

擦弦の振動に対する Helmholtz の公式について

On Formula of Helmholtz for Vibration of a Bowed String

前澤成一郎*・落合秀則**

1. はしがき

バイオリンの弦のような擦弦楽器の弦の振動については有名な H. v. Helmholtz の公式¹⁾がある。この公式は 120 年以上の昔に遡る理論的な裏付けを持った一つの実験式と考えるべきものと思われるが、その後 O. Krigar-Menzel と A. Raps²⁾ および C. V. Raman³⁾ の詳細な実験によって確認せられ、現在ではこの公式は十分な精度でこれ等の楽器の通常の演奏の際に最も普通に起る定常振動のモードを与えることが知られている。

しかし曲げこわさや振りコンプライアンス等を伴う現実の弦において、空気抵抗や、内部摩擦および駒 (bridge) から胴 (body) への音響エネルギーの伝達等に由来する正の減衰と弓と弦の間の固体摩擦特性に基づく負の減衰とのバランスという本来の自励持続振動の見地からするこの公式の理論的な裏付けは知られていないように思われる。

我々は以下において、正の減衰として空気抵抗だけを取上げ、固体摩擦の出来る限り一般的な特性の下で、以上のような本来の自励持続振動の観点から Helmholtz の公式を導くことを試みる。

2. 主な記号

使用する主な記号を挙げる。特に Fig. 2 および Fig. 3 を参照されたい。

l : 弦の長さ	$\phi = \theta - \pi$: 無次元時間
μ : 弦の線質量密度	θ_0 : 接着区間の長さ
T : 弦の張力	$\phi_0 = 2\pi - \theta_0$: 滑走区間の長さ
$a = \sqrt{T/\mu}$: 横波の伝播速度	$\beta = \phi_0/(2\pi)$: 滑走区間比
$\nu = \pi a/l$: 基本自然円振動数	x および \bar{x} : 左端および右端から観察点までの距離
$2c$: 空気抵抗の減衰係数	ξ および $\bar{\xi}$: 左端および右端から擦弦点までの距離
$\gamma = c/\nu$: 空気抵抗の減衰比	$\eta(x, t)$ および $\bar{\eta}(\bar{x}, t)$: 弦の左半分および右半分の振動変位
ω : 自励持続定常振動の円振動数	η_{ξ} および $\bar{\eta}_{\xi}$: 擦弦点の振動変位および速度
$\Omega = \omega/\nu$: 振動数比	
F_s : 最大静止摩擦力	
v_0 : 弓の速度(一定)	
$\theta = \omega t$: 無次元時間	

* 理工学部機械工学科教授 機械力学

** 理工学部機械工学科助手

3. Helmholtz の研究

Helmholtz は振動顕微鏡 (vibration microscope) と名付けた一種の機械的オシロスコープによって、弓で弾かれた弦 (以下擦弦という) の上の一点 (黒いインクを塗った弦の上に蠟で接着した澱粉粒) の描くリサージュ図形を観察することによって、その振動波形が Fig. 1(a) に示すような一周期が二つの直線から成り立つ二段の鋸状波形 (two-step zigzag) であり、その二つの直線の占める時間比は観察点と両固定端との間の距離の比、すなわち $x : (l-x)$ (あるいは $(l-\bar{x}) : \bar{x}$) の比に等しいこと、また弓の真下の点 (弓の幅が無限小であれば数学的な点となり、以下擦弦点 (bowed point) と呼ぶ、 $x=\xi$ または $\bar{x}=\bar{\xi}$) (Fig. 2) ではジグザグの二直線の内傾斜の緩やかな、すなわち速度の遅い方の区間では擦弦点は弓に付着して引摺られて行く、すなわち弓の一定の前進速度 v_0 に等しい等速度で進み、傾斜の急な方の直線部分では擦弦点は弓から離脱して滑り乍らやはり定速度で速やかに戻ることを見出した。

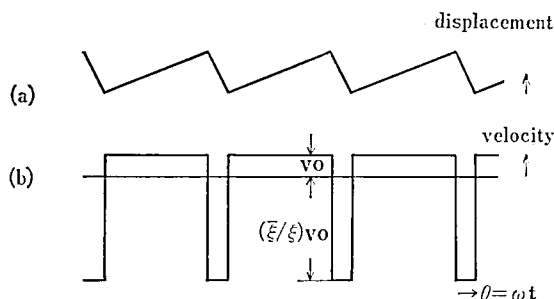


Fig. 1 Two-step Zigzag Vibration of Bowed String (Helmholtz)

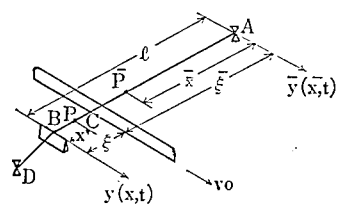


Fig. 2 Bowed String and Bow

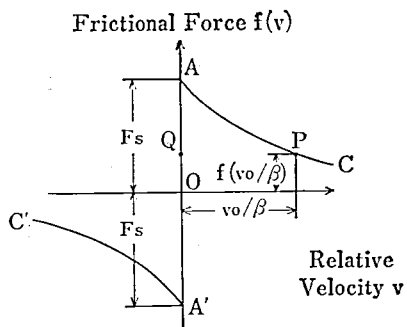


Fig. 3 Frictional Force Characteristic

更に弦の自由振動のモードの中から以上の振動モードに対応するものを選び出して、その振動変位のフーリエ級数表現を

$$y(x, t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a}{l} t \quad (2.1)$$

とした*。ここに弦の張力を T 、線質量密度を μ として、 $a = \sqrt{T/\mu}$ は減衰のない弦の横波の伝播速度である。また A は定数で

$$A = \frac{2l^2 v_0}{\pi^2 a \xi} \quad (2.2)$$

である。何となれば擦弦点の速度は前進区間（以後接着区間 stick interval と呼ぶ）では v_0 で後進区間（以下滑走区間 slip interval と呼ぶ）では $-(\xi/\xi)v_0 = -(1-\beta)v_0/\beta$ である。ここに β は滑走区間比すなわち

$$\beta = \psi_0/2\pi = \xi/l \quad (2.3)$$

で、したがって

$$\dot{y}_\xi = \dot{y}(\xi, t) = A \frac{\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} t \quad (2.4)$$

がこの速度波形 (Fig. 1(b)) を与えるためには、 $A\pi a/l = (2/\pi)(l/\xi)v_0$ でなくてはならないからである。

また彼はこの振動モードにおける弦の取る瞬間、瞬間の形状 (configuration) の簡単な図式解法を次のように提案した。弦の全長を基底として頂点の高さが $l^2 v_0/(4a\xi)$ であるような放物線を上下逆に重ね合せて描く (Fig. 4)。この2個の放物線から成立っているレンズ状の閉曲線上を点 P が時計の針の反対方向に、その基底上への正射影 Q が一定速度 a で往復するように走るとき、折線 APB あるいは $AP'B$ がそれぞれの瞬間における弦の形状 (configuration) を与えるのである。

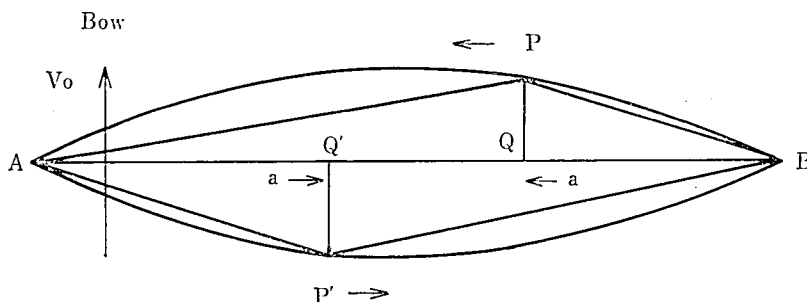


Fig. 4 Successive Configurations of a Bowed String

以上は擦弦点が弦長を無理数の比に内分する場合であって、この比が有理数の比である場合には (2.1) 式の高調波の中から擦弦点に節点 (node) を持つすべての高調波を取除かなくてはならない。すなわち p と q を互いに素である正整数として $\xi = (p/q)l$ ($p < 2q$) であれば (2.1) 式の代りに

$$y(x, t) = A \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq kq}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a}{l} t \quad (2.5)$$

($k=1, 2, 3, \dots$)

* Helmholtz の原論文には $(-1)^{n-1}$ という係数は付いていないが、これは座標軸の向きと原点の選び方によるものであって本質的な違いではない。



Fig. 5 Little Crumples on Vibration Figure of a Violin (Helmholtz)

としなくてはならない。このような高調波の除去によって節点以外の点の振動波形は単純な two-step zigzag から外れて Fig. 5 (文献 (2) から転写) に示すような小じわ (little crumples) が出現して来ることを示唆している。擦弦点をその一つとするところの節点では勿論このような小じわは出現せず、その変位は (2.1) 式の表現のままでよいのである。

4. Helmholtz の理論の考察

前記のようにその後の詳細な実験的研究によって、Helmholtz の結果は他のタイプの定常振動のモードと共にほぼ完全に確かめられた。然し理論的には (2.1) 式は自由振動の 1 つのモードであるから、減衰のない一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} \quad (3.1)$$

の解に過ぎない。1930 年代の半ばに A. Witt は方程式 (3.1) から出発して、Fig. 3 のような一般的な摩擦特性の下で、擦弦の振動が静止の状態から徐々に成長 (build up) して、最終的に収束して行く極限の定常振動が Helmholtz のモードであることを証明した⁵⁾。すなわち定常振動は Fig. 3 の摩擦特性曲線において滑走区間での動摩擦曲線上の一点 $P(v_0/\beta, f(v_0/\beta))$ と接着区間における静摩擦特性曲線すなわち直線 AOA' 上の同じ高さの一点 $Q(0, f(v_0/\beta))$ で表現されることを示した。

このように自励振動が成長して行く過渡振動の段階においては減衰のない一次元の波動方程式から出発する解析は、更に 1950 年代に入って F. G. Friedlander⁶⁾ と J. B. Keller⁷⁾ のほとんど同時のほとんど同趣旨のすぐれた研究を含めて、ほぼ完全に実験的事実を説明して来たけれども、定常振動について減衰がないということは音響エネルギーの輻射もないということであって楽器としての役目を果していないことになる。また当然、前記のように、弦は多少なりとも曲げこわさを伴い、空気抵抗や、内部摩擦等が存在するので、これ等を考慮に入れなければ、本来の自励持続振動としての擦弦の振動の本質は解明されない。

ただ有名な van der Pol の自励振動系

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (3.2)$$

のリミットサイクルが減衰項の係数 ε の小さい時には振幅が 2 の単弦振動、すなわち調和振動子 $\ddot{x} + x = 0$ の自由振動の一つのモードに極めて近いように、擦弦の振動の場合にも、van der Pol 系のリミットサイクルに相当するものが定常振動であり、減衰が非常に小さい場合にはこれが自由振動の特別な 1 つのモードである Helmholtz のモードに一致することは、アナロジーとして十分頷けるわけである。しかしこの特別な 1 つのモードが無数の自由振動のモードの中のどれに帰着するかは、van der pol 方程式の場合と同様に正負の減衰のバランスを考えに入れて解析を行わなければ解明されない。

以下正の減衰としては空気抵抗だけを取上げて、本来の自励振動としての解析から、定常自励持続振動として空気抵抗が小さいときには1次の微小量の範囲で Helmholtz のモードが得られることを証明する。

最後に弓で弾かれるバイオリンの弦の定常振動について、音響学の多くの教科書に見られる誤った説明について言及して置きたい。このような説明は可成りの範囲に一般に流布しているように思われるからである。それは次のようなものである。

すなわち接着区間において擦弦点は弓に引摺られて行く。その際、擦弦点の両側の弦は或る角度をなし、両方の弦の張力の合力は弓の静摩擦力に抗して、擦弦点を引戻そうとする。しかし変位が小さい内はこの角度も小さく、合力も最大静摩擦力より小さいので、引続いて擦弦点は弓に引摺られて行くが、変位が段々大きくなると何所かでこの合力は最大摩擦力に達するので弦は弓から離脱する。離脱すれば滑りが起り、摩擦力は動摩擦力となる。動摩擦力は最大静摩擦力より小さいので、引戻そうとする両弦の張力の合力の方が前向き動摩擦力より大きく、擦弦点従って弦は戻り始める。ある程度戻れば、両方の力は等しくなるが、弦の慣性のため、弦は戻り運動を続けるが、段々摩擦力が合力に優越するようになるので、弦は再び前進し、いつか弓に捕捉されて、また以上の動作を繰返すというのである。

このような説明は全く間違っていると言わざるを得ない。現実にかかる定常振動は Helmholtz のモードに非常に近く、Helmholtz のモードは自由振動であるために、何等動振的な外力を必要としないのである。実際 Fig. 4 の瞬間瞬間の configuration を見れば明らかのように、接着、滑走両区間の切替の2瞬間を除いて擦弦点の両側の弦は全く一直線を形作り角度はゼロである。ただ Helmholtz モードの振動は擦弦点に働く一定の動摩擦力 $f(v_0/\beta)$ による静たわみ変位曲線（次章の $y_s(x)$ および $\bar{y}_s(\bar{x})$ 曲線）を中心として行われるのであるから、現実には擦弦点の両側の弦は常に一定の角度をなしており、これに対して滑走区間中の動摩擦力とこれに等しい接着区間中の静摩擦力が対応しているのである。

5. 級数変換法による Fourier 級数解法⁵⁾

弦の運動方程式を擦弦点の左の部分と右の部分に分けて考えて (Fig. 2),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} \quad (4.1)$$

とする。ここに $2c$ は空気抵抗の係数である。実際の演奏に際して起る現実の定常振動の円振動数を ω とする。これは必ずしも弦の自由振動の基本円振動数 $\nu \equiv \pi a/l$ とは一致しなくてもよい。すなわち振動数比 $\Omega \equiv \omega/\nu$ は 1.0 とは限らない。無次元時間 θ および $\phi = \theta - \pi$ の原点をそれぞれ接着区間および滑走区間の中央に採り、両区間の長さをそれぞれ θ_0 および ϕ_0 とする。すなわち振動の周期は 2π で

$$\theta_0 + \phi_0 = 2\pi \quad (4.2)$$

である。擦弦点に加えられる弓の摩擦力を弓力 (bow force) と名付けて $B(\theta)$ と書くと、これは、戻り平均相対速度 v_0/β に相当する動摩擦力 $f(v_0/\beta)$ に等しい一定の力と空気抵抗に打勝って振動を持続させるのに必要な附加的弓力 (additional bow force) $G(\theta)$ に分割される、

$$B(\theta) = f(v_0/\beta) + G(\theta) \quad (4.3)$$

ここに $\beta = \phi_0/2\pi$ は滑走区間比である。これに従って弦の変位も二つに分れて

$$\left. \begin{aligned} y(x, t) &= y_s(x) + \eta(x, t) \\ \bar{y}(\bar{x}, t) &= \bar{y}_s(\bar{x}) + \bar{\eta}(\bar{x}, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ここに静たわみ変位 $y_s(x)$ および $\bar{y}_s(\bar{x})$ は

$$y_s(x) = (\xi x / l) f(v_0 / \beta) / T, \quad \bar{y}_s(\bar{x}) = (\xi \bar{x} / l) f(v_0 / \beta) / T \quad (4.5)$$

また振動変位 $\eta(x, t)$, $\bar{\eta}(\bar{x}, t)$ に対する微分方程式は (4.1) と同形である。また両端における境界条件は

$$\eta(0, t) = 0, \quad \bar{\eta}(0, t) = 0 \quad (4.6)$$

以下速度、変位および力の表現を $v_0, v_0/\nu$ および $(Tl/\xi\xi)v_0/\nu$ を単位として無次元化する。附加的弓力 $G(\theta)$ の Fourier 展開を

$$G(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = \mathcal{R} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - j b_n) e^{j n \omega t}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (4.7)$$

とする。 \mathcal{R} は後続の複素量の実数部分を示す。擦弦点および弦上の任意の点の振動変位は (4.7) の入力各成分に対する周波数応答の和として

$$\left. \begin{aligned} \eta_\xi &= \mathcal{R} \sum_{n=0}^{\infty} M_n (a_n - j b_n) e^{j(n\omega t - \phi_n)} \\ \eta(x, t) &= \mathcal{R} \sum_{n=0}^{\infty} N_n(x) (a_n - j b_n) e^{j(n\omega t - \chi_n(x))} \\ \bar{\eta}(\bar{x}, t) &= \mathcal{R} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{N}_n(\bar{x}) (a_n - j b_n) e^{j(n\omega t - \bar{\chi}_n(\bar{x}))} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

と書き下せる。ここに周波数特性 $M_n e^{-j\phi_n}$, $N_n(x) e^{-j\chi_n(x)}$ および $\bar{N}_n(\bar{x}) e^{-j\bar{\chi}_n(\bar{x})}$ は先づ

$$M_n e^{-j\phi_n} = \left(\frac{l^2}{\xi \xi} \right) \frac{\sin \left(\frac{\bar{\omega}_n - j \bar{c}_n}{a} \xi \right) \sin \left(\frac{\bar{\omega}_n - j \bar{c}_n}{a} \xi \right)}{\frac{\bar{\omega}_n - j \bar{c}_n}{a} l \sin \left(\frac{\bar{\omega}_n - j \bar{c}_n}{a} l \right)} \quad (4.9)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\omega}_n l}{a} \\ \frac{\bar{c}_n l}{a} \end{aligned} \right\} = \frac{n \pi \Omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4 l^2}{n^2 \Omega^2} \pm 1} \quad (4.10)$$

また $N_n(x) e^{-j\chi_n(x)}$ および $\bar{N}_n(\bar{x}) e^{-j\bar{\chi}_n(\bar{x})}$ はそれぞれ (4.9) の $M_n e^{-j\phi_n}$ の表現において $(l^2/(\xi\xi))$ の中以外で $\xi \rightarrow x$ および $\xi \rightarrow \bar{x}$ の置換を行う。

それぞれ接着区間および滑走区間においてのみ成立つ次のようなフーリエ級数 $K(\theta)$ および $H(\phi)$ を用いて以下の級数変換を行う。

$$G(\theta) = K(\theta) + H(\phi), \quad \phi = \theta - \pi \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} K(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_{2m} \cos(\mu_{2m}\theta) + \beta_{2m+1} \sin(\mu_{2m+1}\theta)), \quad \text{for } -\frac{1}{2}\theta_0 < \theta < \frac{1}{2}\theta_0 \\ K(\theta) &= 0, \quad \text{for } \frac{1}{2}\theta_0 < \theta < 2\pi - \frac{1}{2}\theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} H(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{\alpha}_{2m} \cos(\bar{\mu}_{2m}\phi) + \bar{\beta}_{2m+1} \sin(\bar{\mu}_{2m+1}\phi)), \quad \text{for } -\frac{1}{2}\phi_0 < \phi < \frac{1}{2}\phi_0 \\ H(\phi) &= 0, \quad \text{for } \frac{1}{2}\phi_0 < \phi < 2\pi - \frac{1}{2}\phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

ここに

$$\mu_{2m} = 2m\pi/\theta_0, \quad \mu_{2m+1} = (2m+1)\pi/\theta_0, \quad \bar{\mu}_{2m} = 2m\pi/\phi_0 \quad \text{および} \quad \bar{\mu}_{2m+1} = (2m+1)\pi/\phi_0 \quad (4.14)$$

新しい係数から古い係数への変換式は

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= (\theta_0/2\pi)\alpha_0 + (\phi_0/2\pi)\bar{\alpha}_0 \\ a_n &= (2n/\pi) \sin(n\theta_0/2) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \alpha_{2m} / (\mu_{2m}^2 - n^2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \bar{\alpha}_{2m} / (\bar{\mu}_{2m}^2 - n^2) \right\} \\ b_n &= (2n/\pi) \cos(n\theta_0/2) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta_{2m+1} / (\mu_{2m+1}^2 - n^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{\beta}_{2m+1} / (\bar{\mu}_{2m+1}^2 - n^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

新しい係数 α_{2m} , β_{2m+1} , $\bar{\alpha}_{2m}$ および $\bar{\beta}_{2m+1}$ を求める方程式として先づ擦弦点における境界条件の中で、接着区間における擦弦点の速度が v_0 に等しい条件は

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (C_{km}\alpha_{2m} + D_{km}\beta_{2m+1} + \bar{H}_{km}\bar{\alpha}_{2m} + \bar{I}_{km}\bar{\beta}_{2m+1}) &= 2\delta_{k0} \\ \sum_{m=0}^{\infty} (E_{km}\alpha_{2m} + F_{km}\beta_{2m+1} + \bar{J}_{km}\bar{\alpha}_{2m} + \bar{K}_{km}\bar{\beta}_{2m+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

ここに δ_{km} はクロネツカーのデルタ記号で

$$k=m \text{ のとき } \delta_{km}=1 \quad \text{および} \quad k \neq m \text{ のとき } \delta_{km}=0 \quad (4.17)$$

また

$$\left. \begin{aligned} C_{km} &= \frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k}^2 - n^2)(\mu_{2m}^2 - n^2)} M_n \sin \phi_n \\ D_{km} &= -E_{mk} = \frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin n\theta_0}{(\mu_{2k}^2 - n^2)(\mu_{2m+1}^2 - n^2)} M_n \cos \phi_n \\ F_{km} &= \frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(1+\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k+1}^2 - n^2)(\mu_{2m+1}^2 - n^2)} M_n \sin \phi_n \end{aligned} \right\} \quad (k, m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{km} &= -\frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(1-\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k}^2 - n^2)(\bar{\mu}_{2m}^2 - n^2)} M_n \sin \phi_n \\ \bar{I}_{km} &= \frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin n\theta_0}{(\mu_{2k}^2 - n^2)(\bar{\mu}_{2m+1}^2 - n^2)} M_n \cos \phi_n \\ \bar{J}_{km} &= \frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sin n\theta_0}{(\mu_{2k+1}^2 - n^2)(\bar{\mu}_{2m}^2 - n^2)} M_n \cos \phi_n \\ \bar{K}_{km} &= \frac{4}{\pi\theta_0} \Omega(-1)^{k+m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(1+\cos n\theta_0)}{(\mu_{2k+1}^2 - n^2)(\bar{\mu}_{2m+1}^2 - n^2)} M_n \sin \phi_n \end{aligned} \right\} \quad (k, m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{2k} &= \frac{2k\pi}{\theta_0}, & \mu_{2k+1} &= \frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \\ \bar{\mu}_{2k} &= \frac{2k\pi}{\phi_0}, & \bar{\mu}_{2k+1} &= \frac{(2k+1)\pi}{\phi_0} \end{aligned} \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (4.20)$$

次に滑走区間では Fig. 3 の動摩擦特性に従って弓力を受けるので、擦弦点の境界条件は

$$\begin{aligned} H(\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{\alpha}_{2m} \cos \bar{\mu}_{2m}\phi + \bar{\beta}_{2m+1} \sin \bar{\mu}_{2m+1}\phi) \\ &= A'((1-\beta)/\beta + \dot{\eta}_\xi) + A''((1-\beta)/\beta + \dot{\eta}_\xi)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

ここに A', A'', \dots は動摩擦特性曲線に対する Taylor 展開の係数から、次によって求められる。

$$A' = -(df/dv)_{v=v_0/\beta} (\xi \dot{\xi}/l^2) \pi a/T, \quad A'' = (d^2f/dv^2)_{v=v_0/\beta} (\xi \dot{\xi}/l^2) (\pi a/T) v_0, \dots \quad (4.22)$$

また

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{k0}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{C}_{km} \bar{\alpha}_{2m} + \bar{D}_{km} \bar{\beta}_{2m+1} + H_{km} \alpha_{2m} + I_{km} \beta_{2m+1}) \right\} \times \cos \bar{\mu}_{2k}\phi \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{E}_{km} \bar{\alpha}_{2m} + \bar{F}_{km} \bar{\beta}_{2m+1} + J_{km} \alpha_{2m} + K_{km} \beta_{2m+1}) \right\} \times \sin \bar{\mu}_{2k+1}\phi \end{aligned} \quad (4.23)$$

さて (4.16) 式で $\bar{\alpha}_{2m} = \bar{\beta}_{2m+1} = 0$ ($m=0, 1, 2, \dots$) と仮定して見よう。この時残りの (4.16) 式から得られた $\alpha_{2m}, \beta_{2m+1}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) が $\bar{\alpha}_{2m} = \bar{\beta}_{2m+1} = 0$ と共に (4.23) 式から求められる戻り速度が一定すなわち $\dot{\eta}_\xi = -(1-\beta)/\beta$ を与えるものであれば、滑走区間の境界条件 (4.21) が満足されることになる。すなわちこの組 $\alpha_{2m}, \beta_{2m+1}, \bar{\alpha}_{2m} = \bar{\beta}_{2m+1} = 0$ は Fig. 3 のような一般的な摩擦特性の下でも正しい解を与えることになり、この組から計算される古い Fourier 係数 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$) は (4.7) 式によって正しい弓力 $G(\theta)$ を、また (4.8) 式によって正しい振動変位を与えることになる。

Fig. 3 のような一般的な特性の場合にも、与えられた弦 (l, a, γ) と与えられた演奏条件 (ξ, v_0) では C_{km} 等, \bar{H}_{km} 等, \bar{C}_{km} 等および H_{km} 等の諸係数は 2 つのパラメータ, すなわち振動数比 Ω と接着区間比 $\theta_0/2\pi$ だけの関数となる。この事態に対応して、2 個の条件すなわち弦の弓への捕捉条件と弦の弓からの離脱条件が存在する。我々の仮定した摩擦特性 Fig. 3 に従えば

$$G(-\theta_0/2) = G(\theta_0/2) = -f(v_0/\beta) + F_s \quad (4.24)$$

である。

更に解の適合条件として、接着区間中に必要とされる弓力 $B(\theta)$ が、正負の最大静摩擦力を越えない条件

$$-F_s - f(v_0/\beta) < G(\theta) < F_s - f(v_0/\beta), \quad -\theta_0/2 < \theta < \theta_0/2 \quad (4.25)$$

が成り立たねばならない。

6. 空気抵抗の小さい時の解

さて空気抵抗の減衰比 $\gamma = c/\nu$ が 1 次の微小量るとき、Helmholtz の公式に対応する点 $\Omega = 1.0$ および $\theta_0/2\pi = \xi/l$ に対しては、2 次以上の微小量を 1 に対して省略するとき、前記のように $\bar{\alpha}_{2m} = \bar{\beta}_{2m+1} = 0$ と置いた残りの (4.16) 式は

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{km} \alpha_{2m} = 2\delta_{k0} \quad (5.1)$$

まで退縮する上に、戻り速度一定の解を与える。例えば

$$(1) \quad \xi/l = 1/2, \quad \Omega = 1.0, \quad \theta_0 = 180^\circ$$

$$(2) \quad \xi/l = 1/9, \quad \Omega = 1.0, \quad \theta_0 = 320^\circ$$

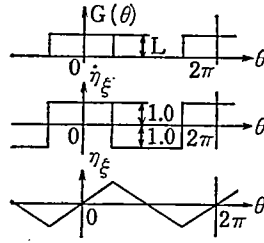


Fig. 6 $\gamma \rightarrow 0$, $\xi/l = 1/2$, $\Omega = 1.0$ and $\theta_0 = 180^\circ$

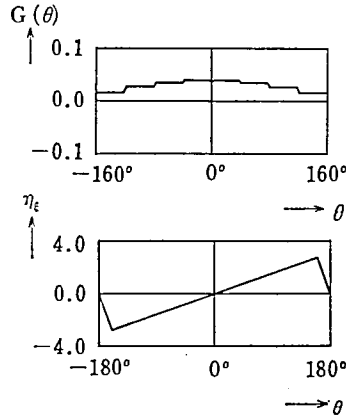


Fig. 7 $\gamma = 0.001$, $\xi/l = 1/9$, $\Omega = 1.0$ and $\theta_0 = 320^\circ$

の2つの場合に対する計算結果を Fig. 6 と Fig. 7 に示す。見られる通り変位については, Helmholtz の, 弓力については Raman の結果を完全に再現している。

更に擦弦点が弦長を有理数比に内分する場合に, 擦弦点を節点 (node) に持つ高調波の除去も (5.1) の方程式の解を求める段階において全く自動的に行われる。このことは (4.10) 式において, γ^2 を1に対して省略すれば

$$\frac{\bar{\omega}_n l}{a} = n\pi, \quad \frac{\bar{c}_n l}{a} = \pi\gamma \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5.2)$$

従って

$$\left. \begin{aligned} N_n(x) e^{-j\bar{x}_n(x)} &= \frac{l^2}{\xi \bar{\xi}} \frac{\sin(n\pi - j\pi\gamma) \frac{x}{l} \sin(n\pi - j\pi\gamma) \frac{\bar{\xi}}{l}}{(n\pi - j\pi\gamma) (-1)^{n-1} j\pi\gamma} \\ \bar{N}_n(\bar{x}) e^{-j\bar{x}_n(\bar{x})} &= \frac{l^2}{\xi \bar{\xi}} \frac{\sin(n\pi - j\pi\gamma) \frac{\bar{x}}{l} \sin(n\pi - j\pi\gamma) \frac{\xi}{l}}{(n\pi - j\pi\gamma) (-1)^{n-1} j\pi\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

となり, p, q が既約の整数で $p/q < 1/2$, $\xi/l = p/q$ のとき擦弦点を節点とする調波 $n=kq$ ($k=1, 2, 3, \dots$) に対してこれ等の周波数特性関数は他の調波に比して1次の微小量となることから来るのである。

実例の計算結果を Fig. 8 に示す。

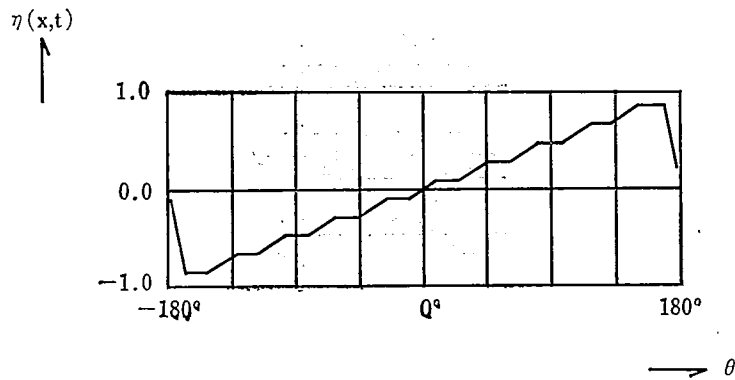


Fig. 8 Crumples on Vibration Figure observed
at $x/l=0.06$ for $\gamma=0.001$, $\xi/l=1/10$,
 $\Omega=1.0$, $\theta_0=324^\circ$ (by our theory)

7. あとがき

擦弦の振動について 100 年以前から有名な Helmholtz の公式を空気抵抗のみが減衰として働く場合の本来の自励持続振動として裏付けることを試みた。空気抵抗が小さくて 1 次の微小量と考えられるとき、2 次の微小量を省略すれば、自励持続振動解として正確に Helmholtz の公式が得られることが明らかにされた。

更に弦長を簡単な整数比に内分する点を弓で弾いた場合に振動変位曲線の上に小じわの現れる現象もコンピューターによる数値計算に際して自動的に得られることが示された。

参考文献

- 1) Helmholtz, H. v., Phil. Soc. Glasgow, Proc. 5, 17, (1860). また Phil. Mag., 21, 393, (1861) に再録.
- 2) Helmholtz, H. v., Sensations of Tone, (1954), 80 および 384, Dover.
- 3) Krigar-Menzel, O. and Raps, A., Ann. Phys. Chem., 44 (1891), 623.
- 4) Raman, C. V., Ind. Assoc. Sci. Bull., 15 (1918), 1.
- 5) Witt, A., Tech. Phys. USSR, 4-4 (1937), 262.
- 6) Friedlander, F. G., Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953), Part 3, 516.
- 7) Keller, J. B. Comm. Pure & Appl. Math. 6 (1953), 485.
- 8) 前澤・落合, 明星大学研究紀要 (理工学部), 19 (昭 58), 75.