

ルについて,

$$X_i \sim N_p(\mu, \Sigma), \quad X_i \perp, \quad i=1, 2, \dots, a. \quad \dots\dots (1.3.2)$$

(すなわち, 行列 $X_{a,p}$ の各行ベクトルは, それぞれ統計的に独立で, 同一の平均ベクトル μ , 同一の分散共分散 Σ もつ p 変数正規分布をするという意味) とは全く同値である。

また, $X_{a,p}$ の列ベクトルについて

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_\beta &\sim N_a(\mu_\beta \mathbf{1}_a, \sigma_{\beta\beta} I_a) \\ \text{Cov}(\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta) &= \sigma_{\alpha\beta} I_a \\ \alpha, \beta &= 1, 2, \dots, p \quad \alpha \neq \beta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (1.3.3)$$

ここに $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \dots & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \dots & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

とする, この (1.3.3) と (1.3.1) と同値である。すなわち

$X_{a,p}$ が正規行列の定義は,

$$\begin{array}{ccc} (1.3.1) & \longleftrightarrow & (1.3.2) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & (1.3.3) & \end{array}$$

(1.2) の各行ベクトル X_i' の平均ベクトル μ_i が同じでなく

$$X_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma), \quad X_i \perp, \quad \dots\dots (1.4.1)$$

ここに, $\mu_i' = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{ip})$, $i=1, 2, \dots, a$.

の正規行列 $X_{a,p}$ を出発点として考える場合もある。このとき, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_a$ からつくるつぎの行列

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu_{11}, & \mu_{12}, & \dots, & \mu_{1p} \\ \mu_{21}, & \mu_{22}, & \dots, & \mu_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{a1}, & \mu_{a2}, & \dots, & \mu_{ap} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \vdots \\ \mu_a' \end{bmatrix} \\ &= [\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_p] \\ &\equiv \mu_{a,p} \end{aligned}$$

を母平均行列という。ここに $\hat{\mu}_\alpha$ は,

$$\hat{\mu}_\alpha' = (\mu_{1\alpha}, \mu_{2\alpha}, \dots, \mu_{a\alpha}), \quad \alpha=1, 2, \dots, p.$$

で, α 成分ベクトルの母平均ベクトルである。

$X_{a,p}$ が (1.4.1) で分布するのと, $X_{a,p}$ の p, d, f , $f(X_{a,p})$ は

$$f(X_{a,p}) = (2\pi)^{-\frac{ap}{2}} |\Sigma|^{-\frac{a}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} (X_{a,p} - \mu_{a,p})' (X_{a,p} - \mu_{a,p}) \right] \quad \dots\dots (1.4.2)$$

とは同値であり, また,

他の1人には1.5合の飲酒（これを T_2 処理とす）

最後の1人は2合の飲酒（これを T_3 処理とす）

(a)	処理	脈搏増加量	血圧増加量	酒気
第 i 組	T_1	$(X_{11}(i)$	$X_{12}(i)$	$X_{13}(i) = X_1(i)'$
	母平均	$(\mu_{11}$	μ_{12}	$\mu_{13}) = \mu_1'$
	T_2	$(X_{21}(i)$	$X_{22}(i)$	$X_{23}(i) = X_2'(i)$
	母平均	$(\mu_{21}$	μ_{22}	$\mu_{23}) = \mu_2'$
	T_3	$(X_{31}(i)$	$X_{32}(i)$	$X_{33}(i) = X_3'(i)$
	母平均	$(\mu_{31}$	μ_{32}	$\mu_{33}) = \mu_3'$

で、行列 $X_{3,3}(i) \sim N_{3,3} \left[\begin{pmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \mu_3' \end{pmatrix}, I_3 \otimes \Sigma \right], X_{3,3}(i) \perp$ とみてよい。

しかし、被検者を無作為に k 人抽出して、各人に T_1, T_2, T_3 をくり返して施す。くり返し処理を行うとき、つぎの2通の方法がある。

(b₁) 毎日一処理 T_i を実施し、三日で終る検査で、処理順序は無作為の場合。

(b₂) 処理順序を T_1, T_2, T_3 として処理間隔を中2日位とる。

α 氏 $T_1: X_1'(\alpha) = (X_{11}(\alpha), X_{12}(\alpha), X_{13}(\alpha))$

$T_2: X_2'(\alpha) = (X_{21}(\alpha), X_{22}(\alpha), X_{23}(\alpha))$

$T_3: X_3'(\alpha) = (X_{31}(\alpha), X_{32}(\alpha), X_{33}(\alpha))$

同一人に T_1, T_2, T_3 を施したので、「 $X_i \perp, i=1, 2, 3$ 」と見るのは無理で、

$$(b_1) \text{ の場合は } \begin{cases} \text{cov}(X_i(\alpha), X_j(\alpha)) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} i \neq j \\ V(X_i(\alpha)) = \Sigma \end{cases}$$

$$(b_2) \text{ の場合は } \begin{cases} \text{cov}(X_i(\alpha), X_{i+1}(\alpha)) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \\ \text{cov}(X_i(\alpha), X_{i+2}(\alpha)) = 0_{3 \times 3} \\ V(X_i(\alpha)) = \Sigma \end{cases}$$

これを共分散関係で図示すると (....., ----- は共分散あり)

$$(a) \text{ の場合 } \begin{array}{l} X_{11} \cdots \cdots X_{12} \cdots \cdots X_{13} \quad ; \quad V(X_1) = \Sigma \\ X_{21} \cdots \cdots X_{22} \cdots \cdots X_{23} \quad ; \quad V(X_2) = \Sigma \\ X_{31} \cdots \cdots X_{32} \cdots \cdots X_{33} \quad ; \quad V(X_3) = \Sigma \end{array}$$

$$(b_1) \text{ の場合 } \begin{array}{l} X_{11} \cdots \cdots X_{12} \cdots \cdots X_{13} \quad ; \quad V(X_1) = \Sigma \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ (a_1) \quad \quad \quad (a_2) \quad \quad \quad (a_3) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ X_{21} \cdots \cdots X_{22} \cdots \cdots X_{23} \quad ; \quad V(X_2) = \Sigma \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ (a_1) \quad \quad \quad (a_2) \quad \quad \quad (a_3) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ X_{31} \cdots \cdots X_{32} \cdots \cdots X_{33} \quad ; \quad V(X_3) = \Sigma \end{array}$$

の真偽について検定する。

§2 では $X_{a,p} \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^*)$ のもとで、各処理による母平均ベクトル $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_a$ の一様性仮説検定問題を。

§3 では $X_{a,p} \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^{**})$ のもとで、 $a=3, a=5$ の場合にある種の μ_1, μ_2, μ_3 の1次式

$$L(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0$$

の仮説検定問題を取り扱う。

§2 の検定要領は昭和60年(秋)、日本数学会(富山大学)で研究発表済であり、§3 の検定要領は昭和61年(春)、日本数学会(京都大学)で研究発表済のものである。

§2. $X_{a,p} \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^*)$ と $P_S^{(2)} X_{a,p}$ の研究

いま無作為に抽出された k 個の対象に対して、各対象に、無作為に処理 T_1, T_2, \dots, T_a を繰り返し施し、 p 変量ベクトル X を調べてつぎの行列 $X_{a,p}$ を得たとする。ここに X_i は処理 T_i による観測ベクトル、

$$X_{a,p} \equiv \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1p} \\ X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2p} \\ \vdots \\ X_{a1}, X_{a2}, \dots, X_{ap} \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} N_p(\mu_1', \Sigma) \\ N_p(\mu_2', \Sigma) \\ \vdots \\ N_p(\mu_a', \Sigma) \end{matrix}$$

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \text{diag}(\sigma_{11}\rho_{11}, \sigma_{22}\rho_{22}, \dots, \sigma_{pp}\rho_{pp}) \equiv \Delta$$

これが i 対象のものであるとき $X_{a,p}(i)$ とする。

$$X_{a,p}(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1p} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \dots, \mu_{2p} \\ \vdots \\ \mu_{a1}, \mu_{a2}, \dots, \mu_{ap} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1'(i) \\ e_2'(i) \\ \vdots \\ e_a'(i) \end{bmatrix}$$

$$= [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_a] \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \vdots \\ \mu_a' \end{bmatrix} + E_{a,p}(i)$$

$$E_{a,p}(i) \sim N_{a,p}(O_{a,p}, \Sigma^*) \dots \dots \text{誤差行列}$$

とかける。

$ka \times p$ の行列 $X_{a,k,p}$ をつぎのように定義する。

$$X_{a,k,p} \equiv \begin{bmatrix} X_{a,p}(1) \\ X_{a,p}(2) \\ \vdots \\ X_{a,p}(k) \end{bmatrix} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_k]$$

ここに \hat{X}_α は $X_{a,k,p}$ の α 列ベクトルで、 $\hat{X}_\alpha' = (\hat{X}_\alpha'(1), \hat{X}_\alpha'(2), \dots, \hat{X}_\alpha'(k))$ とする。
 $X_{a,k,p}$ の確率構造模形はつぎのようになる。

$$X_{a,k,p} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_a \\ \vdots \\ I_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \vdots \\ \mu_a' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{a,p}(1) \\ E_{a,p}(2) \\ \vdots \\ E_{a,p}(k) \end{bmatrix} \equiv [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_a] \mu_{a,p} + E_{a,k,p}$$

で、 $E_{a,p}(i) \sim N_{a,p}(O_{a,p}, \Sigma^*)$ で、 $E_{a,p}(i) \perp$ より、

$$E_{a,k,p} \sim N_{a,k,p} \left(O_{a,k,p}, \begin{pmatrix} \Sigma^* & 0 \\ 0 & \Sigma^* \end{pmatrix} \right)$$

また,

$$V_r[\hat{X}_a]_{(ak \times ak)} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha}A(\rho_\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha\alpha}A(\rho_\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\alpha\alpha}A(\rho_\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A(\rho_\alpha)_{(a \times a)} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_\alpha & \cdots & \rho_\alpha \\ \rho_\alpha & 1 & \cdots & \rho_\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_\alpha & \rho_\alpha & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \rho_\alpha E_{a,a} + (1-\rho_\alpha)I_a$$

$$\text{cov}(\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta) = \sigma_{\alpha\beta}I_{ka} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$$

である。

- (i) $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_a$ を基底とするベクトル空間 $S(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_a) \equiv S(A)$ を 推定空間という。明らかに $\dim S(A) = a$ である。
- (ii) R^{ka} 空間で $S(A)$ の直交補空間を $S^\perp(A)$ とするこれを誤差空間という。その次元は明らかに $\dim S^\perp(A) = ka - a = (k-1)a$ である
- (iii) $X_{ka,p}$ の適当な変換で, $C_{m,ka}X_{ka,p} \equiv Y_{m,p}$ とすると, $Y_{m,p} \sim N_{m,p}(C_{m,ka}\mu_{ak,p}, I_m \otimes \Delta)$ する (これを標準化という)。 Δ は適当な正値行列。このため

$$|V(\hat{X}_\alpha) - \lambda I_{ka}| = |\sigma_{\alpha\alpha}A(\rho_\alpha) - \lambda I_a|^k = 0 \quad \cdots \cdots (2.1)$$

$|\sigma_{\alpha\alpha}A(\rho_\alpha) - \lambda I_a| = 0$ の根は 2 種類 λ_1, λ_2 を得て

$$\lambda_1 = \sigma_{\alpha\alpha} + (a-1)\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha \cdots \text{単根}, \quad \lambda_2 = \sigma_{\alpha\alpha}(1-\rho_\alpha), \cdots (a-1) \text{ 重根}$$

したがって,

- <1> $V(\hat{X}_\alpha)$ の固有根は $\sigma_{\alpha\alpha}(1-\rho_\alpha)$ で $k(a-1)$ 重根で, 対応する固有空間 $S(\sigma_{\alpha\alpha}(1-\rho_\alpha))$ の次元は $k(a-1)$ 次元である。
- <2> $V(\hat{X}_\alpha)$ の他の固有根は $\sigma_{\alpha\alpha}[1+(a-1)\rho_\alpha]$ で k 重根より対応する固有空間 $S[\sigma_{\alpha\alpha}(1+\overline{a-1}\rho_\alpha)]$ の次元は k 次元である。
- <1>, <2> の空間 $S[\sigma_{\alpha\alpha}(1-\rho_\alpha)]$, $S[\sigma_{\alpha\alpha}(1+\overline{a-1}\rho_\alpha)]$ を直和分解する。

$$S[\sigma_{\alpha\alpha}(1-\rho_\alpha)] = S \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \oplus S[2], \quad \begin{matrix} \dim S(A^-) = a-1 \\ S(A^-) \subset S(A) \\ S[2] \subset S^\perp(A) \\ \dim S[2] = (k-1)(a-1) \\ \dim S[\sigma_{ii}(1-\rho_i)] = k(a-1) \end{matrix}$$

$\hat{a}_1 - \hat{a}_a \quad \hat{a}_2 - \hat{a}_a \quad \hat{a}_{a-1} - \hat{a}_a$

また, λ_2 に対応する固有ベクトルの張る固有空間 $S[\sigma_{\alpha\alpha} + (a-1)\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha]$ は,

$$S[\sigma_{\alpha\alpha} + (a-1)\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha] = S \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \oplus S[1],$$

\parallel
 $\Sigma \hat{a}_i = 1_{ka}$

$\dim S(1) = 1$
 $S(1_{ka}) \subset S(A)$
 $\dim S[1] = k-1$
 $S[1] \subset S^\perp(A)$
 $\dim S[\sigma_{\alpha\alpha} + (a-1)\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha] = k$

$S(\lambda_2)$	$S(\lambda_1)$
$S(A^-)$ 次元 $a-1$	$S(1)$
$S[2]$ 次元 $(k-1)(a-1)$	$S[1]$ 次元 $k-1$

$S(A^-), S(1), S[2], S[1]$
はいずれも直交している

また,

$$S[\sigma_{11}(1-\rho_1)] = \cdots = S[\sigma_{pp}(1-\rho_p)] \equiv S(\lambda_2)$$

$$S[\sigma_{11} + \overline{a-1}\sigma_{11}\rho_1] = \cdots = S[\sigma_{pp} + (a-1)\sigma_{pp}\rho_p] \equiv S(\lambda_1)$$

上記 $(V[\hat{x}_\alpha] - \lambda_i I_{ka})v = 0$ なる v は α に従属しないことから, 上のことがわかる。

(iv) 仮説 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_a = \mu_2 - \mu_a = \cdots = \mu_{a-1} - \mu_a = 0$. (仮説 H とする)

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{a1} \\ \mu_{12} - \mu_{a2} \\ \vdots \\ \mu_{1p} - \mu_{ap} \end{bmatrix} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, a-1)$$

$$\hat{\mu}_{11} - \hat{\mu}_{a1} (\mu_{11} - \mu_{a1} \text{ の B. L. U. E}) = (\hat{a}_1 - \hat{a}_a)' \hat{x}_1$$

$$\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{a2} (\mu_{12} - \mu_{a2} \text{ の B. L. U. E}) = (\hat{a}_1 - \hat{a}_a)' \hat{x}_2 \quad i=1, 2, \dots, a-1$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{\mu}_{1p} - \hat{\mu}_{ap} \end{bmatrix} = (\hat{a}_1 - \hat{a}_a)' \hat{x}_p$$

よって, 仮説 H が真のとき,

$S(A^-)$ は, O -仮説空間となる。すなわち, 仮説が真のときは, $S(A^-) \perp E(\hat{x}_\alpha)$, $\alpha=1, 2, \dots, p$ である。

つぎに, $P_{S[2]} X_{ka,p} = P_{S[2]} [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_p] \equiv [P_{S[2]} \hat{x}_1, \dots, P_{S[2]} \hat{x}_p]$ の分布を調べる。

$S[2]$ の次元は $(k-1)(a-1)$ より, この空間に $e_1[2], e_2[2], \dots, e_{(k-1)(a-1)}[2]$ なる単位直交ベクトルがあり, これを使って $S[2]$ への射影を作る。

$$P_{S[2]} X_{ka,p} = \left[\begin{array}{c} e_1'[2] \hat{x}_1 \cdots \cdots e_1'[2] \hat{x}_p \\ e_2'[2] \hat{x}_1 \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots \\ e_{(k-1)(a-1)}'[2] \hat{x}_1, \cdots e_{(k-1)(a-1)}'[2] \hat{x}_p \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \sim N_p[0, \mathbf{\Delta}] \\ \perp \\ \vdots \\ \sim N_p[0, \mathbf{\Delta}] \end{array} \right\}$$

ここに,

$$\mathbf{\Delta} = \left[\begin{array}{cccc} \sigma_{11}(1-\rho_1), & \sigma_{12}, & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}(1-\rho_2), & \cdots & \sigma_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{p1}, & \cdots & \cdots & \sigma_{pp}(1-\rho_p) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{(注)} \quad & V[e_1'[2] \hat{x}_\alpha] = e_1'[2] V[\hat{x}_\alpha] e_1[2] = \sigma_{\alpha\alpha} - \rho_{\alpha\alpha} \sigma_{\alpha\alpha} \\ & \text{cov}[e_1'[2] \hat{x}_\alpha, e_1'[2] \hat{x}_\beta] = e_1'[2] \text{cov}(\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta) e_1[2] = \sigma_{\alpha\beta} e_1'[2] e_1[2] = \sigma_{\alpha\beta} \\ & \text{cov}[e_1'[2] \hat{x}_\alpha, e_2'[2] \hat{x}_\beta] = e_1'[2] \text{cov}(\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta) e_2[2] \\ & = \begin{cases} (\sigma_{\alpha\alpha} - \rho_{\alpha\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}) \cdot 0 = 0, & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \\ \sigma_{\alpha\beta} \cdot 0 = 0, & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

etc.

ゆえに,

$$P_{S[2]} X_{ka,p} \sim N_{(k-1)(a-1)p} \left(O, I \otimes \mathbf{\Delta} \right) \quad \cdots \cdots (3.1)$$

$$P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p} = (P_{S[2]} X_{ka,p})' P_{S[2]} X_{ka,p} \sim W_p(f=k-1)(a-1, \mathbf{\Delta}) \quad \cdots \cdots (3.2)$$

一方, $S(A^-)$ の次元は $(a-1)$ より, $e_1(A^-), e_2(A^-), \cdots, e_{a-1}(A^-)$ なる単位直交ベクトルがあり,

$$P_{S(A^-)} X_{ka,p} = \left[\begin{array}{c} e_1'(A^-) \hat{x}_1, e_1'(A^-) \hat{x}_2, \cdots, e_1'(A^-) \hat{x}_p \\ \vdots \\ e_{a-1}'(A^-) \hat{x}_1, \cdots, e_{a-1}'(A^-) \hat{x}_p \end{array} \right]$$

仮説が真のときは, $S(A^-) \perp E(\hat{x}_\alpha)$, $\alpha=1, 2, \cdots, p$ より

$$e_i(A^-) \perp E(\hat{x}_\alpha) \quad \cdots \cdots (3.3)$$

このことから,

$$P_{S(A^-)} X_{ka,p} \sim N_{a-1,p} \left(O, I \otimes \mathbf{\Delta} \right) \quad \cdots \cdots (3.4)$$

$$P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p} \sim W_p(f=a-1, \mathbf{\Delta}) \quad \cdots \cdots (3.5)$$

$$S[2] \perp S(A^-) \implies P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p} \perp P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p} \quad \cdots \cdots (3.6)$$

(3.2), (3.5), (3.6) より

H が真のときは, つぎのような Wilks の λ 統計量をうる。

$$\frac{|P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p}|}{|P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p} + P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p}|} = A(p, a-1, k(a-1))$$

(v) $P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p}$, $P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p}$ の計算法。

$S[2]$ 中の直交単位ベクトルの形を直接求めて $P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p}$ を求めるのは厄介であるから, 次のようにして求める。

$$S(\lambda_1) = S(\sigma_{\alpha\alpha} + (a-1)\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha) = S \begin{bmatrix} (c_i) & (c_a) & \cdots & (c_k) \\ 1_a & 0_a & \cdots & 0_a \\ \text{(1)} \cdots \cdots \cdots \\ 0_a & 1_a & \cdots & 0_a \\ \text{(2)} \cdots \cdots \cdots \\ \vdots \\ \text{(k)} 0_a & 0_a & \cdots & 1_a \end{bmatrix} \rightarrow P_{S(\lambda_1)}^{(2)} X_{ak,p} = \sum_{i=1}^k P_{c_i}^{(2)} X_{ak,p}$$

として計算する。

ここに, $c_\alpha' = (0'_a, 0'_a, \dots; 0'_a, 1'_a, \dots, 0'_a)$ である。

$$\therefore P_{S(\lambda_1)}^{(2)} X_{ka,p} = P_{S(1\pm\epsilon)}^{(2)} X_{ka,p} + P_{S[1]}^{(2)} X_{ka,p} \rightarrow P_{S[1]}^{(2)} X_{ka,p}$$

を求める。

$$S(A) = S(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_a) \quad \text{より} \quad P_{S(A)}^{(2)} X_{ka,p} = \sum_{i=1}^a P_{\hat{a}_i}^{(2)} X_{ka,p}$$

として求めて、

$$P_{S(A)}^{(2)} X_{ka,p} = P_{S(1\pm\epsilon)}^{(2)} X_{ka,p} + P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p} \rightarrow P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p}$$

が求まる。

$$\therefore P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p} = X_{ka,p}^{(2)} - P_{S(A)}^{(2)} X_{ka,p} - P_{S[1]}^{(2)} X_{ka,p}$$

として求まる。また

$$P_{S[2]}^{(2)} X_{ka,p} + P_{S(A^-)}^{(2)} X_{ka,p} = X_{ka,p}^{(2)} - P_{S(\lambda_1)}^{(2)} X_{ka,p}$$

である。

§ 3. $X_{a,p} \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^{**})$ と $P_S^{(2)} X_{a,p}$ の研究

$$X_{ak,p} = \begin{bmatrix} X_{a,p}(1) \\ (\hat{x}_1(1), \dots, \hat{x}_p(1)) \\ X_{a,p}(2) \\ \vdots \\ X_{a,p}(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^{**}) \\ \\ \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^{**}) \\ \\ \sim N_{a,p}(\mu_{a,p}, \Sigma^{**}) \end{matrix} \quad X_{a,p}(i) \perp \\ \equiv [\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_p] = \begin{bmatrix} I_a \\ \vdots \\ I_a \end{bmatrix} \mu_{a,p} + E_{ak,p}$$

このとき

$$V_r(X_{ak,p}) = \begin{bmatrix} \Sigma^{**} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma^{**} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \Sigma^{**} \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{**} \equiv \begin{bmatrix} \Sigma & \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta & \Sigma & \Delta & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Delta & \Sigma \end{bmatrix} \\ = V(E_{ak,p})$$

また列ベクトルで見ると

$$V[\hat{X}_\alpha] = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} D(\rho_\alpha) & & O \\ & \sigma_{\alpha\alpha} D(\rho_\alpha) & \\ O & & \sigma_{\alpha\alpha} D(\rho_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \text{cov}(\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta) = \sigma_{\alpha\beta} I_{ka} \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$$

ここに

$$D(\rho_\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_\alpha & 0 \\ \rho_\alpha & 1 & \rho_\alpha \\ 0 & \rho_\alpha & 1 \end{bmatrix}, \text{ two type diagonal matrix}$$

である。

$\alpha=3$ と $\alpha=5$ についての分散分析

(A) $\alpha=3$ の場合。

(1) $X_{3,p}$ は, 1 subject について, 処理 T_1, T_2, T_3 をこの順序で行うが, T_1 の施行時と T_2 の間, T_2 と T_3 の間が長期(3ヶ月とか, 半年)とか。また, 同一の subject に同じ処理を一定間隔をもって3回くり返す場合で, 例えば §1 で述べたように, 日本酒 T_1 (1合), T_2 (2合), T_3 (3合) をこの順に与えて, 飲酒後の酩酊度として体温 x_1 , 脈搏 x_2 , アセトアルデヒド x_3 , 血圧 x_4 等を, 調べて, 各処理の真の酩酊度とか, 酩酊度の関係を知りたいときに起きる問題である。

$$X_{3,p} = \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \mu_3' \end{bmatrix} + E_{3,p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} \cdots \mu_{1p} \\ \mu_{21} \cdots \mu_{2p} \\ \mu_{31} \cdots \mu_{3p} \end{bmatrix} + E_{3,p}$$

$$X_{3k,p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \mu_3' \end{bmatrix} + E_{3k,p}$$

$S(A)$ 次元 3
$S^\perp(A)$ 次元 $3(k-1)$

$$\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3$$

$$=[\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_p]$$

(α) $S(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \equiv S(A)$: 推定空間, $\dim S(A)=3$, $\dim S^\perp(A)=3k-3=3(k-1)$

(β) $X_{3k,p}$ を標準化する。

$$|V[\hat{x}_\alpha] - \lambda I_{3k}| = |\sigma_{\alpha\alpha} D(\rho_\alpha) - \lambda I_3|^k = 0$$

$|\sigma_{\alpha\alpha} D(\rho_\alpha) - \lambda I_3| = 0$ の根は,

$$\sigma_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2} \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha, \quad \sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2} \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha$$

$\lambda = \sigma_{\alpha\alpha}$ のとき, $V(\hat{x}_\alpha)$ の固有根 $\sigma_{\alpha\alpha}$ (k 重根)

$$\sigma_{\alpha\alpha} D(\rho_\alpha) - \sigma_{\alpha\alpha} I_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha & 0 \\ \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha & 0 & \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha \\ 0 & \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha & 0 \end{bmatrix}, \text{ これに対応する固有ベクトル } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = \sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2} \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha$ のとき, $V(\hat{x})$ の固有根 $\sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2} \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha$ (k 重根)

$$\sigma_{\alpha\alpha}D(\rho_\alpha) - (\sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha)I_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & 0 \\ \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha \\ 0 & \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha \end{bmatrix}$$

これに対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = \sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha$ のとき $V(\mathfrak{k}_\alpha)$ の固有根 $\sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha$ (k 重根)

$$\sigma_{\alpha\alpha}D(\rho_\alpha) - (\sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha)I_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & 0 \\ \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & -\sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha \\ 0 & \sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha & -\sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha \end{bmatrix}$$

これに対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

このことから

根 $\sigma_{\alpha\alpha}$ に対応する固有ベクトルの張る固有空間 $S(\sigma_{\alpha\alpha})$ は

$$S(\sigma_{\alpha\alpha}) = S \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 0 & 0_3 \\ & -1 & \\ (1) & \cdots & \\ & 1 & \\ & 0_3 & 0 & 0_3 \\ & -1 & \\ (2) & \cdots & \\ & 0_3 & 0_3 \\ & \cdots & \\ & & 1 \\ & 0_3 & 0_3 & 0 \\ (k) & & -1 \end{array} \right] = S \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \oplus S[1]$$

(b_1)

根 $\sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha$ に対応する固有ベクトルの張る固有空間 $S(\sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha)$

$$S(\sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha) = S \left[\begin{array}{ccc} -1 & & \\ \sqrt{2} & 0_3 & 0_3 \\ -1 & & \\ \cdots & & \\ & -1 & \\ & 0_3 & \sqrt{2} & 0_3 \\ & -1 & \\ \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \\ & & -1 \\ & 0_3 & 0_3 & \sqrt{2} \\ & & -1 \end{array} \right] = S \left[\begin{array}{c} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \cdots \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \cdots \\ -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{array} \right] \oplus S[2]$$

(b_2)

根 $\sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_\alpha$ に対応する固有ベクトルの張る固有空間 $S(\sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_\alpha)$

$$S(\sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{2}\sigma_{\alpha\alpha}\rho_{\alpha}) = S \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \sqrt{2} & 0_3 & 0_3 & \\ 1 & & & \\ \cdots & & & \\ & 1 & & \\ 0_3 & \sqrt{2} & 0_3 & \\ & 1 & & \\ \cdots & & & \\ & & 1 & \\ 0_3 & 0_3 & \sqrt{2} & \\ & & 1 & \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \sqrt{2} & & & \\ 1 & & & \\ \cdots & & & \\ & 1 & & \\ \sqrt{2} & & & \\ 1 & & & \\ \cdots & & & \\ & 1 & & \\ \sqrt{2} & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \oplus S[3]$$

(\mathbf{b}_3)

$$\begin{aligned} S(\sigma_{11}) &= S(\sigma_{22}) = \cdots = S(\sigma_{pp}) \equiv S(\lambda_1), \quad \dim S(\lambda_1) = k \\ S(\sigma_{11} - \sqrt{2}\sigma_{11}\rho_1) &= \cdots = S(\sigma_{pp} - \sqrt{2}\sigma_{pp}\rho_p) \equiv S(\lambda_2), \quad \dim S(\lambda_2) = k \\ S(\sigma_{11} + \sqrt{2}\sigma_{11}\rho_1) &= \cdots = S(\sigma_{pp} + \sqrt{2}\sigma_{pp}\rho_p) \equiv S(\lambda_3), \quad \dim S(\lambda_3) = k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3 \in S(A) \\ \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{a}_1 + \sqrt{2}\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \in S(A) \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_1 + \sqrt{2}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \in S(A) \end{aligned}$$

$S(\lambda_3)$	$S(\lambda_2)$	$S(\lambda_1)$
$S(\mathbf{b}_3)$	$S(\mathbf{b}_2)$	$S(\mathbf{b}_1)$
$S[3]$	$S[2]$	$S[2]$
次元 $k-1$	次元 $k-1$	次元 $k-1$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は互に直交し, $S(A) = S(\mathbf{b}_1) \oplus S(\mathbf{b}_2) \oplus S(\mathbf{b}_3)$

$$(\gamma) \quad H_1: \mu_1 = \mu_3 \leftrightarrow \mu_1 - \mu_3 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \mu_{11} - \mu_{31} = 0 \\ \mu_{12} - \mu_{32} = 0 \\ \cdots \\ \mu_{1p} - \mu_{3p} = 0 \end{cases}$$

$\mu_{1\alpha} - \mu_{3\alpha}$ は estimable でその B. L. U. E

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{1\alpha} - \hat{\mu}_{3\alpha} &= \frac{1}{k} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)' \hat{\mathbf{x}}_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p) \\ &= \frac{1}{k} (\mathbf{b}_1)' \hat{\mathbf{x}}_{\alpha} \end{aligned}$$

H_1 に対応する 0 仮説空間 $S(\mathbf{b}_1)$ 。

同様に, $H_2(\mu_1 - \sqrt{2}\mu_2 + \mu_3 = 0)$ に対応する 0 仮説空間 $S(\mathbf{b}_2)$ で,

$H_3(\mu_1 + \sqrt{2}\mu_2 + \mu_3 = 0)$ に対応する 0 仮説空間 $S(\mathbf{b}_3)$ である。

$$\begin{aligned} (i) \quad P_{S[1]} X_{3k,p} &\sim N_{k-1,p} \left(O, I_{k-1} \otimes \left(\begin{array}{c} \sigma_{11} \cdots \sigma_{1p} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sigma_{p1} \cdots \sigma_{pp} \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ (\Sigma_1) \\ \diagup \end{array} \right) \right) \rightarrow P_{S[1]}^{(2)} X_{3,p} \sim W_p(k-1, \Sigma_1) \\ (ii) \quad P_{S[2]} X_{3k,p} &\sim N_{k-1,p} \left(O, I_{k-1} \otimes \left(\begin{array}{c} \sigma_{11} - \sqrt{2}\sigma_{11}\rho_1 \cdots \sigma_{1p} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sigma_{p1} \cdots \sigma_{pp} - \sqrt{2}\sigma_{pp}\rho_p \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ (\Sigma_2) \\ \diagup \end{array} \right) \right) \\ &\rightarrow P_{S[2]}^{(2)} X_{3,p} \sim W_p(k-1, \Sigma_2) \end{aligned}$$

$$(iii) \quad P_{S[3]} X_{3k,p} \sim N_{k-1,p} \left(O, I_{k-1} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_{11} + \sqrt{2} \sigma_{11} \rho_1 & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} + \sqrt{2} \sigma_{pp} \rho_p \end{pmatrix} \right)$$

$$\rightarrow P_{S[3]}^{(2)} X_{3k,p} \sim W_p(k-1, \Sigma)$$

(i) の証明

$S[1] \in e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ (単位直交行列)

$$P_{S[1]} X_{3k,p} = \begin{bmatrix} e_1' \hat{X}_1 & e_1' \hat{X}_2 & \cdots & e_1' \hat{X}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k-1}' \hat{X}_1 & \cdots & e_{k-1}' \hat{X}_p \end{bmatrix}$$

なぜなら,

$$\left\{ \begin{array}{l} V(e_1' \hat{X}_\alpha) = e_1' V(\hat{X}_\alpha) e_1 = \sigma_{\alpha\alpha} \\ \text{cov}(e_1' \hat{X}_\alpha, e_1' \hat{X}_\beta) = e_1' \text{cov}(\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta) e_1 = \sigma_{\alpha\beta} e_1' I e_1 = \sigma_{\alpha\beta} \\ \text{cov}(e_1' \hat{X}_\alpha, e_2' \hat{X}_\beta) = e_1' (\sigma_{\alpha\beta} I_{3p}) e_2 = \sigma_{\alpha\beta} e_1' e_2 = 0 \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$

H_1 が真のとき $S(b_1) \perp E(\hat{X}_1)$ となることから,

$$P_{S(b_1)} X_{3k,p} \sim N_{1,p}(0', 1, \Sigma)$$

$$P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p} \sim W_p(f=1, \Sigma)$$

ゆえに,

$$\frac{|P_{S[1]}^{(2)} X_{3k,p}|}{|P_{S[1]}^{(2)} X_{3k,p} + P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p}|} \sim \mathcal{A}(p, 1, k)$$

under H_1 true

同様にして, $H_2(\mu_1 + \mu_3 = \sqrt{2}\mu_2)$ が真のとき,

$$P_{S(b_2)} X_{3k,p} \sim N_{1,p}(0', I_1, \Sigma_2) \Rightarrow P_{S(b_2)}^{(2)} X_{3k,p} \sim W_p(f=1, \Sigma_2)$$

$$|P_{S[2]}^{(2)} X_{3k,p}| / |P_{S(b_2)}^{(2)} X_{3k,p} + P_{S[2]} X_{3k,p}| \sim \mathcal{A}(p, 1, k)$$

$H_3(\mu_1 + \mu_3 = -\sqrt{2}\mu_2)$ が真のとき

$$|P_{S[3]}^{(2)} X_{3k,p}| / |P_{S(b_3)}^{(2)} X_{3k,p} + P_{S[3]} X_{3k,p}| \sim \mathcal{A}(p, 1, k)$$

$P_{S[1]}^{(2)} X_{3k,p}, P_{S[2]}^{(2)} X_{3k,p}, P_{S[3]}^{(2)} X_{3k,p}$ の計算法

$$P_{S[1]}^{(2)} X_{3k,p} + P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p} = P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p}$$

$$b_1' = [1, 0, -1 : 1, 0, -1 : 1, 0, -1 : \dots : 1, 0, -1]$$

$e'(b_1) = 1/\sqrt{2k} b_1'$ (b_1 方向の単位ベクトル) $\Rightarrow P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p}$ が求まる。

$P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p}$ は, $P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p} = P_{S(e_1)}^{(2)} X_{3k,p} + \dots + P_{S(e_k)}^{(2)} X_{3k,p}$

として求める。

ここに,

$$c_i' = (0_s' : 0_s' : \dots : 0_s' : 1, 0, -1 : 0_s' \dots 0_s'), \quad i=1, 2, \dots, k$$

$$\therefore P_{S[1]}^{(2)} X_{3k,p} = P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p} - P_{S(b_1)}^{(2)} X_{3k,p}$$

他の $P_{S[2]}X_{3k,p}$, $P_{S[3]}^{(2)}X_{3k,p}$ も同様な要領で求める。

(B) $a=5$ の場合

$$X_{5,p} = \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \vdots \\ \mu_5' \end{bmatrix} + E_{5,p}$$

$$X_{5k,p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline (\hat{a}_1) & \dots & \dots & \dots & (\hat{a}_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \vdots \\ \mu_5' \end{bmatrix} + E_{5k,p} = \begin{bmatrix} I_5 \\ \dots\dots\dots(1) \\ I_5 \\ \dots\dots\dots(2) \\ \dots\dots\dots \\ I_5 \\ \dots\dots\dots(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} \mu \\ (5 \times p) \end{matrix} + E_{5k}$$

(α) $S(\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5) = S(A)$: 推定空間, $\dim S(A) = 5$, $\dim S^\perp(A) = 5k - 5 = 5(k-1)$

ただし, $S^\perp(A)$: 誤差空間

(β) $|V[\hat{x}_\alpha] - \lambda I_{5k}| = |\sigma_{\alpha\alpha} D_{(5)}(\rho_\alpha) - \lambda I_5|^k = 0$

$|\sigma_{\alpha\alpha} D_{(5)}(\rho_\alpha) - \lambda I_5| = 0$ の根は

$$\sigma_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} + \rho_\alpha \sigma_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} - \rho_\alpha \sigma_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} + \sqrt{3} \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha, \quad \sigma_{\alpha\alpha} - \sqrt{3} \sigma_{\alpha\alpha} \rho_\alpha$$

$\sigma_{\alpha\alpha}$ に対応する固有ベクトル $c_1 = (1, 0, -1, 0, 1)$

$\sigma_{\alpha\alpha}(1 + \rho_\alpha)$ " $c_2 = (1, -1, 0, 1, -1)$

$\sigma_{\alpha\alpha}(1 - \rho_\alpha)$ " $c_3 = (1, 1, 0, -1, -1)$

$\sigma_{\alpha\alpha}(1 + \sqrt{3} \rho_\alpha)$ " $c_4 = (1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1)$

$\sigma_{\alpha\alpha}(1 - \sqrt{3} \rho_\alpha)$ " $c_5 = (1, -\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}, 1)$

$$S(\sigma_{\alpha\alpha}) = S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 & 0_5 \cdots 0_5 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0_5 & -1 \cdots 0_5 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ 0_5 & 0_5 \cdots -1 \\ 0 \\ 1 \\ d_1 & d_2 \cdots d_k \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ h_1 \end{bmatrix} \oplus S[1] \equiv S(\lambda_1)$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_3 + \mu_5 = 0$$

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3 + \hat{\mu}_5)' = \frac{1}{k} h_1' X_{5k,p}: h_1' = (c_1', c_1', \dots, c_1') = (a_1 - a_3 + a_5)'$$

$$H_2: \mu_1 - \mu_2 + \mu_4 - \mu_5 = 0$$

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_5)' = \frac{1}{k} h_2' X_{5k,p}: h_2' = (c_2', c_2', \dots, c_2') = (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)'$$

$$H_3: \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 - \mu_5 = 0$$

$$(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_5)' = \frac{1}{k} h_3' X_{5k,p}: h_3' = (c_3', c_3', c_3', \dots, c_3') = (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)'$$

$$H_4: \mu_1 \pm \sqrt{3} \mu_2 + 2\mu_3 \pm \sqrt{3} \mu_4 + \mu_5 = 0$$

$$(\hat{\mu}_1 \pm \sqrt{3} \hat{\mu}_2 + 2\hat{\mu}_3 \pm \sqrt{3} \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_5)' = \frac{1}{k} h_4 X_{5k,p} \quad (+ \text{のとき})$$

$$= \frac{1}{k} h_5 X_{5k,p} \quad (- \text{のとき})$$

$$h_4' = (c_4', c_4', \dots, c_4') = (a_1 + \sqrt{3} a_2 + 2a_3 + \sqrt{3} a_4 + a_5)'$$

$$h_5' = (c_5', c_5', c_5', \dots, c_5') = (a_5 - \sqrt{3} a_2 + 2a_3 - \sqrt{3} a_4 + a_5)'$$

$$S(\sigma_{\alpha\alpha} \overline{1 - \sqrt{3} \rho_\alpha}) \quad S(\sigma_{\alpha\alpha} \overline{1 + \sqrt{3} \rho_\alpha}) \quad S(\sigma_{\alpha\alpha} \overline{1 - \rho_\alpha}) \quad S(\sigma_{\alpha\alpha} \overline{1 + \rho_\alpha}) \quad S(\sigma_{\alpha\alpha})$$

推定空間→	$S[h_5]$	$S(h_4)$	$S(h_3)$	$S(h_2)$	$S(h_1)$	$\dim S[h_i] = 1$
誤差空間→	$S[5]$	$S[4]$	$S[3]$	$S[2]$	$S[1]$	$\dim S[i] = k - 1$

(i) H_1 の検定

$$P_{S[1]} X_{5k,p} \sim N_{k-1,p}(0, I_{k-1}, \mathcal{L})$$

$$P_{S[1]}^{(2)} X_{5k,p} \sim W_p(k-1 | \mathcal{L}) \quad \text{absolutely}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{S(h_1)} X_{5k,p} \sim N_{1,p}(0, 1, \mathcal{L}) \\ P_{S(h_1)}^{(2)} X_{5k,p} \sim W_p(1 | \mathcal{L}) \end{array} \right\} \text{ under } H_1 \text{ is true}$$

$$\therefore \frac{|P_{S(1)}^{(2)} X_{5k,p}|}{|P_{S(1)}^{(2)} X_{5k,p} + P_{S(h_1)}^{(2)} X_{5k,p}|} \sim A(p, 1, k) \quad \text{under } H_1 \text{ is true}$$

ここに

$$P_{S(1)}^{(2)} X_{5k,p} + P_{S(h_1)}^{(1)} X_{5k,p} = P_{S(\lambda_1)}^{(2)} X_{5k,p} = \sum_{i=1}^k P_{d_i}^{(2)} X_{5k,p},$$

$$P_{S(1)}^{(2)} X_{5k,p} = \sum_{i=1}^k P_{d_i}^{(2)} X_{5k,p} - P_{S(h_1)}^{(2)} X_{5k,p}$$

として、求める、他の H_2, H_3, H_4, H_5 の検定法も同様にして行う。

§4. 結 び

本論文に対して別に行列 $X_{a,p}$ が行列正規分布 $N_{a,p}(\mu_{a,p}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$ であり、特に、 $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & & \vdots \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ の場合の分散分析とか、 $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} a & b & O \\ b & a & b \\ O & b & a \end{pmatrix}$ の分散分析が考えられるが、この問題解決が残されている。本文が実際問題に適用出来るかどうかの検討で、本学名誉教授佐藤良一郎氏に有益なアドバイスを受けたし、本計算検討は本学小野英男教授に御願して、著者の勘違いに対して指てきを受けた。両氏に厚く御礼を申し上げます。また本研究のための費用は、86年明星大学々長特別研究助成によるものである。

引用図書

- (1) S.F. Arnold (1981) "The Theory of Linear Models and Multivariate Analysis", John Wiley & Sons.
- (2) A.M. Kshirsagar (1972) "Multivariate Analysis" Marcel Dekker, Inc.
- (3) T.W. Anderson (1984) "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis" John Wiley & Son.
- (4) 宇喜多義昌 (1975), 実験計画法, 森北出版.
- (5) 宇喜多義昌 (1983), 多変量統計解析, その3: 標本分布論, 翔人社.

引用論文

- (1) Y. Ukita (1976), Hypothesis Spaces and Decomposition of Sum of Squares in Linear Models (Ogawa Volume).
- (2) 宇喜多義昌 (1980), $\langle P_a \mathbf{x} \rangle$, $\|P_S \mathbf{x}^2\|$ の分布と応用について (東京理科大学・理理学専攻科雑誌, No.1, Vol.1).
- (3) 宇喜多義昌, 外2名 (1981), $\|P_{S_1} \mathbf{x}\|^2 / \|P_{S_2} \mathbf{x}\|^2$ の分布に関する定理 (東京理科大学, 理学専攻科雑誌, No.1, Vol.2).
- (4) Y. Ukita (1982), On a Geometrical Meaning of $A_{22,1}$ and its Distribution (Tensor, N.S. Vol.39).
- (5) 宇喜多義昌 (1982, Basic 数学, No.10~No.12, 1983), [統計的実験の計画と, 実験データの解析 (I, II, III, IV)].
- (6) 日本数学会研究発表アブストラクト (統計数学), 1985年, 秋季大会 (富山大学), 1986年春季大会 (京都大学).