

ここに

$$\mu_k = \begin{cases} 2k\pi/\theta_0, \\ (2k+1)\pi/\theta_0, \end{cases} \quad \mu_m = \begin{cases} 2m\pi/\theta_0 \\ (2m+1)\pi/\theta_0 \end{cases} \quad (k, m = 0, 1, 2, \cdots) \quad \cdots\cdots(3.04)$$

1) $k \fallingdotseq m$ の場合

部分分数分解

$$\frac{n^2}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)(1+\sigma^2 n^2)} = \frac{\mu_k{}^2}{(\mu_m{}^2-\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_k{}^2)}\frac{1}{\mu_k{}^2-n^2}$$
$$+\frac{\mu_m{}^2}{(\mu_k{}^2-\mu_m{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\frac{1}{\mu_m{}^2-n^2} - \frac{1}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\frac{1}{1/\sigma^2+n^2}$$
$$\cdots\cdots(3.05)$$

および

$$\cos n\pi\delta(1\mp\cos n\theta_0) = \cos n\pi\bar{\delta} \mp \frac{1}{2}\cos n(\theta_0 - \pi\bar{\delta}) \mp \frac{1}{2}\cos n(\theta_0 + \pi\bar{\delta}) \quad \cdots\cdots(3.06)$$

を用いる。また一般に次のフーリエ級数展開が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{\mu^2-n^2} = -\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\pi}{2\mu}\frac{\cos\mu(\pi-\theta)}{\sin\mu\pi} \quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu \fallingdotseq 0, 1, 2, \cdots) \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{\mu^2+n^2} = -\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\pi}{2\mu}\frac{\cosh\mu(\pi-\theta)}{\sinh\mu\pi} \quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.07)$$

従って $\mu=\mu_k$ あるいは $\mu=\mu_m$ に対して（3.04）の両者について

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\bar{\delta}}{\mu^2-n^2} = -\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\pi}{2\mu}\frac{\cos\mu(\pi-\pi\bar{\delta})}{\sin\mu\pi}$$

$$\mp\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_0-\pi\bar{\delta})}{\mu^2-n^2} = \pm\frac{1}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi+\pi\bar{\delta})}{\sin\mu\pi}$$

$$\pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\theta_0+\pi\bar{\delta})}{\mu^2-n^2}=\pm\frac{1}{4\mu^2}-\frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi-\pi\bar{\delta})}{\sin\mu\pi}$$

+) ―――――――――――――――――――――――――

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\delta(1\mp\cos n\theta_0)}{\mu^2-n^2}=\frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi-\pi\bar{\delta})-\cos\mu(\pi+\pi\bar{\delta})}{\sin\mu\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2\mu}\sin\pi\mu\bar{\delta}-\begin{cases}0\\1/\mu^2,\end{cases}\quad \bar{\delta}\equiv|\delta| \qquad \cdots\cdots(3.08)$$

全く同様に

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\delta}{1/\sigma^2+n^2}=-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\cosh(\pi-\pi\bar{\delta})/\sigma}{\sinh\pi/\sigma}$$

$$\pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_0-\pi\bar{\delta})}{1/\sigma^2+n^2}=\mp\frac{\sigma^2}{4}\mp\frac{\pi\sigma}{4}\frac{\cosh(\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta})/\sigma}{\sinh\pi/\sigma}$$

$$\mp\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_0+\pi\bar{\delta})}{1/\sigma^2+n^2}=\mp\frac{\sigma^2}{4}\mp\frac{\pi\sigma}{4}\frac{\cosh(\pi-\theta_0-\pi\bar{\delta})/\sigma}{\sinh\pi/\sigma}$$

+) ―――――――――――――――――――――――――

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\bar{\delta}(1\mp\cos n\theta_0)}{1/\sigma^2+n^2}$$

$$=\frac{\pi\sigma}{2}\left\{\cosh\frac{\pi(1-\bar{\delta})}{\sigma}\mp\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta}}{\sigma}\mp\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-\theta_0-\pi\bar{\delta}}{\sigma}\right\}\Big/\sinh\pi/\sigma-\begin{cases}0\\\sigma^2\end{cases}$$

$$\cdots\cdots(3.09)$$

次に

$$\cos n\psi_0^{\#}(1\mp\cos n\theta_0)=\cos n\psi_0^{\#}\mp\frac{1}{2}\cos n(\theta_0+\psi_0^{\#})\mp\frac{1}{2}\cos n(\theta_0-\psi_0^{\#})$$

$$=\cos n\psi_0^{\#}\mp\frac{1}{2}\cos n(\theta_0-\overline{\psi}_0^{\#})\mp\frac{1}{2}\cos n(\theta_0-\psi_0^{\#})$$

ここで前記によって,

$$\psi_0^{\#}=\frac{\xi}{l}2\pi-\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\pi\delta=\frac{2\xi}{l}\pi-\left(1-\frac{2\xi}{l}\right)\pi\delta,\quad \overline{\psi}_0^{\#}=2\pi-\psi_0^{\#} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

$$\pi-\psi_0^{\#}=\left(1-\frac{2\xi}{l}\right)\pi(1+\delta)=\left(1-\frac{2\xi}{l}\right)\pi\Omega\geqq 0,\quad \psi_0^{\#}\leqq\pi \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

また

$$0<|\theta_0-\psi_0^{\#}|<2\pi,\quad 0<|\theta_0-\overline{\psi}_0^{\#}|<2\pi$$

から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\psi_0^{\#}}{\mu^2-n^2}=-\frac{1}{2\mu^2}+\frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi-\psi_0^{\#})}{\sin\mu\pi}+\frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi-\overline{\psi}_0^{\#})}{\sin\mu\pi}$$

$$\mp\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_0-\overline{\psi}_0^{\#})}{\mu^2-n^2}=\pm\frac{1}{4\mu^2}\mp\frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi-|\theta_0-\overline{\psi}_0^{\#}|)}{\sin\mu\pi}$$

$$\mp\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta_0-\psi_0^{\#})}{\mu^2-n^2}=\pm\frac{1}{4\mu^2}\mp\frac{\pi}{4\mu}\frac{\cos\mu(\pi-|\theta_0-\psi_0^{\#}|)}{\sin\mu\pi}$$

+) ―――――――――――――――――――――――――

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi_0^{\#}(1\mp\cos n\theta_0)}{\mu^2-n^2}=(W_1\sin\mu\phi_0^{\#}+W_2\sin\mu\overline{\phi}_0^{\#})/2\mu-\begin{cases}0\\1/\mu^2\end{cases}\quad\cdots\cdots(3.12)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}W_1&\equiv\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(\theta_0-\phi_0^{\#})\}\\W_2&\equiv\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(\theta_0-\overline{\phi}_0^{\#})\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3.13)$$

すなわち

$$\theta_0\gtrless\phi_0^{\#}\ \text{に従って}\ W_1=\begin{cases}1\\0\end{cases}\quad\text{また}\quad\theta_0\gtrless\overline{\phi}_0^{\#}\ \text{に従って}\ W_2=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

となる。また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi_0^{\#}}{1/\sigma^2+n^2}=-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\cosh(\pi-\phi_0^{\#})/\sigma}{\sinh\pi/\sigma}$$

$$\mp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\theta_0-\overline{\phi}_0^{\#})}{1/\sigma^2+n^2}=\pm\frac{\sigma^2}{4}\mp\frac{\pi\sigma}{4}\frac{\cosh(\pi-|\theta_0-\overline{\phi}_0^{\#}|)/\sigma}{\sinh\pi/\sigma}$$

$$\mp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\theta_0-\phi_0^{\#})}{1/\sigma^2+n^2}=\pm\frac{\sigma^2}{4}\mp\frac{\pi\sigma}{4}\frac{\cosh(\pi-|\theta_0-\phi_0^{\#}|)/\sigma}{\sinh\pi/\sigma}$$

+) ――――――――――――――――――――――――――――――――

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi_0^{\#}(1\mp\cos n\theta_0)}{1/\sigma^2+n^2}$$

$$=\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\cosh\dfrac{\pi-\phi_0^{\#}}{\sigma}\mp\dfrac{1}{2}\cosh\dfrac{\pi-|\theta_0-\overline{\phi}_0^{\#}|}{\sigma}\mp\dfrac{1}{2}\cosh\dfrac{\pi-|\theta_0-\phi_0^{\#}|}{\sigma}}{\sinh\pi/\sigma}-\begin{cases}0\\\sigma^2\end{cases}$$

$$\cdots\cdots(3.14)$$

結局

$$\left.\begin{aligned}C_{km}^{(A)}\\F_{km}^{(A)}\end{aligned}\right\}=\frac{2}{\theta_0}\frac{(-1)^{k+m}}{L}\left[\frac{\left\{\begin{aligned}&\frac{\mu_k(W_1\sin\mu_k\phi_0^{\#}+W_2\sin\mu_k\overline{\phi}_0^{\#}-\sin\mu_k\pi\bar{\delta})}{1+\sigma^2\mu_k^2}\\&-\frac{\mu_m(W_1\sin\mu_m\phi_0^{\#}+W_2\sin\mu_m\overline{\phi}_0^{\#}-\sin\mu_m\pi\bar{\delta})}{1+\sigma^2\mu_m^2}\end{aligned}\right\}}{\mu_k^2-\mu_m^2}-\frac{X_F^C}{(1+\sigma^2\mu_k^2)(1+\sigma^2\mu_m^2)}\right]$$

$$\cdots\cdots(3.15)$$

ここに

$$X_F^C\equiv\frac{\sigma}{\sinh\pi/\sigma}\left\{\begin{aligned}&\cosh\frac{\pi(1-\bar{\delta})}{\sigma}\mp\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta}}{\sigma}\mp\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-\theta_0-\pi\bar{\delta}}{\sigma}\\&-\cosh\frac{\pi-\phi_0^{\#}}{\sigma}\pm\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-|\theta_0-\phi_0^{\#}|}{\sigma}\pm\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-|\theta_0-\overline{\phi}_0^{\#}|}{\sigma}\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(3.16)$$

$$\mu_k=\begin{cases}2k\pi/\theta_0\\(2k+1)\pi/\theta_0\end{cases},\qquad\mu_m=\begin{cases}2m\pi/\theta_0\\(2m+1)\pi/\theta_0\end{cases}\quad\cdots\cdots(3.17)$$

ここに C_{km} と F_{km} に対する複記と複号は同順である。途中たとえば $\cos\mu_k(\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta})$ は $\mu_k=2k\pi/\theta_0$ に対しては $\cos\mu_k(\pi+\pi\bar{\delta})$，$\mu_k=(2k+1)\pi/\theta_0$ に対しては $-\cos\mu_k(\pi+\pi\bar{\delta})$ となり，また F_{km} に対する分数表示以外の $1/\mu^2$ および σ^2 の項は全体として消えるので

この結果が得られるのである。

次にBを含む項は，それぞれ $C_{km}{}^{(B)}$ および $F_{km}{}^{(B)}$ と書いて

$$\left.\begin{array}{l}C_{km}{}^{(B)}\\F_{km}{}^{(B)}\end{array}\right\}=\frac{1}{L}\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m}\pi\gamma\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1\mp\cos n\theta_0)\left(\sin n\pi\delta+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\sin n\phi_0{}^{\#}\right)}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)(1+\sigma^2n^2)}$$

$$\cdots\cdots(3.18)$$

この無限級数の和は部分分数展開と次の公式[3]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta}{\mu^2-n^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\mu(\pi-\theta)}{\sin\mu\pi}\quad 0<\theta<2\pi \qquad\cdots\cdots(3.19)$$

$$(\mu\fallingdotseq 0,1,2.\cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta}{1/\sigma^2+n^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\sinh\frac{\pi-\theta}{\sigma}}{\sinh\pi/\sigma}\quad 0<\theta<2\pi \qquad\cdots\cdots(3.20)$$

を用いて $C_{km}{}^{(A)}$ および $F_{km}{}^{(A)}$ の場合と同様に進めば求められるが，

$$\left.\begin{array}{l}C_{km}{}^{(B)}\\F_{km}{}^{(B)}\end{array}\right\}=\pi\gamma\sigma\left(-\frac{\partial}{\partial(\pi\delta)}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\frac{\partial}{\partial\phi_0{}^{\#}}\right)\left\{\begin{array}{l}C_{km}{}^{(A)}\\F_{km}{}^{(A)}\end{array}\right. \qquad\cdots\cdots(3.21)$$

の関係が成り立っているので，(3.15)，(3.16) から容易に求められる。すなわち

$$\left.\begin{array}{l}C_{km}{}^{(B)}\\F_{km}{}^{(B)}\end{array}\right\}=\frac{2}{\theta_0}\frac{(-1)^{k+m}}{L}\pi\gamma\sigma$$

$$\times\left[\frac{\left\{\frac{\mu_k{}^2\left\{\mathrm{sgn}(\delta)\cos\mu_k\pi\bar{\delta}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}-\frac{\mu_m{}^2\left\{\mathrm{sgn}(\delta)\cos\mu_m\pi\bar{\delta}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\cos\mu_m\phi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_m\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}}{1+\sigma^2\mu_m{}^2}\right\}}{\mu_k{}^2-\mu_m{}^2}-\frac{Y_F{}^C}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\right]$$

$$(k\fallingdotseq m) \qquad\cdots\cdots(3.22)$$

ここに

$$Y_F{}^C=\frac{\left[\begin{array}{l}\mathrm{sgn}(\delta)\left\{\sinh\frac{\pi(1-\bar{\delta})}{\sigma}\pm\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta}}{\sigma}\mp\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0-\pi\bar{\delta}}{\sigma}\right.\\\quad+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\left\{\sinh\frac{\pi-\phi_0{}^{\#}}{\sigma}\pm\frac{1}{2}sg\sinh\frac{\pi-|\theta_0-\phi_0{}^{\#}|}{\sigma}\mp\frac{1}{2}\overline{sg}\sinh\frac{\pi-|\theta_0-\bar{\phi}_0{}^{\#}|}{\sigma}\right\}\end{array}\right]}{\sinh\pi/\sigma}$$

$$\cdots\cdots(3.23)$$

$$sg\equiv\mathrm{sgn}(\theta_0-\phi_0{}^{\#}),\qquad \overline{sg}\equiv\mathrm{sgn}(\theta_0-\bar{\phi}_0{}^{\#}) \qquad\cdots\cdots(3.24)$$

当然

$$Y_F{}^C=\left(-\frac{\partial}{\partial(\pi\delta)}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\frac{\partial}{\partial\phi_0{}^{\#}}\right)X_F{}^C \qquad\cdots\cdots(3.25)$$

が成り立っている。

2) **$k=m\fallingdotseq 0$ の場合**

先ず

$$\left.\begin{matrix} C_{kk}{}^{(A)} \\ F_{kk}{}^{(A)} \end{matrix}\right\}=\frac{1}{L}\frac{4}{\pi\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(1\mp\cos n\theta_0)(\cos n\pi\delta-\cos n\psi_0{}^{\#})}{(\mu_k{}^2-n^2)^2(1+\sigma^2n^2)} \quad \cdots\cdots(3.26)$$

であるが，今度は部分分数展開

$$\frac{n^2}{(\mu_k{}^2-n^2)^2(1+\sigma^2n^2)}=\frac{\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\frac{1}{(\mu_k{}^2-n^2)^2}$$
$$-\frac{1}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)^2}\frac{1}{\mu_k{}^2-n^2}-\frac{1}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)^2}\frac{1}{1/\sigma^2+n^2} \quad \cdots\cdots(3.27)$$

および前出の諸公式と共に公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{(\mu^2-n^2)^2}=-\frac{1}{2\mu^2}+\frac{\pi}{4\mu^3}\left(1+\frac{\mu\pi}{\tan\mu\pi}\right)\frac{\cos\mu(\pi-\theta)}{\sin\mu\pi}$$
$$+\frac{\pi}{4\mu^2}\frac{(\pi-\theta)\sin\mu(\pi-\theta)}{\sin\mu\pi},\quad 0\leqq\theta\leqq2\pi\quad(\mu\fallingdotseq0,1,2,\cdots)$$
$$\cdots\cdots(3.28)$$

を用いる。前と同様な変換によって

$$\left.\begin{matrix} C_{kk}{}^{(A)} \\ F_{kk}{}^{(A)} \end{matrix}\right\}=\frac{1}{L}\frac{1}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}$$
$$\times\left[\begin{aligned}&\left(1-\frac{\pi\bar{\delta}}{\theta_0}\right)\cos\mu_k\pi\bar{\delta}-W_1\left(1-\frac{\psi_0{}^{\#}}{\theta_0}\right)\cos\mu_k\psi_0{}^{\#}-W_2\left(1-\frac{\bar{\psi}_0{}^{\#}}{\theta_0}\right)\cos\mu_k\bar{\psi}_0{}^{\#}\\&+\frac{1-\sigma^2\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\frac{W_1\sin\mu_k\psi_0{}^{\#}+W_2\sin\mu_k\psi_0{}^{\#}-\sin\mu_k\pi\bar{\delta}}{\mu_k\theta_0}\\&-\frac{2}{\theta_0}\frac{X_F{}^C}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\end{aligned}\right]$$
$$\cdots\cdots(3.29)$$

今度も関係式 (3.21) を用いて

$$\left.\begin{matrix} C_{kk}{}^{(B)} \\ F_{kk}{}^{(B)} \end{matrix}\right\}=\frac{\pi\gamma\sigma}{L}\frac{\mu_k}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}$$
$$\times\left[\begin{aligned}&\left(1-\frac{\pi\bar{\delta}}{\theta_0}\right)\sin\mu_k\pi\delta\\&+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\left\{W_1\left(1-\frac{\psi_0{}^{\#}}{\theta_0}\right)\sin\mu_k\psi_0{}^{\#}-W_2\left(1-\frac{\bar{\psi}_0{}^{\#}}{\theta_0}\right)\sin\mu_k\bar{\psi}_0{}^{\#}\right\}\\&+\frac{2}{\theta_0}\frac{\operatorname{sgn}(\delta)\cos\mu_k\pi\bar{\delta}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\cos\mu_k\psi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_k\bar{\psi}_0{}^{\#})-Y_F{}^C}{\mu_k(1+\sigma^2\mu_k{}^2)}\end{aligned}\right]$$
$$\cdots\cdots(3.30)$$

3) $k=m=0$ の場合

C_{kk} については $k=0$ の場合，すなわち C_{00} は特別に扱わなくてはならない。

$$C_{00}{}^{(A)}=\frac{1}{L}\frac{4}{\pi\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\theta_0)(\cos n\pi\delta-\cos n\psi_0{}^{\#})}{n^2(1+\sigma^2n^2)} \quad \cdots\cdots(3.31)$$

については部分分数展開

$$\frac{1}{n^2(1+\sigma^2n^2)}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2+1/\sigma^2} \quad \cdots\cdots(3.32)$$

およびフーリエ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\theta}{n^2}=\frac{\theta(2\pi-\theta)}{4}\quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi \qquad\cdots\cdots(3.33)$$

を用いて，前と同様の変換から

$$C_{00}{}^{(A)}=\frac{1}{L}\frac{2}{\theta_0}\{\theta_0-\pi\bar{\delta}-W_1(\theta_1-\psi_0{}^{\#})-W_2(\theta_2-\bar{\psi}_0{}^{\#})-X^C\} \qquad\cdots\cdots(3.34)$$

再び関係式（3.21）によって

$$C_{00}{}^{(B)}=\frac{\pi\gamma\sigma}{L}\frac{2}{\theta_0}\left(\mathrm{sgn}\,(\delta)+(W_1-W_2)\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}-Y^C\right) \qquad\cdots\cdots(3.35)$$

F_{00} については $\mu_0\fallingdotseq 0$，だから特別な表現は必要なく，(3.29), (3.30) を用いればよい。

次に D_{km} であるが，先ず

$$D_{km}{}^{(A1)}\equiv\frac{4}{\pi\theta_0}\frac{\sigma}{L}(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sin n\theta_0(\cos n\pi\delta-\cos n\psi_0{}^{\#})}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)(1+\sigma^2n^2)} \qquad\cdots\cdots(3.36)$$

$$\mu_k=2k\pi/\theta_0,\quad \mu_m=(2m+1)\pi/\theta_0 \qquad\cdots\cdots(3.37)$$

部分分数展開

$$\frac{n^2}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)(1+\sigma^2n^2)}=\frac{\mu_k{}^2}{(\mu_m{}^2-\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_k{}^2)}\frac{1}{\mu_k{}^2-n^2}$$

$$+\frac{\mu_m{}^2}{(\mu_k{}^2-\mu_m{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\frac{1}{\mu_m{}^2-n^2}-\frac{1}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\frac{1}{1/\sigma^2+n^2} \qquad\cdots\cdots(3.38)$$

また等式

$$\sin n\theta_0\cos n\pi\delta=\frac{1}{2}\sin n(\theta_0+\pi\bar{\delta})+\frac{1}{2}\sin n(\theta_0-\pi\bar{\delta}) \qquad\cdots\cdots(3.39)$$

$$\sin n\theta_0\cos n\psi_0{}^{\#}=\frac{1}{2}\sin n(\theta_0+\psi_0{}^{\#})+\frac{1}{2}\sin n(\theta_0-\psi_0{}^{\#})$$

$$=\frac{1}{2}\overline{sg}\sin n|\theta_0-\bar{\psi}_0{}^{\#}|+\frac{1}{2}sg\sin n|\theta_0-\psi_0{}^{\#}| \qquad\cdots\cdots(3.40)$$

$$sg\equiv\mathrm{sgn}(\theta_0-\psi_0),\quad \overline{sg}\equiv\mathrm{sgn}(\theta_0-\bar{\psi}_0{}^{\#}) \qquad\cdots\cdots(3.41)$$

およびフーリエ展開

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta}{\mu^2-n^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\mu(\pi-\theta)}{\sin\mu\pi}\quad 0<\theta<2\pi \qquad\cdots\cdots(3.42)$$

$$(n\fallingdotseq 0,1,2,\cdots)$$

を用いる。前記と同様な変換によって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta_0\cos n\pi\delta}{\mu^2-n^2}=\mp\frac{\pi}{2}\cos\mu\pi\delta \qquad\cdots\cdots(3.43)$$

複号は上が $\mu=\mu_{2k}$，下が $\mu=\mu_{2m+1}$ に対応する。また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta_0\cos n\psi_0{}^{\#}}{\mu^2-n^2}=\mp\frac{\pi}{2}(W_1\cos\mu\psi_0{}^{\#}+W_2\cos\mu\bar{\psi}_0{}^{\#}) \qquad\cdots\cdots(3.44)$$

複号は上記の通り。

次にフーリエ展開[3)]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta}{\mu^2+n^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\sinh(\pi-\theta)}{\sinh\mu\pi},\quad 0<\theta<2\pi \qquad\cdots\cdots(3.45)$$

を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta_0(\cos n\pi\delta-\cos n\phi_0{}^{\#})}{1/\sigma^2+n^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta}}{\sigma}+\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0-\pi\bar{\delta}}{\sigma}\\ -\frac{1}{2}sg\cdot\sinh\frac{\pi-|\theta_0-\phi_0{}^{\#}|}{\sigma}-\frac{1}{2}\overline{sg}\cdot\sinh\frac{\pi-|\theta_0-\bar{\phi}_0{}^{\#}|}{\sigma}\end{array}\right\}\Big/\sinh\pi/\sigma \quad \cdots\cdots(3.46)$$

次に

$$D_{km}{}^{(A2)}\equiv-\frac{\gamma\Omega}{2}\frac{1}{L}\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0(\cos n\pi\delta-\cos n\phi_0{}^{\#})}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)} \quad \cdots\cdots(3.47)$$

は部分分数展開

$$\frac{1}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)}=\frac{1}{\mu_m{}^2-\mu_k{}^2}\left(\frac{1}{\mu_k{}^2-n^2}-\frac{1}{\mu_m{}^2-n^2}\right) \quad \cdots\cdots(3.48)$$

を利用すれば上の諸結果から容易に書下すことが出来る。結局

$$D_{km}{}^{(A)}=D_{km}{}^{(A1)}+D_{km}{}^{(A2)}$$

$$=\frac{(-1)^{k+m}}{L}\frac{2}{\theta_0}\left[\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\sigma\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}-\frac{\gamma\Omega}{2}\right)(\cos\mu_k\pi\bar{\delta}-W_1\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\\ \quad+\left(\frac{\sigma\mu_m{}^2}{1+\sigma^2\mu_m{}^2}-\frac{\gamma\Omega}{2}\right)(\cos\mu_m\pi\bar{\delta}-W_1\cos\mu_m\phi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_m\bar{\phi}_0{}^{\#})\end{array}\right\}}{\mu_k{}^2-\mu_m{}^2}-\frac{U}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\right] \quad \cdots\cdots(3.49)$$

ここに

$$U=\frac{\sigma\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0+\pi\bar{\delta}}{\sigma}+\frac{1}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0-\pi\bar{\delta}}{\sigma}\\ -\frac{1}{2}sg\cdot\sinh\frac{\pi-|\theta_0-\phi_0{}^{\#}|}{\sigma}-\frac{1}{2}\overline{sg}\cdot\sinh\frac{\pi-|\theta_0-\bar{\phi}_0{}^{\#}|}{\sigma}\end{array}\right\}}{\sinh\pi/\sigma} \quad \cdots\cdots(3.50)$$

次に

$$D_{km}{}^{(B)}=\frac{\gamma\pi}{L}\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin n\theta_0\left(\sin n\pi\delta+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\sin n\phi_0{}^{\#}\right)}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)(1+\sigma^2n^2)} \quad \cdots\cdots(3.51)$$

についても全く同様な変換を適用して

$$D_{km}{}^{(B)}=\frac{\pi\gamma}{L}(-1)^{k+m+1}\frac{2}{\theta_0}$$

$$\times\left[\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{\mu_k\left\{\sin\mu_k\pi\delta+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\\ +\frac{\mu_m\left\{\sin\mu_m\pi\delta+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\sin\mu_m\phi_0{}^{\#}-W_2\sin\mu_m\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}}{1+\sigma^2\mu_m{}^2}\end{array}\right\}}{\mu_k{}^2-\mu_m{}^2}-\frac{V}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\mu_m{}^2)}\right] \quad \cdots\cdots(3.52)$$

ここに

$$V=\frac{\sigma\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-\theta_0+\pi\delta}{\sigma}-\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-\theta_0-\pi\delta}{\sigma}\\ \quad+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\left(\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-|\theta_0-\phi_0{}^{\#}|}{\sigma}-\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi-|\theta_0-\bar{\phi}_0{}^{\#}|}{\sigma}\right)\end{array}\right\}}{\sinh\pi/\sigma} \quad\cdots\cdots(3.53)$$

ちなみに今度は

$$D_{km}{}^{(A1)}=-\frac{\sigma}{\pi\gamma}\left(\partial/\partial(\pi\delta)-\frac{l}{\bar{\xi}-\xi}\partial/\partial\phi_0{}^{\#}\right)D_{km}{}^{(B)} \quad\cdots\cdots(3.54)$$

が成り立っている。

4. 係数 $\bar{H}_{km}$ 等に対する閉じた表現

1) $\mu_k\fallingdotseq\mu_m$ の場合

$$\left.\begin{array}{l}\bar{H}_{km}\\ \bar{K}_{km}\end{array}\right\} \text{に対して} \left\{\begin{array}{ll}\mu_k=2k\pi/\theta_0, & \bar{\mu}_m=2m\pi/\bar{\theta}_0\\ \mu_k=(2k+1)\pi/\theta_0, & \bar{\mu}_m=(2m+1)\pi/\bar{\theta}_0\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(4.01)$$

と置いて C_{km} および F_{km} の場合と全く平行に進むとき

$$\left.\begin{array}{l}\bar{H}_{km}{}^{(A)}\\ \bar{K}_{km}{}^{(A)}\end{array}\right\}=\mp\frac{(-1)^{k+m}}{L}\frac{2}{\theta_0}\left[\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{\mu_k(W_1\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}+W_2\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}-\sin\mu_k\pi\bar{\delta})}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\\ \quad-\frac{\bar{\mu}_m(V_1\sin\bar{\mu}_m\phi_0{}^{\#}+V_2\sin\bar{\mu}_m\bar{\phi}_0{}^{\#}-\cos\bar{\mu}_m\pi\bar{\delta})}{1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2}\end{array}\right\}}{\mu_k{}^2-\bar{\mu}_m{}^2}-\frac{X_F{}^C}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2)}\right]$$

$$(k,m=0,1,2,\cdots) \quad\cdots\cdots(4.02)$$

ここに

$$\left.\begin{array}{ll}W_1\equiv\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(\theta_0-\phi_0{}^{\#})\}, & W_2\equiv\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(\theta_0-\bar{\phi}_0{}^{\#})\}\\ V_1\equiv\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(\bar{\theta}_0-\phi_0{}^{\#})\}, & V_2\equiv\frac{1}{2}\{1+\mathrm{sgn}(\bar{\theta}_0-\bar{\phi}_0{}^{\#})\}\\ V_1=1-W_2, \quad V_2=1-W_1 & \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(4.03)$$

次に

$$\left.\begin{array}{l}\bar{H}_{km}{}^{(B)}\\ \bar{K}_{km}{}^{(B)}\end{array}\right\}=-\frac{\pi\gamma\sigma}{L}(-1)^{k+m}\frac{2}{\theta_0}$$

$$\times\left[\frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{\mu_k{}^2\left\{\mathrm{sgn}(\delta)\cos\mu_k\pi\bar{\delta}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\\ -\frac{\bar{\mu}_m{}^2\left\{\mathrm{sgn}(\delta)\cos\bar{\mu}_m\pi\bar{\delta}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}(V_1\cos\bar{\mu}_m\phi_0{}^{\#}-V_2\cos\bar{\mu}_m\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}}{1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2}\end{array}\right\}}{\mu_k{}^2-\bar{\mu}_m{}^2}-\frac{Y_F{}^C}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2)}\right]$$

$$(k,m=0,1,2,\cdots) \quad\cdots\cdots(4.04)$$

2) $\mu_k=\bar{\mu}_m$, $\mu_k+\bar{\mu}_m>0$ **の場合**

すなわち，それぞれ

$$\begin{cases}\theta_0=\dfrac{2k\pi}{k+m}, & \bar{\theta}_0=\dfrac{2m\pi}{k+m}, \quad \mu_k=\bar{\mu}_m=k+m \\ \theta_0=\dfrac{(2k+1)\pi}{k+m+1}, & \bar{\theta}_0=\dfrac{(2m+1)\pi}{k+m+1}, \quad \mu_k=\bar{\mu}_m=k+m+1\end{cases} \quad \cdots\cdots(4.05)$$

の場合である。$\bar{H}_{km}$ および $\bar{K}_{km}$ の定義式 (1.02) において無造作に $\mu_k=\bar{\mu}_m$ と置くと

$$\begin{cases}\bar{H}_{km}=-(-1)^{k+m}C_{kk} \\ \bar{K}_{km}=(-1)^{k+m}F_{kk}\end{cases} \quad \cdots\cdots(4.06)$$

となるが，正しくは (4.02)，(4.04) の不定形 0/0 の表現において

$$\theta_0\to\begin{cases}2k\pi/(k+m) \\ (2k+1)\pi/(k+m+1)\end{cases} \qquad \bar{\theta}_0\to\begin{cases}2m\pi/(k+m) \\ (2m+1)\pi/(k+m+1)\end{cases} \quad \cdots\cdots(4.07)$$

に対する極限を求めなくてはならない。それには微分学の定理によって分子を θ_0 をで微分したものを分母を θ_0 で微分したもので除すればよい。このとき

$$d\mu_k/d\theta_0=-\mu_k/\theta_0, \quad d\bar{\mu}_m/d\theta_0=\bar{\mu}_m/\bar{\theta}_0 \quad \cdots\cdots(4.08)$$

に注意する。

結局

$$\left.\begin{matrix}\bar{H}_{km}{}^{(A)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m) \\ \bar{K}_{km}{}^{(A)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m)\end{matrix}\right\}=\mp\frac{1}{L}\frac{(-1)^{k+m}}{\theta_0}\frac{1}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}$$
$$\times\left[\begin{matrix}\left(\dfrac{\bar{\theta}_0}{2\pi}W_1+\dfrac{\theta_0}{2\pi}V_1\right)\left(\phi_0{}^{\#}\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}+\dfrac{1-\sigma^2\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\dfrac{\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}}{\mu_k}\right) \\ +\left(\dfrac{\bar{\theta}_0}{2\pi}W_2+\dfrac{\theta_0}{2\pi}V_2\right)\left(\bar{\phi}_0{}^{\#}\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}+\dfrac{1-\sigma^2\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\dfrac{\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}}{\mu_k}\right) \\ -\pi\bar{\delta}\cos\mu_k\pi\bar{\delta}-\dfrac{1-\sigma^2\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\dfrac{\sin\mu_k\pi\bar{\delta}}{\mu_k}-\dfrac{2X_F{}^C}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\end{matrix}\right]$$
$$\cdots\cdots(4.09)$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{H}_{km}{}^{(B)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m) \\ \bar{K}_{km}{}^{(B)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m)\end{matrix}\right\}=\mp\frac{\pi\gamma\sigma}{L}\frac{(-1)^{k+m}}{\theta_0}\frac{1}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}$$
$$\times\left[\begin{matrix}\left(\dfrac{\bar{\theta}_0}{2\pi}W_1+\dfrac{\theta_0}{2\pi}V_1\right)\left(\dfrac{2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-\mu_k\phi_0{}^{\#}\sin\mu_k\phi_{0\#}\right) \\ -\left(\dfrac{\bar{\theta}_0}{2\pi}W_2+\dfrac{\theta_0}{2\pi}V_2\right)\left(\dfrac{2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}-\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}\right) \\ +\mathrm{sgn}(\delta)\left(\dfrac{2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\cos\mu_k\pi\bar{\delta}-\mu_k\pi\bar{\delta}\sin\mu_k\pi\bar{\delta}\right)-\dfrac{2Y_F{}^C}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\end{matrix}\right]$$
$$\cdots\cdots(4.10)$$

ここでも

$$\left.\begin{matrix}\bar{H}_{km}{}^{(B)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m) \\ \bar{K}_{km}{}^{(B)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m)\end{matrix}\right\}=\pi\gamma\sigma\left(-\frac{\partial}{\partial(\pi\delta)}+\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}\frac{\partial}{\partial\phi_0{}^{\#}}\right)\left\{\begin{matrix}\bar{H}_{km}{}^{(A)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m) \\ \bar{K}_{km}{}^{(A)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m)\end{matrix}\right. \quad \cdots\cdots(4.11)$$

3) $\mu_k=\mu_m,\ \mu_k+\mu_m=0$ の場合

このときに定義式 (2.01), (2.02) から

$$\bar{H}_{00}{}^{(A)}=C_{00}{}^{(A)},\quad H_{00}{}^{(B)}=-C_{00}{}^{(B)} \qquad\cdots\cdots(4.12)$$

すなわち

$$\bar{H}_{00}{}^{(A)}=-\frac{1}{L}\frac{2}{\theta_0}\{\theta_0-\pi\bar{\delta}-W_1(\theta_0-\psi_0{}^{\#})-W_2(\theta_0-\bar{\psi}_{0\#})-X^C\} \qquad\cdots\cdots(4.13)$$

$$\bar{H}_{00}{}^{(B)}=-\frac{\pi\gamma\sigma}{L}\frac{2}{\theta_0}\left\{\mathrm{sgn}(\delta)+(W_1-W_2)\frac{\bar{\xi}-\xi}{l}-Y^C\right\} \qquad\cdots\cdots(4.14)$$

次に $\bar{I}_{km}$ については

$$\mu_k=2k\pi/\theta_0,\quad \bar{\mu}_m=(2m+1)\pi/\bar{\theta}_0 \qquad\cdots\cdots(4.15)$$

として D_{km} の場合と全く平行に，先ず

1) $\mu_k\neq\bar{\mu}_m$ の場合

$$\bar{I}_{km}{}^{(A)}=\frac{1}{L}(-1)^{k+m}\frac{2}{\theta_0}$$
$$\times\left[\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\sigma\mu_k{}^2}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}-\dfrac{\gamma\Omega}{2}\right)(\cos\mu_k\pi\delta-W_1\cos\mu_k\psi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_k\bar{\psi}_0{}^{\#})\\ -\left(\dfrac{\sigma\bar{\mu}_m{}^2}{1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2}-\dfrac{\gamma\Omega}{2}\right)(\cos\bar{\mu}_m\pi\delta-V_1\cos\bar{\mu}_m\psi_0{}^{\#}-V_2\cos\bar{\mu}_m\bar{\psi}_0{}^{\#})\end{array}\right\}}{\mu_k{}^2-\bar{\mu}_m{}^2} -\frac{U}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2)}\right]$$
$$\cdots\cdots(4.16)$$

$$\bar{I}_{km}{}^{(B)}=\frac{\pi\gamma}{L}(-1)^{k+m+1}\frac{2}{\theta_0}$$
$$\times\left[\frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mu_k}{1+\sigma^2\mu_k{}^2}\left\{\sin\mu_k\pi\delta+\dfrac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\sin\mu_k\psi_0{}^{\#}-W_2\sin\mu_k\bar{\psi}_0{}^{\#})\right\}\\ -\dfrac{\bar{\mu}_m}{1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2}\left\{\sin\bar{\mu}_m\pi\delta+\dfrac{\bar{\xi}-\xi}{l}(V_1\sin\bar{\mu}_m\psi_0{}^{\#}-V_2\sin\bar{\mu}_m\bar{\psi}_0{}^{\#})\right\}\end{array}\right\}}{\mu_k{}^2-\bar{\mu}_m{}^2} -\frac{V}{(1+\sigma^2\mu_k{}^2)(1+\sigma^2\bar{\mu}_m{}^2)}\right]$$
$$\cdots\cdots(4.17)$$

2) $\mu_k=\bar{\mu}_m$ の場合

このとき

$$\theta_0\to 2k\pi/(k+m+1/2),\quad \bar{\theta}_0\to(2m+1)\pi/(k+m+1/2)$$

に対する (4.16), (4.17) の極限を求める。

$\bar{H}_{km}$ の場合と平行に進んで

$$\bar{I}_{km}{}^{(A)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m)=\frac{(-1)^{k+m}}{L}\frac{1}{\theta_0}$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\dfrac{\bar{\theta}_0}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\sigma}{(1+\sigma^2\mu_k^2)^2}(\cos\mu_k\pi\delta-W_1\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\\ \quad+\left(\dfrac{\sigma\mu_k}{1+\sigma^2\mu_k^2}-\dfrac{\gamma\Omega}{2\mu_k}\right)\left(\begin{array}{l}W_1\phi_0{}^{\#}\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}+W_2\bar{\phi}_0{}^{\#}\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}\\ -\pi\delta\sin\mu_k\pi\delta\end{array}\right)\end{array}\right\}\\ \\ +\dfrac{\theta_0}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2\sigma}{(1+\sigma^2\mu_k^2)^2}(\cos\mu_k\pi\delta-V_1\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-V_2\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\\ \quad+\left(\dfrac{\sigma\mu_k}{1+\sigma^2\mu_k^2}-\dfrac{\gamma\Omega}{2\mu_k}\right)\left(\begin{array}{l}V_1\phi_0{}^{\#}\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}+V_2\bar{\phi}_0{}^{\#}\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#}\\ -\pi\delta\sin\mu_k\pi\delta\end{array}\right)\end{array}\right\}\\ \\ -\dfrac{2U}{(1+\sigma^2\mu_k^2)^2}\end{array}\right]$$

$$\bar{I}_{km}{}^{(B)}(\mu_k\to\bar{\mu}_m)=\frac{(-1)^{k+m+1}}{L}\frac{\pi\gamma}{\theta_0}\frac{1}{1+\sigma^2\mu_k^2}$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\dfrac{\bar{\theta}_0}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\mu_k}\dfrac{1-\sigma^2\mu_k^2}{1+\sigma^2\mu_k^2}\left\{\sin\mu_k\pi\delta+\dfrac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}\\ \quad+\pi\delta\sin\mu_k\pi\delta+\dfrac{\bar{\xi}-\xi}{l}(W_1\phi_0{}^{\#}\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-W_2\bar{\phi}_0{}^{\#}\cos\mu_k\bar{\phi}_0)\end{array}\right\}\\ \\ +\dfrac{\theta_0}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\mu_k}\dfrac{1-\sigma^2\mu_k^2}{1+\sigma^2\mu_k^2}\left\{\sin\mu_k\pi\delta+\dfrac{\bar{\xi}-\xi}{l}(V_1\sin\mu_k\phi_0{}^{\#}-V_2\sin\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\right\}\\ \quad+\pi\delta\cos\mu_k\pi\delta+\dfrac{\bar{\xi}-\xi}{l}(V_1\phi_0{}^{\#}\cos\mu_k\phi_0{}^{\#}-V_2\bar{\phi}_0{}^{\#}\cos\mu_k\bar{\phi}_0{}^{\#})\end{array}\right\}\\ \\ -\dfrac{2V}{1+\sigma^2\mu_k^2}\end{array}\right]$$

今度も

$$\bar{I}_{km}{}^{(A)}=\frac{\sigma}{\gamma\pi}\left(-\partial/\partial(\pi\delta)+\frac{l}{\bar{\xi}-\xi}\partial/\partial\phi_0{}^{\#}\right)\bar{I}_{km}{}'$$

が成り立つ。

残りは $\bar{J}_{km}$ であるが，これは $\bar{I}_{km}$ の表現から置換

$$\bar{J}_{km}(\theta_0)=-\frac{\bar{\theta}_0}{\theta_0}\bar{I}_{mk}(\theta_0\rightleftharpoons\bar{\theta}_0)$$

によって得られる。

更に $\bar{C}_{km}$ 等および H_{km} 等は C_{km} 等および $\bar{H}_{km}$ 等の表現において $\theta_0\rightleftharpoons\bar{\theta}_0$ の置換を行えばよい。

5. 係数 C_{km}'' 等および $\bar{H}_{km}''$ 等に対する閉じた表現

弓作用のコンプライアンスと減衰の効果は弦の横振動に対する本来の係数 C_{km} 等および $\bar{H}_{km}$ 等にこれ等の効果に対する附加的な係数 $\sigma_3 C_{km}''$ 等および $\sigma_3\bar{H}_{km}''$ 等を加えることによって評価される。ここに σ_3 は弦の弾性の弓の弾性に対する比で

$$\sigma_3=\frac{Tl}{K\xi\bar{\xi}}=\frac{T}{AE}\frac{z_0(1-z_0)}{z(1-z)}\frac{L}{l}=0,0710643 \qquad \cdots\cdots(5.01)$$

(T: 弦の張力=4.99 kgf, AE: 弓の有効縦弾性力=315 kgf, $z=\xi/l=1/9$, z_0=弓の擦弦点の位置を示す比=0.4, L: 弓の長さ=60 cm, l: 弦の長さ=32.5 cm。数値はA線に対

する一例である。）で与えられる。

また C_{km}'' 等および $\bar{H}_{km}''$ 等は (2.01), (2.02) の定義式の $M_n \cos\phi_n$ および $M_n \sin\phi_n$ の代りに

$$q=2\zeta\Omega \quad (\zeta:\text{ 弓作用の減衰比}) \qquad \cdots\cdots(5.02)$$

として

$$M_n'' \cos\phi_n''=1/(1+q^2n^2), \quad M_n'' \sin\phi_n''=qn/(1+q^2n^2) \qquad \cdots\cdots(5.03)$$

を代入したものである。

先ず，

$$\left.\begin{matrix} C_{km}'' \\ F_{km}'' \end{matrix}\right\}=\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4(1\mp\cos n\theta_0)}{(\mu_k^2-n^2)(\mu_m^2-n^2)(1+q^2n^2)} \qquad \cdots\cdots(5.04)$$

$$\mu_k=\begin{cases}2k\pi/\theta_0 \\ (2k+1)\pi/\theta_0\end{cases} \qquad \mu_m=\begin{cases}2m\pi/\theta_0 \\ (2m+1)\pi/\theta_0\end{cases}$$

1) $\mu_k \doteqdot \mu_m$ の場合

$$\frac{n^4}{(\mu_k^2-n^2)(\mu_m^2-n^2)(1+q^2n^2)}=\frac{\mu_k^4}{(\mu_m^2-\mu_k^2)(1+q^2\mu_k^2)}\frac{1}{\mu_k^2-n^2}$$
$$+\frac{\mu_m^4}{(\mu_k^2-\mu_m^2)(1+q^2\mu_m^2)}\frac{1}{\mu_m^2-n^2}+\frac{1/q^2}{(1+q^2\mu_k^2)(1+q^2\mu_m^2)}\frac{1}{1/q^2+n^2} \qquad \cdots\cdots(5.05)$$

および

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\mp\cos n\theta_0}{\mu_k^2-n^2}=\frac{\pi}{2\mu_k}\frac{\cos\mu_k\pi\mp\cos\mu_k(\pi-\theta_0)}{\sin\mu_k\pi}=\begin{cases}0\\-1/\mu_k^2\end{cases}\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\mp\cos n\theta_0}{\mu_m^2-n^2}=\frac{\pi}{2\mu_m}\frac{\cos\mu_m\pi\mp\cos\mu_m(\pi-\theta_0)}{\sin\mu_m\pi}=\begin{cases}0\\-1/\mu_m^2\end{cases}\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\mp\cos n\theta_0}{1/q^2+n^2}=\frac{\pi}{2}q\frac{\cos\pi/q\mp\cosh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q}+\begin{cases}0\\-q^2\end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(5.06)$$

を用いて（定数項の和は消える，(5.05) 式で $n=0$ とする）

$$\left.\begin{matrix} C_{km}'' \\ F_{km}'' \end{matrix}\right\}=\frac{2}{\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega\frac{\cosh\pi/q\mp\cosh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q}\frac{1}{(1+q^2\mu_k^2)(1+q^2\mu_m^2)} \qquad \cdots\cdots(5.07)$$

2) $\mu_k=\mu_m$, $\mu_k+\mu_m>0$ の場合

$$\frac{n^4}{(\mu_k^2-n^2)^2(1+q^2n^2)}=\frac{\mu_k^4}{1+q^2\mu_k^2}\frac{1}{(\mu_k^2-n^2)^2}-\frac{\mu_k^2(2+q^2\mu_k^2)}{(1+q^2\mu_k^2)^2}\frac{1}{\mu_k^2-n^2}$$
$$+\frac{1/q^2}{(1+q^2\mu_k^2)^2}\frac{1}{1/q^2+n^2} \qquad \cdots\cdots(5.08)$$

および (5.06) と

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\mp\cos n\theta_0}{(\mu_k^2-n^2)^2}=\frac{\pi\theta_0}{4\mu_k^2}+\begin{cases}0\\-1/\mu_k^4\end{cases} \qquad \cdots\cdots(5.09)$$

を用いて

$$\left.\begin{matrix} C_{kk}'' \\ F_{kk}'' \end{matrix}\right\}=\Omega\left[\frac{q\mu_k^2}{1+q^2\mu_k^2}+\frac{2}{\theta_0}\frac{\cosh\pi/q\mp\cosh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q}\frac{1}{(1+q^2\mu_k^2)^2}\right] \qquad \cdots\cdots(5.10)$$

3) $\mu_k=\mu_m$, $\mu_k+\mu_m=0$ の場合

$$C_{00}''=\frac{4}{\pi\theta_0}\frac{\Omega}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\theta_0}{1/q^2+n^2}=\Omega\frac{2}{\theta_0}\frac{\cosh\pi/q-\cosh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q} \quad\cdots\cdots(5.11)$$

次に

$$D_{km}''=-\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sin n\theta_0}{(\mu_k^2-n^2)(\mu_m^2-n^2)(1+q^2n^2)} \quad\cdots\cdots(5.12)$$

$$\mu_k=2k\pi/\theta_0,\quad \mu_m=(2m+1)\pi/\theta_0 \quad\cdots\cdots(5.13)$$

$$\frac{n^2}{(\mu_k^2-n^2)(\mu_m^2-n^2)(1+q^2n^2)}=\frac{\mu_k^2}{(\mu_m^2-\mu_k^2)(1+q^2\mu_k^2)}\frac{1}{\mu_k^2-n^2}$$
$$+\frac{\mu_m^2}{(\mu_k^2-\mu_m^2)(1+q^2\mu_m^2)}\frac{1}{\mu_m^2-n^2}-\frac{1}{(1+q^2\mu_k^2)(1+q^2\mu_k^2)}\frac{1}{1/q^2+n^2} \quad\cdots\cdots(5.14)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0}{\mu_k^2-n^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\mu_k(\pi-\theta_0)}{\sin\mu_k\pi}=-\frac{\pi}{2} && 0<\theta_0<2\pi\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0}{\mu_m^2-n^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\mu_m(\pi-\theta_0)}{\sin n_m\pi}=\frac{\pi}{2} && 0<\theta_0<2\pi\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0}{1/q^2+n^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\sinh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q} && 0<\theta_0<2\pi
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(5.15)$$

を用いて

$$D_{km}''=-\frac{2}{\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega\frac{\dfrac{\mu_k^2+\mu_m^2+2q^2\mu_k^2\mu_m^2}{\mu_k^2-\mu_m^2}-\dfrac{\sinh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q}}{(1+q^2\mu_k^2)(1+q^2\mu_m^2)} \quad\cdots\cdots(5.16)$$

$$D_{0m}''=D_{km}''(k\to 0) \quad\cdots\cdots(5.17)$$

次に

$$\left.\begin{matrix}\bar{H}_{km}''\\ \bar{K}_{km}\end{matrix}\right\}=\mp\frac{4}{\pi\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4(1\mp\cos n\theta_0)}{(\mu_k^2-n^2)(\bar{\mu}_m^2-n^2)(1+q^2n^2)} \quad\cdots\cdots(5.18)$$

$$\mu_k=\begin{cases}2k\pi/\theta_0\\(2k+1)\pi/\theta_0\end{cases},\quad \bar{\mu}_m=\begin{cases}2m\pi/\bar{\theta}_0\\(2m+1)\pi/\bar{\theta}_0\end{cases} \quad\cdots\cdots(5.19)$$

$$\cos n\theta_0=\cos n(2\pi-\bar{\theta}_0)=\cos n\bar{\theta}_0 \quad\cdots\cdots(5.20)$$

全く C_{km}'', F_{km}'' と平行に進んで

$$\left.\begin{matrix}\bar{H}_{km}''\\ \bar{K}_{km}''\end{matrix}\right\}=\mp\frac{2}{\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega\frac{\cosh\pi/q\mp\cosh((\pi-\theta_0)/q)}{\sinh\pi/q}\frac{1}{(1+q^2\mu_k^2)(1+q^2\bar{\mu}_m^2)} \quad\cdots\cdots(5.21)$$

今度は $\mu_k\to\bar{\mu}_m$ のときも不定形がないのでこの表現のままでよい。

最後に

$$\bar{I}_{km}''=-\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega(-1)^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sin n\theta_0}{(\mu_k^2-n^2)(\bar{\mu}_m^2-n^2)(1+q^2n^2)} \quad\cdots\cdots(5.22)$$

$$\mu_k=2k\pi/\theta_0,\quad \bar{\mu}_m=(2m+1)\pi/\bar{\theta}_0 \quad\cdots\cdots(5.23)$$

については

$$\sin n\theta_0=\sin n(2\pi-\bar{\theta}_0)=-\sin n\bar{\theta}_0 \quad\cdots\cdots(5.24)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0}{\mu_k{}^2-n^2}=-\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\mu_k(\pi-\theta_0)}{\sin\mu_k\pi}=-\frac{\pi}{2}\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0}{\bar{\mu}_m{}^2-n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\bar{\theta}_0}{\bar{\mu}_m{}^2-n^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\bar{\mu}_m(\pi-\bar{\theta}_0)}{\sin\bar{\mu}_m\pi}=-\frac{\pi}{2}\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n\theta_0}{1/q^2+n^2}=\frac{\pi}{2}\sinh\frac{\pi-\theta_0}{q}\Big/\sinh\pi/q\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5.25)$$

を (5. 14) と共に用いて

$$\bar{I}_{km}{}''=-\frac{2}{\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega\frac{1-\sinh\dfrac{\pi-\theta_0}{q}\Big/\sinh\pi/q}{(1+q^2\mu_k{}^2)(1+q^2\bar{\mu}_m{}^2)}\quad\cdots\cdots(5.26)$$

今度も $\mu_k\to\bar{\mu}_m$ でもこのままの表現でよい。

残りは $\bar{J}_{km}{}''$ であるが，これは前の $\bar{J}_{km}$ の場合と同様に置換え

$$\bar{J}_{km}{}''(\theta_0)=-\frac{\bar{\theta}_0}{\theta_0}I_{mk}{}''(\theta_0\rightleftarrows\bar{\theta}_0)\quad\cdots\cdots(5.27)$$

によって得られる。

6. 結　　語

この報文は主報[1]についての補遺報であって，主報における無限連立方程式の諸係数を与える無限級数の和の導出方法を示したものである。

文　献

1) 前澤ほか2名，日本機械学会論文集，C編，53巻485号（昭62-1），p. 36.
2) 高木，解析概論，岩波書店，p. 236.
3) 森口ほか，数学公式III，岩波書店，p. 78.

附　　録

$$C_{km}=\frac{4}{n\theta_0}(-1)^{k+m}\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)}M_n\sin\phi_n\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}.1)$$

であるので $M_n\,\mathrm{Exp}(-j\phi_n)\,(n=1,2,\cdots,n_0)$ の誤差の最大を Δ とすれば $1\leqq n\leqq n_0$ における対する誤差の寄与 ΔC_{km} は

$$|\Delta C_{km}|\leqq\frac{4}{\pi\theta_0}\Omega\sum_{n=1}^{n_0}\left|\frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)}\right|\Delta\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}.2)$$

先ず $k\neq m$ のとき

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{n_0}\left|\frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_k{}^2-n^2)(\mu_m{}^2-n^2)}\right|\\&\leqq\frac{1}{2|\mu_m{}^2-\mu_k{}^2|}\sum_{n=1}^{n_0}\left(\frac{\mu_k{}^2}{|\mu_k-n|}+\frac{\mu_k{}^2}{|\mu_k+n|}+\frac{\mu_m{}^2}{|\mu_m-n|}+\frac{\mu_m{}^2}{|\mu_m+n|}\right)(1-\cos n\theta_0)\end{aligned}\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}.3)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0}\frac{|1-\cos n\theta_0|}{|\mu_k-n|}\leqq\sum_{n=1}^{n_3-1}\frac{2}{\mu_k-n}+\frac{1-\cos n_3\theta_0}{\mu_k-n_3}+\frac{1-\cos n_4\theta_0}{n_4-\mu_k}+\sum_{n_4+1}^{n_0}\frac{2}{n-\mu_k}\quad\cdots\cdots(\mathrm{A}.4)$$

ここに n_3, n_4 は $n_3\leqq\mu_k<n_4$ のような μ_k を挟むところの相続く正整数である。一般に

$\mu \geqq 1$ のとき

$$\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu+1}+\cdots+\frac{1}{\mu+n} \leqq \int_{\mu-\frac{1}{2}}^{\mu+n+\frac{1}{2}} dx/x = \ln\frac{2\mu+2n+1}{2\mu-1} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A.}\,5)$$

また

$$\lim_{\mu_k \to n} \frac{1-\cos n\theta_0}{\mu_k - n} = 0 \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A.}\,6)$$

が成立するので（A. 4）の 4 個の項はすべて或る定数を超えない。従って（A. 3）の和は或る定数を超えず，従ってまた（A. 2）の和は $O(\gamma)$ である。

次に $k=m$ のときは

$$\frac{n^3}{(\mu_k{}^2-n^2)^2} = \frac{\mu_k}{4}\left(\frac{1}{(\mu_k-n)^2} - \frac{1}{(\mu_k+n)^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_k-n} - \frac{1}{n_k+n}\right)$$

再び

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{|1-\cos n\theta_0|}{|\mu_k-n|^2} \leqq \sum_{n=1}^{n_3-1} \frac{2}{(\mu_k-n)^2} + \frac{1-\cos n_3\theta_0}{(\mu_k-n_3)^2} + \frac{1-\cos n_4\theta_0}{(n_4-\mu_k)^2} + \sum_{n_4+1}^{n_0} \frac{2}{(n-\mu_k)^2}$$

一般に $\mu \geqq 1$ のとき

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{(\mu+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(\mu+n)^2} \leqq \int_{\mu-\frac{1}{2}}^{\mu+n+\frac{1}{2}} dx/x^2 \leqq 1\Big/\left(\mu-\frac{1}{2}\right)$$

および

$$\lim_{\mu_k \to n} \frac{1-\cos n\theta_0}{(\mu_k-n)^2} = \frac{\theta_0{}^2}{2}$$

が成り立つので（A. 5）と合せて，今度の場合も（A. 2）の和は $O(\gamma)$ に止まる。