

Sur un espace fibré dont le groupe structural est un espace connexe topologique assujetti à certain condition

par Jôyô Kanitani

Résumé

Etant donné une variété différentiable topologique connexe W , on décrit quelle propriété on lui donne pour qu'elle soit un groupe structural d'un espace fibré dont une variété différentiable Z admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie est une base. Pour cela on résume quelques résultats obtenus jusqu'ici avec des révisions. On introduit la composante connexe principale C_i et on démontre que si la variété W admet les homéomorphismes locaux à C_i il existe un espace fibré dont W est le groupe structural et dont Z est une base.

1. Axiomes fondamentaux

Soient \mathcal{S} un ensemble non vide et (ℓ) une famille des parties de \mathcal{S} satisfaisant aux axiomes suivants.

Axiome 1. Pour deux éléments distinctes quelconques de \mathcal{S} , il existe une partie et une seule qui les contient et qui appartient à (ℓ) .

On appelle un élément de \mathcal{S} un point et une partie appartient à (ℓ) une droite. On écrit $l = P \vee Q$ pour exprimer qu'une droite l est uniquement déterminé, comme conséquence de cet axiome, au moyen des deux points distinctes P et Q qu'elle joient.

Axiome 2. Une droite contient au moins trois points distincts.

Axiome 3. Soient A, B, C trois points distincts, et D, E deux points distincts tels que $D \in (A \vee B)$, $E \in (A \vee C)$. Il existe alors un point commun aux deux droites $B \vee C$ et $D \vee E$.

On désigne par L^0 une partie de \mathcal{S} dont l'élément est un point unique. L'ensemble \mathcal{S} étant non vide d'après définition, il existe au moins un L^0 . L'ensemble L^1 des points P tels que $P \in A \vee B$ ($A \in L^0$, $B \in L^0$) n'est autre chose qu'une droite.

On définit L^i proche en proche de cette manière: étant donné un L^{i-1} ($i > 0$) et un point A non contenu dans L^{i-1} on définit L^i comme l'ensemble des points P tels que $P \in A \vee B$ ($B \in L^{i-1}$). On peut ainsi définir L^i pour un entier i quelconque.

Axiome 4. Pour tout L^i le complément de L^i par rapport à \mathcal{S} n'est pas vide.

Comme conséquence de cet axiome, il existe au moins un L^1 . Autrement dit, la famille (ℓ) n'est pas vide.

* 一般教養教授 数学

D'après axiome 1, pour deux points quelconques non contenu dans un L^0 , il existe un et un seul L^1 qui les renferment. Plus généralement, en utilisant les axiomes 1, 2, 3 et 4 on démontre, par l'induction mathématique qu'il existe un et un seul L^i qui renferme les $i+1$ points volontairement données non contenus dans un L^{i-1} (5) Projective geometry). Tels $i+1$ points sont dits indépendents. L'ensemble L^i déterminé par ces $i+1$ points est dit filé par eux.

Une famille des points $((P_\alpha)(\alpha \in J))$ de \mathcal{S} dont toutes les sous-familles finis sont des systèmes des points indépendents est dite liblé.

Soient maintenant $((P_\alpha)(\alpha \in J))$ une famille quelconque des points de \mathcal{S} et U la réunion des ensembles dont chaun est filé par une sous-famille finie de $((P_\alpha)(\alpha \in J))$. On dit alors que la fammille $((p_\alpha)(\alpha \in J))$ engendre l'ensemble U . En particulier, lorsque la famille $((P_\alpha)(\alpha \in J))$ est liblé, on l'appelle la base de U et la famille elle-même se note $\langle U \rangle$: $\langle U \rangle$ est la base de U .

2. Base de l'ensemble \mathcal{S}

Considérons l'ensemble \mathfrak{S} des familles liblé des points de \mathcal{S} ordonnées par inclusion. Soient \mathfrak{G} le sous-ensemble de \mathfrak{S} totalement ordonné et V la réunion des familles $\langle U \rangle$ appartenant à \mathfrak{G} . Cette réunion V est aussi une fammille liblé de \mathcal{S} . En effet, prenons un point P de V . Il est contenu dans un élément $\langle U \rangle(P)$ de \mathfrak{S} . Soit $\langle U \rangle(Q)$ ($Q \in V$) un autre élément de \mathfrak{S} . Comme $\langle U \rangle(P)$ et $\langle U \rangle(Q)$ sont les deux éléments de \mathfrak{S} totalement ordonnés par l'inclusion, l'un d'eux contient l'autre. Soient, par exemple, $\langle U \rangle(P) \subset \langle U \rangle(Q)$. Il vient alors

$$\langle U \rangle(P) \cup \langle U \rangle(Q) = \langle U \rangle(Q).$$

On peut ainsi conclure que P_1, \dots, P_m étant les points finis volontairement pris en V , la réunion

$$\langle U \rangle P_1 \cup \langle U \rangle P_2 \dots \cup \langle U \rangle P_m$$

coïncide avec un $\langle U \rangle(Q)$, où $Q \in \{P_1, \dots, P_m\}$.

Donc la réunion V elle-même est une famille $\langle U \rangle(Q)$ où Q est un point de V . Autrement dit, V est une famille des points de \mathcal{S} . Cela revient à dire que l'ensemble \mathfrak{S} est inductif (9) Ensembles ordonnés, p. 44)). Il possède donc un élément maximal $\langle W \rangle = ((A_i)(i \in I))$. Or, on a $\mathcal{S} \leq W$. En effect, si l'espace \mathcal{S} renferme un point P non contenu dans W on obtiendrait, en ajoutant P à W , une famille liblé des points de \mathcal{S} non contenue dans $\langle W \rangle$ ce qui est absurde. Il vient donc $\mathcal{S} = W$ d'après la définition de l'élément maximal de sorte que $\langle W \rangle$ est une base de \mathcal{S} . On arrive ainsi à prouver que \mathcal{S} admet de base.

3. Repère sur \mathcal{S}

D'après le théorème de Zermelo, il existe un bon ordre sur la base $((A_i)(i \in I))$ de \mathcal{S} (9) Ensembles ordonnés p. 43)). Cet ordre sera noté \leq . On peut toujours supposer que l'ensemble d'indice I est équipotent à l'ensemble $((A_i)(i \in I))$ et, par suite, bien ordonné. L'élément le plus petit de I sera noté ι .

Soient $A_{i_0}, A_{i_1} (i_0 < i_1)$ deux points pris en $((A_i) (i \in I))$. D'après axiome 2 il existe sur la droite $A_{i_0} \vee A_{i_1}$ un point $U_{i_0 i_1}$ différent de A_{i_0} et de A_{i_1} . Le système $[A_{i_0}, A_{i_1}; U_{i_0 i_1}]$ se nomme repère dont A_{i_0} et A_{i_1} sommets et dont $U_{i_0 i_1}$ est point d'unité. Soient ensuite $A_{i_0}, A_{i_1}, A_{i_2} (i_0 < i_1 < i_2)$ trois points pris en $((A_i) (i \in I))$. Il existe sur la droite $U_{i_0 i_1} \vee A_{i_2}$ un point $U_{i_0 i_1 i_2}$ différent de $U_{i_0 i_1}$ et aussi de A_{i_2} . Le système $[A_{i_0}, A_{i_1}, A_{i_2}; U_{i_0 i_1 i_2}]$ se nomme le repère dont A_{i_0}, A_{i_1} et A_{i_2} sont sommets et dont $U_{i_0 i_1 i_2}$ est point d'unité et ainsi de suite: $A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r} (i_0 < i_1 < \dots < i_r)$ sont les $r+1$ ($r \geq 1$) points pris en $((A_i) (i \in I))$. Il existe sur la droite $U_{i_0 i_1 \dots i_{r-1}} \vee A_{i_r}$ un point $U_{i_0 i_1 \dots i_r}$ différent de $U_{i_0 \dots i_{r-1}}$ et aussi de A_{i_r} . Le système $[A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}; U_{i_0 \dots i_r}]$ se nomme le repère dont A_{i_0}, A_{i_1}, \dots et A_{i_r} sont sommets et dont $U_{i_0 \dots i_r}$ est point d'unité.

Comme les $r+1$ points A_{i_0}, \dots, A_{i_r} sont une partie finie de la famille libre $((A_i) (i \in I))$ ils sont indépendents. L'ensemble filé par ces points sera noté $A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r}$.

Soient ensuite A_{i_r} un point de $\{A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ et $A_{j_1}, \dots, A_{j_{r-1}}$ les autres. Alors j, j_1, \dots, j_{r-1} est une permutation de $i_0 i_1 \dots i_r$ de sorte qu'on a

$$A_{j_0} \vee A_{j_1} \vee \dots \vee A_{j_{r-1}} \vee A_{i_r} = A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r}.$$

Il existe sur la droite $U_{j_0 \dots j_{r-1}} \vee A_{i_r}$ un point $U_{j_0 j_1 \dots j_{r-1} i_r}$ différent de $U_{j_0 \dots j_{r-1}}$ et aussi de A_{i_r} . Le système $[A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}; U_{j_0 j_1 \dots j_{r-1} i_r}]$ est aussi un repère de sommets $A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$. Le système $[A_{j_1}, \dots, A_{j_{r-1}}; U_{j_0 \dots j_{r-1}}]$ se nomme son repère frontière correspondant à sommet supprimé A_{i_r} .

Quant au repère dont le sommet est un seul point $A_0 \in \mathcal{S}^0$, on convient de regarder son point d'unité aussi coïncide avec A_0 .

4. Ensemble des points d'unité

Théorème. On peut associer à la base $\mathcal{U}((A_i) (i \in I))$ de \mathcal{S} une partie \mathcal{U} de \mathcal{S} de la manière que les points finis dont les indices sont un système des indices finis volontairement pris en segment $[\iota, \beta]$ de I , avec un élément de \mathcal{U} uniquement associé à ce système forment un repère K dont ces points sont sommets et dont cet élément de \mathcal{U} est un point d'unité, muni d'un repère frontière qui s'obtient par supprimer un sommet quelconque de K sans changer le point d'unité de K .

D'après le principe de recourance pour démontrer ce théorème il suffit de prouver

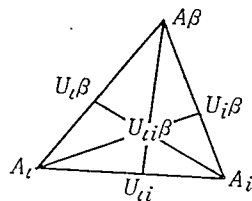
$$(4.1) \quad (\beta \in I \text{ et } \forall \gamma ((\gamma \in I \text{ et } \gamma < \beta) \Rightarrow \mathcal{R}(\gamma))) \Rightarrow \mathcal{R}(\beta)$$

où on désigne par $\mathcal{R}(\alpha)$ que la dite propriété est vraie lorsque i_0, \dots, i_r sont des indices finis volontairement pris en segment $[\iota, \alpha]$ de I . (9) Ensembles ordonnés p. 41))

Nous allons ainsi nous occuper à (4.1). Prenons sur la droite $A_\iota \vee A_\beta$ un point $U_{\iota\beta}$ différent de A_ι et aussi de A_β . On a alors le repère $K_1([A_\iota, A_\beta; U_{\iota\beta}])$. En supprimant l'un des sommets A_ι et A_β sans changer toujours le point d'unité $U_{\iota\beta}$ on obtient, d'après la convention faite plus haut, un repère frontière de K_1 dont tous les sommets et le point d'unité coïncident avec l'autre sommet de K_1 .

Envisageons ensuite trois points $A_\iota, A_\alpha, A_\beta (\iota < \alpha < \beta)$ on a le repère $[A_\iota, A_\beta; U_{\iota\beta}]$

de la propriété dont nous venons de mentionner. De même, on a le repère $[A_i, A_t; U_{it}]$ de la propriété pareille. Les deux droites $U_{i\beta} \vee A_t$ et $U_{it} \vee A_\beta$ dans $A_t \vee A_t < A_\beta$ s'intersectent en un point $U_{it\beta}$ tandis que les droites $A_t \vee U_{it\beta}$ et $A_t \vee A_\beta$ s'intersectent en un point $U_{i\beta}$. On a ainsi le repère $K_2([A_t, A_t, A_\beta; U_{it\beta}])$ muni de trois repères frontière $[A_t, A_\beta; U_{i\beta}]$, $[A_t, A_t; U_{it}]$, $[A_t, A_\beta; U_{t\beta}]$ qui s'obtient par supprimer l'un des trois sommets de K_2 sans changer le point d'unité de K_2 .



Nous allons maintenant examiner (4.1) directement. Prenons en segment $[\iota, \beta]$ de I , $r+1$ indices $i_0 < i_1 < \dots < i_r$. Lorsque $\iota = i_0$, d'après $\mathcal{R}(\gamma)$ ($\gamma < \beta$), il existe le repère $[A_i, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}; U_{i_1 \dots i_r}]$. Comme les cas où $r=1, 2$ deviennent respectivement les cas de K_1, K_2 on suppose maintenant $r > 2$. L'ensemble $U_{i\beta} \vee A_{i_1} \vee A_{i_2} \dots A_{i_r}$ et la droite $U_{i_1 \dots i_r} \vee A_\beta$ se trouvent dans $A_t \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r} \vee A_\beta$ ils s'intersectent en un point $U_{i_1 \dots i_r \beta}$ tandis que $A_t \vee U_{i_1 \dots i_r \beta}$ et $A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r} \vee A_\beta$ s'intersectent en un point $U_{i_1 \dots i_r \beta}$ de sorte qu'on a les repères $K_r([A_t, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}, A_\beta; U_{i_1 \dots i_r \beta}])$, $K_{r-1}([A_{i_1}, \dots, A_{i_r}, A_\beta; U_{i_1 \dots i_r \beta}])$ dont le dernier est le repère frontière du premier correspondant au sommet A_t . De même on a les repères frontières de K_r

$$[A_t, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}, \beta; U_{i_2 \dots i_r \beta}], [A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}, \beta; U_{i_1 i_2 \dots i_r \beta}], \dots$$

correspondant aux autres sommets de K_r .

Lorsque $\iota < i$, il existe le repère $K_{r+1}([A_t, A_{i_0}, \dots, A_{i_r}, A_\beta; U_{i_0 i_1 \dots i_r \beta}])$. Projétons-le du point A_t sur $A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r} \vee A_\beta$. Il vient le repère $K_r([A_{i_0}, \dots, A_{i_r}, A_\beta; U_{i_0, \dots, i_r \beta}])$ muni des repères frontières qui viennent de ceux de K_{r+1} . On arrive ainsi à prouver (4.1).

5. Coordonnées normales d'un point de S

Envisageons un ensemble L filé par les points finis indépendents de S . En utilisant le point d'unité lui uniquement associé et en tenant compte des axiomes 1, 2, 3 et 4, on définit projectivement addition et multiplication de ses points de sorte qu'on a un corps lui associé. (5) Projective geometry).

Axiome 5. Un corps associé à un ensemble L filé par les points finis indépendents de S est toujours isomorphe au corps de nombres réels.

Conformément à cet axiome l'ensemble L se nomme l'espace projectif à dimensions i , lorsqu'il est filé par les $i+1$ points de S tandis que l'ensemble S se nomme l'espace projectif à dimension infinie. Un point P de S possède ainsi les coordonnées projectives par rapport au repère associé à L .

Un point P de S est contenu d'après définition dans un espace projectif à dimension finie. Si deux espaces projectifs L_1 et L_2 contiennent le point P , il en est de même pour l'intersection $L_1 \cap L_2$. Ce procès de diminuer la dimension se termine après répétition finie, car la dimension est un entier fini. On aboutit à un espace projectif $L(P)$ à dimension minimal. Soient (x_0, x_1, \dots, x_r) où $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ les coordonnées projectives d'un point de $L(P)$ par rapport au repère associé à $L(P)$,

Parmi ces coordonnées il n'y en a que finis celles qui sont différentes de zéro. Mais elles ne sont pas toutes nulles. En particulier, lorsque le point P est un sommet A_{i_k} de la base elles toutes zéro sauf x_{i_k} . Lorsque P est un point d'unité, elles possèdent les mêmes valeurs ou deviennent zéro. On peut faire $x_0 > 0$ en multipliant, s'il est nécessaire, par -1 toutes les x_i . On peut aussi les diviser par $\sum |x_i|$. Les coordonnées ainsi uniquement déterminées sont dites normales. Par abus de notation on convient de les noter sans changer la mode d'écriture de sorte qu'on a $\sum |x_i| = 1$ sauf mention expresse du contraire.

6. Changement de repère

Etant donné une base $\mathcal{U}((A_i)(i \in I))$ de \mathcal{S} , considérons une autre $\mathcal{U}'((A_j')(j \in J))$. Soient $((p_j^i)(i \in I))$ les coordonnées normales de A_j' par rapport au repère $K([A_i, \dots, A_{i_r}; U_{i_0, \dots, i_r}])$ associé à $L(A_j^i)$, les indices finis i_0, \dots, i_r étant volontairement pris en segment $[\iota, \beta]$ de I . Il existe sur \mathcal{U}' aussi un bon ordre. On suppose l'ensemble d'indices J lui est équipotent. L'élément minimal de J sera noté ν . Soient j_0, j_r, \dots, j_r des indices finis volontairement pris en segment $[\nu, \beta]$ et U_{j_0, j_r, \dots, j_r} le point d'unité lui uniquement associé. Ce point s'exprime sous la forme

$$x^{j_0} A_{j_0}' + \dots + x^{j_r} A_{j_r}'$$

(5) Projective geometry)). Donc, les coordonnées projectives $(x_i)(i \in I)$ et $(x_j')(j \in J)$ d'un point P de \mathcal{S} rapportées respectivement au repère $K([A_{i_0}, \dots, A_{i_r}; U_{i_0, \dots, i_r}])$ et au repère $K'([A_{j_0}', \dots, A_{j_r}'; U_{j_0}', \dots, j_r'])$ se relient par

$$\rho x^i = x'^{j_0} x^{j_0} p_{j_0}^i + \dots + x'^{j_r} x^{j_r} p_{j_r}^i \quad (\rho \neq 0, i \in I).$$

Or, en associant à la base \mathcal{U}' une propre famille des points d'unité, on peut faire tous les $K'(j \in J)$ différents de zéro égaux à 1. Pour le démontrer il suffit de prouver (4, 1) en désignant par $\mathcal{R}(\alpha)$ que la dite propriété est vraie lorsque j_0, \dots, j_r sont des indices finis volontairement pris en segment $[\nu, \alpha] \subset J$. Or, d'après $\mathcal{R}(\gamma)$ ($\gamma < \beta$) l'expression $\kappa^{j_0} A_{j_0}' + \dots + \kappa^{j_r} A_{j_r}' + \kappa_\beta A_\beta'$ devient $A_{j_0}' + \dots + A_{j_r}' + \kappa_\beta A_\beta'$. Donc en multipliant par κ^β toutes les coordonnées projectives de A_β' on obtient $\mathcal{R}(\beta)$.

On arrive ainsi à conclure qu'on peut faire l'équation du changement de repère $K \rightarrow K'$

$$(6.1) \quad \rho x^i = \sum_j p_j^i x'^j \quad (i \in I, \rho \neq 0, \sum_i |p_j^i| = 1)$$

7. Transformation projective attaché à un changement de repère

Thorème. Etant donné deux repères

$$K([A_{i_0}, \dots, A_{i_r}; U_{i_0, \dots, i_r}]) \quad (i \in I)$$

et

$$K'([A_{j_0}', \dots, A_{j_r}'; U_{j_0}', \dots, j_r'])$$

où i_0, \dots, i_r et j_0, \dots, j_r sont respectivement les indices finis bien ordonnés pris en segment $[\iota, \beta]$ et en segment (ν, β) (ι et ν sont respectivement les indices minimaux des ensembles bien ordonnés I et J), il existe une et une seule transformation pro-

jective satisfaisant à la condition suivante.

1. Pour chaque sommet $A_i (i \in I)$, image TA_i coïncide avec $A_{j(i)'}'$ en sorte qu'on a $TA_i = A_{i'}'$, $A_{i_1} < A_{i_2} \Rightarrow A_{j(i_1)'}' < A_{j(i_2)'}'$, $T[A_i, A_a] = [A_{i'}', A_{j(a)'}']$.

2. Pour chaque sous-famille finie (i_0, \dots, i_r) pris en segment $[\iota, \beta]$ on a

$$TU_{i_0 \dots i_r} = U'_{j(i_0) \dots j(i_r)}.$$

L'unicité de T est évidente d'après la théorie concernant l'espace projective à dimensions finis. Nous allons maintenant démontrer l'existence.

Lemme. Il existe une application f_β du repère K dans K' satisfaisant à la condition 1 et 2 où $T=f$.

Considérons une application f_β satisfaisant à la condition suivante.

(i) f_β fait correspondre, à chaque indice pris en segment $[\iota, \beta]$ un sommet de K' en sorte qu'on a

$$f_\beta A_i = A_{i'}', \quad A_i \leq A_{i_1} < A_{i_2} \leq A_\beta \Rightarrow f_\beta A_{i_1} < f_\beta A_{i_2}$$

(ii) f_β fait correspondre, à chaque point d'unité $U_{i_0 i_1 \dots i_r}$ associé à un ensemble fini (i_0, \dots, i_r) des indices pris en segment $[\iota, \beta] \subset I$ le point d'unité $U_{j(i_0) \dots j(i_r)}$ de K' . La démonstration se réduit alors à prouver (4.1) où on désigne par $\mathcal{R}(\alpha)$ que la dite propriété est vraie lorsque i_0, \dots, i_r sont des indice finis pris en segment $[\iota, \alpha] \subset I$.

En tenant compte de $\mathcal{R}(\gamma)$ ($\iota \leq \gamma < \beta$) posons

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\tau} (f_\tau A_i) \quad (\iota \leq i \leq \gamma) \quad (\iota \leq \gamma < \beta).$$

L'ensemble \mathcal{L} est une partie de l'ensemble bien ordonné $((A_j') (j \in J))$. De plus, si $A_i' \in \mathcal{L}$ il existe $A_\tau \in [A_i, A_\beta]$ et $A_a \in [A_i, A_\tau]$ tels que $A_i' = f_\tau A_a$. On a donc, en vertu de (i)

$$\begin{aligned} A_k' \leq A_i' &\Rightarrow (A_k' \in [A_{i'}', A_i']) = (f_a A_i (\iota \leq i \leq a)) \\ &\Rightarrow A_k' \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

ce qui nous montre que \mathcal{L} est un segment de l'ensemble $((A_j') (j \in J))$ (9) Ensemble ordonnés p. 38 Def. 2)).

Entre $[A_i, A_\beta]$ et \mathcal{L} il existe l'isomorphisme défini par

$$\phi_\beta(A_i) = f_i(A_i)$$

On peut en déduire une transformation projective qui applique l'espace U engendré par $[A_i, \beta]$ à l'espace U' engendré par \mathcal{L} . Si \mathcal{L} coïncidait avec l'ensemble $((A_j') (j \in J))$, on aurait $U' = S$. Or, on a $U \subset S$. Il faudrait donc $U = S$ ce qui est absurde, car $\beta \in U$. Le complémentaire de \mathcal{L} par rapport à l'ensemble $((A_j') (j \in J))$, n'étant ainsi pas vide, il possèdent le plus petit élément A_b' de sorte que

$$A_j' \in \mathcal{L} \Rightarrow A_j' < A_b'.$$

On a donc

$$\mathcal{L} \cup A_b' = [A_{i'}', A_a'].$$

Maintenant en posant

$$f_\beta A_i = f_\tau A_i \quad (A_i \leq A_\tau < A_\beta), \quad f_\beta A_\beta = A_b',$$

on obtient l'application f_β satisfaisant à la condition (i). Ensuite en posant

$$f_\beta U_{i_0 \dots i_r} = f_\tau U_{i_0 \dots i_r} \quad (A_{i_0} < \dots < A_{i_r} \leq A_\tau < A_\beta),$$

on obtient

$$f_{\beta}U_{\nu\beta}=U_{\nu\beta}', \quad f_{\beta}U_{i_0\ldots\beta}=U'_{j(i_0)}\cdots b'$$

On arrive ainsi à prouver le lemme.

La démonstration du théorème est maintenant immédiate. Si l'ensemble $((f(A_i) \mid i \in I))$ ne coïncide pas avec K' l'ensemble $K' - (f(A_i) \mid i \in I)$ admet le plus élément $A_{b'}$ et on a $(f(A_i) \mid i \in I) \cup A_{b'} = [A_{\nu'}, A_{b'}]$. Il faut donc $I \subset J$. En échangeant K et K' on a $J \subset I$ d'où $I = J$. Alors I et J étant tous les deux bien ordonnés on peut faire $A'_{j(i)} = A_i'$ ce qui entraîne la démonstration. (9) Ensembles ordonnés p. 46)).

8. Transformations projectives normales

Etant donné un point $(a) = ((a^i) \mid i \in I)$ et un nombre positif $\lambda \leq \min_i (|a^i| \neq 0)$ on appelle cube projectif de centre a et de largeur λ l'ensemble $\mathfrak{C}(a, \lambda)$ des points x tels que $|x^i - a^i| < \lambda \mid i \in I$. (les coordonnées du point a sont normales d'après la convention faite plus haut. D'une manière précise, elles se relient par $\sum_i |a^i| = 1$, $a^i = 0$ sauf pour des indices finis, si $a^{i_0}, a^{i_1}, \dots, a^{i_r} \mid (i_0 < i_1 < \dots < i_r)$ sont les coordonnées différents de zéro, on a $a^{i_0} > 0$. Il en est de même pour x^i . Grace à l'hypothèse faite sur λ , x^{i_0} et a^{i_0} sont de même signe, même quand i_0 n'est pas indice le plus petit pour (x) .

On donne à \mathcal{S} la topologie dont l'ensemble des cubes projectifs est une base.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, l'équation du changement de repère $K \rightarrow K'$ s'exprime par (6.1) où $p_j^i \mid (i \in I)$ sont les coordonnées projectives du sommet A_j' de K' par rapport au repère K . On peut donc regarder $p_j^i \mid (i \in I)$ comme les coordonnées normales du point A_j' . D'une manière précise, on suppose que si $i_0(p, j), \dots, i_r(p, j) \mid (i_0 < i_1 < \dots < i_r)$ sont les indices des coordonnées différents de zéro du point A_j' , on a $p_{j^{i_0}}(p, j) > 0$. Alors, si on convient, dans (6.1), de prendre comme les coordonnées x et x' les coordonnées normales des points courants la valeur du facteur commun ρ est uniquement déterminée. La transformation projective dont l'équation s'écrit sous cette forme est dite normale.

Soient ensuite $(q_i^j \mid i, j \in I)$ les coordonnées normales du sommet de A_i par rapport au repère K' . L'enverse T^{-1} de la transformation projective normale s'exprime par

$$(8.1) \quad \tau x^j = \sum_i q_i^j x'^i \quad (\tau \neq 0).$$

On démontre que la transformation T^{-1} ainsi obtenue est aussi normale et qu'il en est de même pour la composée

$$\kappa x'^i = \sum_{l, m} p_l^i p_m^l x^m \quad (\kappa \neq 0)$$

des transformations normales T et T' :

$$(8.2) \quad \sum_j |q_i^j| = 1 \quad \text{pour chaque } i,$$

$$(8.3) \quad \sum_i |\sum_l p_l^i p_m^l| = 1 \quad \text{pour chaque } m.$$

Nous voyons ainsi que l'ensemble \mathfrak{C} des transformations normales forme un groupe. (3) p. 11)).

On induit sur \mathfrak{C} la topologie du produit \mathcal{S}^I en faisant correspondre au graphe

fonctionnel F tel que $F(i) \subset \mathcal{S}$ ($i \in I$) la transformation projective normale T dont les coefficients p_j^i sont les coordonnées normaux du point $p_j = A_j' = TA_j$ pour chaque j . (10. Structures topologiques). Le groupe \mathfrak{S} devient alors un groupe topologique.

9. Composante connexe principale

Soit a un point de \mathcal{S} tel que

$$L(a) = A_{h_0} \vee \dots \vee A_{h_l}$$

Si on y effectue la transformation projective normale T définie par (6.1), pour chaque h_σ ($\sigma = 0, \dots, l$) les indices i tels que $p_h^i \neq 0$ sont finis. Soit $\{u_0, \dots, u_r\}$ l'ensemble des tels indices i . Supposons que l'inverse T^{-1} est donnée par (8.1) de sorte qu'on a (3) p. 11)

$$(9.1) \quad \sum_j q_j^h p_k^j = \delta_k^h.$$

Les $r+1$ nombres

$$\sum_j p_j^{u_\lambda} a^j \quad (\lambda = 0, \dots, r)$$

contient alors au moins un nombre différent de zéro, car sinon, tous les a^{h_σ} ($\sigma = 0, \dots, l$) n'étant pas nuls, la matrice $(p_{h_\sigma}^{u_\lambda})$ serait du rang moindre que $l+1$ contrairement à l'égalité

$$\left| \begin{pmatrix} q_{u_0}^{h_0} & \dots & q_{u_r}^{h_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{u_0}^{h_l} & \dots & q_{u_r}^{h_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{h_0}^{u_0} & \dots & p_{h_l}^{u_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{h_0}^{u_r} & \dots & p_{h_l}^{u_r} \end{pmatrix} \right| = 1$$

qui s'obtient comme conséquence de (9.1).

Soit M le plus nombre de

$$|a^{h_\sigma}| \quad (\sigma = 0, \dots, l), \quad \left| \sum_j p_j^i a^j \right| \quad (i \in I).$$

En prenant un nombre δ tel que

$$(9.2) \quad 0 < \delta < \frac{M}{4(l+1)}$$

considérons le cube projectif $\mathfrak{S}(a, \delta)$. Pour un point quelconque $x \in \mathfrak{S}(a, \delta)$ on a

$$a^i - \delta < x^i < a^i + \delta$$

et, grâce à (9.2), tous les membres de ces inégalités sont positif ou négatif selon que $a^i \leq 0$. Soit maintenant (k_0, \dots, k_m) l'ensemble des indices i tels que $a^i \neq 0$. Il contient alors l'ensemble (h_0, \dots, h_l) . Son complément dans (k_0, \dots, k_m) sera noté (f_0, \dots, f_{m-l}) . On a aussi

$$|a^{h_\sigma}| - \delta < |x^{h_\sigma}| < |a^{h_\sigma}| + \delta,$$

d'où, par la sommation étendue de 0 à 1 par rapport à σ

$$1 = (1+l)\delta < 1 - \sum_{s=1}^{m-l} |x^{f_s}|,$$

c'est-à-dire,

$$(9.3) \quad 0 \leq \sum_{s=1}^{m-l} |x^{f_s}| < (1+l)\delta.$$

Reprenons la transformation projective normale T définie par (6.1). De l'inégalité

$$|p_j^i x^j - p_j^i a^j| < |p_j^i| \delta,$$

on tire

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^l p_j^i a^{h\sigma} - \sum_{\sigma=0}^l |p_{h\sigma}^i| \delta &< \sum_{r=0}^m p_{hr}^i x^{hr} - \sum_{s=1}^{m-l} p_{fs}^i x^{fs} \\ &< \sum_{\sigma=0}^l p_{h\sigma}^i a^{h\sigma} + |p_{h\sigma}^i| \delta \end{aligned}$$

Or, on a en vertu de (9.3)

$$\left| \sum_{s=1}^{m-l} p_{fs}^i x^{fs} \right| \leq \left| \sum_{s=1}^{m-l} p_{fs}^i \right| \cdot |x^{fs}| \leq \sum_{s=1}^{m-l} |x^{fs}| < (1+l)\delta.$$

Il vient donc

$$(9.4) \quad \sum_j p_j a^j - 2(1+l)\delta < \sum_j p_j^i x^j < \sum_j p_j a^j + 2(1+l)\delta$$

et, grace à (9.2), tous les membres de ces inégalités positifs ou négatifs selon que $p_j^i \leq 0$. Il en est de même pour les inégalités

$$\begin{aligned} \sum_j p_j^i a^j - \sum_{\sigma=0}^l |p_{h\sigma}^i| \delta - \sum_{s=1}^{m-l} |p_{fs}^i| |x^{fs}| &< \sum_j p_j^i x^j \\ &< \sum_j p_j^i a^j + \sum_{\sigma=0}^l |p_{h\sigma}^i| \delta + \sum_{s=1}^{m-l} |p_{fs}^i| |x^{fs}| \end{aligned}$$

de sorte que ces inégalités sont vérifiées même quand on y remplace

$$\sum_j p_j^i a^j \text{ et } \sum_j p_j^i x^j \text{ par } |\sum_j p_j^i a^j| \text{ et } |\sum_j p_j^i x^j|.$$

Sommons les inégalités ainsi obtenues par rapport à i . Il vient alors

$$\rho(a) - 2(1+l)\delta < |\rho(x)| < \rho(a) + 2(1+l)\delta.$$

En tenant compte de ces inégalités, on déduit de (9.4)

$$\frac{\sum_j p_j^i a^j - 2(1+l)\delta}{|\rho(a) + 2(1+l)\delta|} < \frac{-\sum_j p_j^i x^j}{\rho(x)} < \frac{\sum_j p_j^i a^j + 2(1+l)\delta}{|\rho(a) - 2(1+l)\delta|}$$

$$\frac{\sum_j p_j^i a^j - 2(1+l)\delta}{|\rho(a) - 2(1+l)\delta|} < \frac{\sum_j p_j^i x^j}{|\rho(x)|} < \frac{\sum_j p_j^i a^j + 2(1+l)\delta}{|\rho(a) + 2(1+l)\delta|}$$

selon que $\sum_j p_j^i a^j \leq 0$. En tous cas, il résulte de là que

$$(9.5) \quad \left| \frac{\sum_j p_j^i x^j}{|\rho(x)|} - \frac{\sum_j p_j^i a^j}{|\rho(a)|} \right| < \frac{4(1+l)\delta}{|\rho(a) - 2(1+l)\delta|} < \frac{8(1+l)\delta}{|\rho(a)|},$$

car par définition $|\rho(a)| > M$ et conséquemment

$$2(1+l)\delta < \frac{1}{2} |\rho(a)|.$$

Lorsque $\sum_j p_j^i a^j \neq 0$, on a, en vertu de (9.2), (9.4), $\sum_j p_j^i x^j \neq 0$ et $\sum_j p_j^i x^j \leq 0$ selon que $\sum_j p_j^i a^j \leq 0$.

Donc, $\rho(a)$ et $\rho(x)$ sont de même signe et l'inégalité (9.5) devient

$$|x^{ii} - a^{ii}| < \frac{8(1+l)\delta}{|\rho(a)|}$$

ce qui nous montre que la transformation projective normale T est continue dans le domaine $T^{-1}\mathfrak{E}(a, \delta)$. Cela revient à dire que $\mathfrak{E}(a, \delta)$ regardé comme domaine dans \mathfrak{E} est un domaine ouvert relativement à \mathfrak{E} .

D'ailleurs, comme un point quelconque de $\mathfrak{E}(a, \delta)$ se joint à a avec un segment

contenu dans $\mathfrak{E}(a, \delta)$, celui-ci est un domaine connexe. En particulier $\mathfrak{E}(A_i, \lambda)$ est un tel domaine. La coposante connexe contenant A_i sera nommée composante connexe principale et sera notée C_i .

10. Espace fibré dont le groupe structural est C_i

Soit a un point de $\mathfrak{E}(A_i, 1)$. Comme a'' est de même signe que A_i qui est positif, on $a' > 0$. L'ensemble des cube projectifs $\mathfrak{E}(a, \delta)$ ($a \in \mathfrak{E}(A_i, 1)$) est encore un domaine ouvert dont $\mathfrak{E}(A_i, 1)$ est une partie. On peut poursuivre ce procès jusqu'à ce que le domaine étendu contienne le cube projectif dont le centre b est un point préalablement donné dans C_i car sinon en partant de ce cube projectif on pourrait former une composante connexe autre que C_i , de sorte que $b \in C_i$ contrairement à l'hypothèse. Considérons maintenant, en tenant compte de ce qu'on a mentionné à la fin de n° 7, les deux repères

$$K([A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}; U_{i_0 \dots i_r}]) \text{ et } K'([A'_{i_0}, \dots, A'_{i_r}; U'_{i_0 \dots i_r}])$$

où $i_0 < i_1 < \dots < i_r$; i_0, i_1, \dots, i_r sont des indices finis volontairement pris en segment $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) de I . Soient T une transformation projective normale attachée au changement de repère $K \rightarrow K'$. On a

$$TA_{i_0} = A'_{i_0}, TA_{i_1} = A'_{i_1}, \dots, TA_{i_r} = A'_{i_r}, TU_{i_0 \dots i_r} = U'_{i_0 \dots i_r}, \\ T\mathfrak{E}(A_{i_0}, \lambda_1) = \mathfrak{E}(A'_{i_0}, \lambda_2), \quad T^{-1}\mathfrak{E}(A'_{i_0}, \lambda_2) = \mathfrak{E}(A_{i_0}, \lambda_3).$$

La transformation T restreinte dans le domaine $\mathfrak{E}(A_{i_0}, \lambda)$ où $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ opère comme un homéomorphisme. Il en est de même pour celle restreinte dans le domaine $\mathfrak{E}(A_i, \lambda)$. Quant à un point b volontairement pris sur C_i , d'après ce qu'on a remarqué plus haut, l'opération de la transformation T restreinte dans le domaine $C(b, \lambda)$ est une composition de tels homéomorphismes. On peut en conclure que C_i est un sous-groupe de \mathfrak{E} . De plus, on a démontré dans un article précédent qu'il existe un espace fibré Y_i qui est homéomorphe à un champ de vecteurs, pour lequel la dite restriction dans $C(A_0, \lambda)$ est le groupe structural et Z est la base. (3) p. 13)). On arrive ainsi à conclure qu'il existe une structure d'espace fibré $[C_i, Y_i, Z]$.

Maintenant soient W une variété topologique connexe admettant les homéomorphismes locaux $\{\varphi\}$ à C_i , W un point de W , $T = \varphi W$. Comme a remarqué plus haut, on peut étendre le domaine $\varphi^{-1}C(A_i, \lambda_0)$ proche en proche jusque le domaine étendu contienne la transformation projective normale $\Gamma = \varphi W$ de sorte qu'on peut en conclure que C_i est un sous-groupe de \mathfrak{E} . Il en est de même pour W , c'est-à-dire, W est une composant connexe. Il existe, en somme, un homéomorphisme Φ qui applique W à C_i . On arrive ainsi conclure l'existence de la structure d'espace fibré $[W, \Phi Y_i, Z]$.

Références

- 1) J. Kanitani. Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infini. Research Bulletin, Meisei Univ. No. 5. (Science and Engineering), 1970.
- 2) J. Kanitani. Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace pro-

- jectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 6 (Science and Engineering), 1971.
- 3) J. Kanitani. Sur les champs de vecteurs au dessus d'une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin Meisei Univ., No. 10 (Science and Engineering), 1974.
 - 4) J. Kanitani, Une démonstration précise sur l'équation du chemin horizontal. Research Bulletin. Meisei Univ., No. 17 (Science and Engineering), 1981.
 - 5) O. Veblen and W. Young Projective geometry.
 - 6) A. Lichnerwitz Théorie globale des connection et des groupes d'holonomie.
 - 7) E. Bertini Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.
 - 8) N. Steenrod The topology of fibre bundles.
 - 9) N. Bourbaki Libre I Chapitre III Ensembles ordonnés.
 - 10) N. Bourbaki Libre III Chapitre I Structure Topologique.
 - 11) N. Bourbaki Libre I Chapitre II § 5 Produit d'une famille d'ensembles.