Une démonstration précise sur l'equation du chemin horizontal

par Jōyō KANITANI

Résumé

En fait de l'équation du chemin horizontal au dessus d'un chemin régulier sur une variété différentiable admettantl les homéomorphismes locaux à l'espace projectif S à dimention inffini, on l'a déduit, dans un article précédent ([7], p. 13), comme une condition suffisante. l'objet principal de cet article est de vérifier qu'eelle est la condition nécéssaire et suffisante. Ensuite, nous donnons quelques remarques sur l'intégration de cette équation.

1. Coordonnées normales

Nous commensons par résumer des résultas déjà obtenus avec quelques suppléments. Soient $((A_i)(i \in I))$ une base de S. Nous pouvons toujours supposer qu'elle a un bon ordre et que l'ensemble d'indices I lui est équipotent. L'élément le plus petit de I se note ι. Pour chaque point P de S il existe un et un seul sous-ensemble fini $(A_{i_0}, A_{i_1}, \cdots, A_{i_n}\ (i_0 < i_1 < \cdots < i_n))$ qui détermine l'espace projectif $S(P) = A_{i_0} \vee A_{i_1} \cdots \vee A_{i_n}$ de la moindre dimension contenant ce point P ([1], p. 2).

En associant à la base $((A_i)\ \ (i \in I))$ une famille des points d'unité on forme un repère $\mathfrak{A}$ de sommets A_i. Se rapportant à ce repère un point P de S admet un et un seul système des coordonnées normales $((x^i)\ \ (i \in I))$ caraccérisées par 1° $x^i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i soit $i_0, i_1, \cdots, i_n$ $(i_0 < i_1 \cdots < i_n)$, 2° $\Sigma_i |x^i| = 1$, 3° $x^{i_0} > 0$.

Etant donné un point $a = ((a^i)\ \ (i \in I))$ et un nombre positif $\lambda \leq \text{mini.}\ (|a^i| \neq 0)$ on appelle cube projectif de centre a et de largeur λ l'ensemble $\mathfrak{C}(a, \lambda)$ des points x tels que $|x^i - a^i| < \lambda\ \ (i \in I)$. On donne a S la topologie dont une base est l'ensemble des cubes projetifs.

2. Groupe des transformations projectives normales

Envisageons une transformation projective régulière T de l'espace S à lui même. Nous pouvons supposer qu'elle est attachée à un changement de repère $\mathfrak{A}((A_i)\ (i \in I)) \to \mathfrak{A}'((A'_j)\ (j \in I))$ de sorte qu'elle s'exprime par ([2], p. 4; [4], p. 11)

$$\rho x'^i = \sum_j p_j{}^i x^j \quad (\rho \neq 0)$$

où les $p_j{}^i (i, j \in I)$ sont les coordonnées du sommet $A_j' = TA_j$ de $\mathfrak{A}'$ par rapport au repère $\mathfrak{A}$. Si on prend comme $p_j{}^i$ les coordonnées normales, il vient pour chaque j 1° $p_j{}^i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$ soit $i_0(p, j),\ i_1(p, j), \cdots, i_n(p, j)$

* 一般教養教授 数学

$(i_0 < i_1 < \cdots < i_n)$, 2° $\Sigma_i |p_j{}^i| = 1$, 3° $p_j{}^{i_0(p,j)} > 0$.

La transformation projective T est dite alors normale. On peut prendre $p_j{}^i (i, j \in I, i \neq i_0(p, j))$ comme coordonnées de cette transformation T.

Soient ensuite $(q_i{}^j (i, j \in I))$ les coordonnées normales du sommet A_i de $\mathfrak{A}$ par rapport au repère $\mathfrak{A}'$. L'inverse T^{-1} de la transformation projective normale T s'éxprime par

$$\tau x^j = \sum_i q_i{}^j x'^i \qquad (\tau \neq 0).$$

On démontre que la transformation T^{-1} ainsi obtenue est aussi normale et qu'il en est de même pour la composée

$$\kappa x'^i = \sum_{l,m} p_l'{}^i p_m{}^l x^m \qquad (\kappa \neq 0)$$

des transformations projectives normales T et T' :

$$(2.1) \qquad \sum_j |q_i{}^j| = 1 \text{ pour chque } i; \quad \sum_i |\sum_l p_l'{}^i p_m{}^l| = 1 \text{ pour chaque } m.$$

Nous voyons ainsi que l'ensemble $\mathfrak{G}$ des transformations normales forme un groupe.

On induit sur $\mathfrak{G}$ la topologie du produit S^I en faisant correspondre au graphe fonctionnel F tel que $F(i) \subset S$ $(i \in I)$ la transformation projective normale T dont les coefficients $p_j{}^i$ sont les coordonnées normales du point $p_j = A_j = TA_j$ pour chaque j. ([8], chap. 1, p. 61). La groupe $\mathfrak{G}$ devient alors un groupe topologique.

Soient $U(p, j_0, \varepsilon)$ l'ensemble des transformations projectives normales $T(\zeta_s{}^r)$ telles que

$$\zeta_{j_0} (= T(\zeta_r{}^s) A_{j_0}) \in \mathfrak{C}(p_{j_0}, \varepsilon).$$

La topologie de $\mathfrak{G}$ est engendrée par la fammille de tels ensmbles, l'inersection de tels ensembles de nombre fini

$$\mathfrak{U}_{(p,\varepsilon)} = U_{(p, j_1, \varepsilon)} \cap \cdots \cap U_{(p, j_l, \varepsilon)}$$

qui se nomme le voisinage élémentaire de p devenant un élément d'une base de cette topologie. On a pour $\zeta_j \in \mathfrak{C}_{(p,\varepsilon)}$

$$\zeta_{j_s} \in \mathfrak{C}(p_{j_s} \varepsilon) \quad (s = 1, \cdots, b), \quad \zeta_j \in S$$

où d'après la convention faite sur le largeur d'un cube projectif,

$$0 < \varepsilon \leq \text{mini.} \ (|p_{j_s}{}^i| \neq 0 \quad (s = 1, \cdots, b;\ i \in I).$$

Dailleurs, ζ_{j_s} étant de même signe que $p_{j_s}{}^i$ pourvu que $p_{j_s}{}^i \neq 0$, nous pouvons prendre $\zeta_{j_s}{}^i (|\zeta_{j_s}{}^i| \neq 0,\ i \neq i_0(p, j_s))$ comme coordonnées locales de $T(\zeta_t{}^s)$ ([4], p. 2).

On designe par $\tilde{\mathfrak{U}}(p, \varepsilon)$ l'ensemble des transformations projectives normales ζ telles que

$$\zeta_{j_s} \in \mathfrak{C}(p_{j_s}, \varepsilon) \quad (s = 0, \cdots, b), \quad \zeta_j = p_j \quad (\overline{j} \in \{j_1, \cdots, j_b\}).$$

Solt $T(\gamma_j{}^i)$ une transformation projective normale appartenant à un voisinage $U_{(g, j_0, \sigma)}$ de $g \in \mathfrak{G}$. Envisageons la translation à gauche associée à un élément y de $\mathfrak{C}$: $L(y)\gamma = y\gamma$. Posons $p = yg$. On a ([4], p. 5)

$$|\sum_t y_t{}^i \gamma_{j_0}{}^t - p_{j_0}{}^i| < 2c\sigma,$$

c'est-à-dire,

(2.2) $$L(y)U_{(g,j_0,\sigma)}\subset U_{(p,j_0,\varepsilon)}$$
$$\left(\sigma\leq\frac{1}{c(g_{j_0})}\text{mini. }\left(\varepsilon,\ |g_{j_0}{}^i\neq 0\right),\quad \varepsilon\leq\text{mini.}|p_{j_0}{}^i|\neq 0\right),$$

oú $c(g_{j_0})$ est le nombre des indices i tels que $g_{j_0}{}^i\neq 0$.

Considérons maintenant une fonction réelle definie dans $\mathfrak{G}$. Soit $\tilde{f}$ la restriction de f sur $\tilde{\mathfrak{U}}_p$ $(p\in\mathfrak{G})$. Pour une transslation $\zeta=T(\zeta_j{}^i)\in\tilde{\mathfrak{U}}_p$, on peut prendre comme coordonnées locales les $\zeta_{j_s}{}^i(\zeta=s,\cdots,b;\ (i\neq i_0(p,j_s))$ car, dans $\tilde{\mathfrak{U}}_p$ les $\zeta_j{}^i(i\in I, j\overline{\in}\{j_1,\cdots,j_b\})$ sont les constants $p_j{}^i$. Il existe donc une fonction $f^*(\zeta_j{}^i)$ définie dans $\tilde{\mathfrak{U}}_p$ satisfaisant à l'égalité

$$f(\zeta)=f^*(\zeta_{j_s}(\zeta)).$$

Lorsque cette fonction est différentiable par rapport a $\zeta_{j_s}{}^i$ la fonction $f(\zeta)$ est dite différentiable dans $\mathfrak{U}_p$. Si cela arrive en tout point p dans $\mathfrak{G}$ independamment de choix de voisinage élémentaire $\mathfrak{U}_p$ elle est dite différentiable dans $\mathfrak{G}$.

Soit F l'ensemble des des fonctions continûment différentiables dans $\mathfrak{G}$. L'application qui fait correspondre le nomble réel

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial\zeta_{j_s}{}^i}\right)_{(\zeta=p)}\qquad (i\neq i_0(p,j_s)$$

au triplet $(p,\mathfrak{U}_p,f)$ se note $\dfrac{\partial}{\partial p_{j_s}{}^i}$. Si $\mathfrak{U}_p{}'\subset\mathfrak{U}_p$, on a

$$\frac{\partial}{\partial p_{j_s}{}^i}(p,\mathfrak{U}_p,f)=\frac{\partial}{\partial p_{j_s}{}^i}(p,\mathfrak{U}_p{}',f).$$

Lorsque le point p reste fixe, l'ensemble des combinaisons linéaires de

$$\frac{\partial}{\partial p_j{}^i}\qquad (i,j\in I;\ i\neq i_0(p,j))$$

forme un espace vectoriel qui se nomme l'espace tangent à $\mathfrak{G}$ en point p. Tout vectenr tangent à $\mathfrak{G}$ en point p s'écrit sous la forme

$$\sum_{(i\neq i_0(p,j),j)}\lambda_j{}^i\frac{\partial}{\partial p_j{}^i},$$

où $\lambda_j{}^i=0$ sauf pour un nombre fini des couple $(i,j\in I\times I)$.

En particulier, le vecteur tangent en élément neutre e s'écrit

$$\sum_{j_s}\sum_{i(\neq j_s)}\lambda_{j_s}{}^i\frac{\partial}{\partial e_{j_s}{}^i},$$

où $\lambda_j{}^i=0$ pour $j\overline{\in}\{j_1,\cdots,j_b\}$ et aussi pour chaque j_s, sauf pour un nombre fini des indices $i(\neq j_s)$.

En fait de la différentielle des translations à gauche et à droite on démontre que ([6], pp. 2–6; [7], pp. 3–10).

$$(2.3)\qquad dL(y)\left(\frac{\partial}{\partial g_{j_0}{}^h}\right)=\sum_{i(\neq i_0(p,j_0))}(y_h{}^i-\sigma_{j_0}{}^h y^i{}_{i_0(g,j_0)})\frac{\partial}{\partial p_{j_0}{}^i}$$

$$(yg=p,\ h\neq i_0(g,j_0),\ L(y)U(g,j_0,\sigma)\subset U_{(p,j_0,\varepsilon)},$$

$$\left(\sigma\leq\frac{1}{2c(q_0)}\text{mini. }(\varepsilon,\ (|g_{j_0}{}^i|\neq 0)),\ \varepsilon\leq\text{mini. }(p_{j_0}{}^i\neq 0)\right),$$

où $\sigma_{j_0}{}^h$ est le signe de la coordonnee locale $\zeta_{j_s}{}^h\neq 0$ d'un point γ_{j_0} pris arbitrairement dans $\mathfrak{C}(g_{j_0},\sigma)$. Cela coïncide avec le signe de $g_{j_0}{}^h$ pourvu que $g_{j_0}{}^h\neq 0$.

Si on fait $y=g^{-1}$, il vient $p=e$,

$$(2.3)'\qquad dL(g^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial g_{j_0}{}^h}\right)=\sum_{i(\neq j_0)}(q_h{}^i-\sigma_{j_0}{}^h q^i{}_{i_0(g,j_0)})\frac{\partial}{\partial e_{j_0}{}^i}$$

$$(q=g^{-1},h\neq i_0(g,j_0),\ L(g^{-1})U_{(g,j_0,\sigma)}\subset U_{(e,j_0,\varepsilon)}),$$

$$\sigma\leq\text{mini}\left(\frac{\varepsilon}{2c(g)},\ |g_{j_0}{}^i|\neq 0,\ \varepsilon\leq 1\right)$$

où $\sigma_{j_0}{}^h$ est le signe de la coordonnée locale $\zeta_{j_0}{}^h\neq 0$ d'un point γ_{j_0} pris arbitrairêment dans $\mathfrak{C}(g_{j_0},\varepsilon)$. Cela coïncide avec le signe de $g_{j_0}{}^h$ pourvu que $g_{j_0}{}^h\neq 0$.

$$(2.4)\qquad d(D)(g)\frac{\partial}{\partial y_{j_s}{}^i}=\sum_{h_u(i_0(p,h_u)\neq i)}g_{h_u}{}^{j_s}\frac{\partial}{\partial p_{h_u}{}^i}$$

$$-\sum_{h_u(i_0(p,h_u)\neq i_0(y,i_s))}\sigma_{j_s}{}^i g_{h_u}{}^{j_s}\frac{\partial}{\partial p_{h_u}{}^{i_0(y,j_s)}}$$

$$(i\neq i_0(y,i_s)),yg=p,\qquad D(g)\mathfrak{U}(y,\sigma)\subset\mathfrak{U}_{(p,\varepsilon)},$$

où $\sigma_{j_s}{}^i$ est le signe de la coordonnée $\eta_{j_s}{}^i$ d'un élément pris arbitrairement dans $\mathfrak{S}(y_{j_s},\sigma)$. Cela coïcide avec le signe de $y_{j_s}{}^i$ pourvu que $y_{j_s}{}^i\neq 0$.

Si on fait $g=y^{-1}$, il vient

$$(2.4)'\qquad dD(y^{-1})\frac{\partial}{\partial y_{j_s}{}^i}=\sum_{h_u(\neq i)}z_{h_u}{}^{j_s}\frac{\partial}{\partial e_{h_u}{}^i}$$

$$-\sum_{h_u(\ i_0(y,j_s))}\sigma_{j_s}{}^i z_{h_u}{}^{j_s}\frac{\partial}{\partial e_{h_u}{}^{i_0(y,j_s)}}\qquad(z=y^{-1})$$

$$(i\neq i_0(y,j_s),\ D(y^{-1})\cdot_{(y,\sigma)}\subset\cdot_{(,\varepsilon)}$$

où $\sigma_{j_s}{}^i$ est le signe de la coordonnée $\eta_{j_s}{}^i$ d'un élément pris arbitrairement dans $\mathfrak{C}(y_{j_s},\sigma)$. Cela coïncide avec le signe de $y_{j_s}{}^i$ pourvu que $y_{j_s}{}^i\neq 0$.

3. Variété différentiable

Envisageons une variéte M admettant un atlas $\mathcal{A}$ de son recouvrement ouvert $((U_\alpha)\ (\alpha\in\mathfrak{a}))$ à S, c'est-à-dire, l'ensemble des homéomorphismes φ_α, qui se nomment les cartes locales, de chaque U_α sur une partie ouverte de S. Prenons un point $x_0\in M$. Il existe un U_α contenant x_0. Soient

$$\sigma_0=\varphi_{U_\alpha}x_0,\ S(\sigma_0)=A_h\vee A_{i_1}\vee\cdots\vee A_{i_m}\quad(h<i_1<\cdots<i_m).$$

et T_h la transformation projective normale qui permute A_h avec A_ι, $U_{hi\cdots j}$ avec $U_{\iota i\cdots j}$ et qui lasse invariant les autres sommets ainsi que les autres points d'unité du repère $\mathfrak{A}$. En posant $u_0=T_h\sigma_0=T_h\varphi_{U_\alpha}x_0$, on obtient

$$S(u_0)=A_\iota\vee A_{i_1}\vee\cdots\vee A_{i_m}.$$

On peut prendre un cube $\mathfrak{C}(\sigma_0,\lambda)$ contenu dans $\varphi_{U_\alpha}(U_\alpha)$. La transformation T_h l'applique sur le cube $\mathfrak{C}(u_0,\lambda)$ contenu dans $\mathfrak{C}_\iota=\mathfrak{C}(A_\iota,1)$ ([1], p. 8). Nous appelons

$$V_{x_0}=(\varphi_{U_\alpha})^{-1}\mathfrak{C}(\sigma_0,\lambda)=(T_h\varphi_{U_\alpha})^{-1}\mathfrak{C}(u_0,\lambda)$$

le voisinage cubique de x_0. Prenons un point $x\in T_{x_0}$. Soient (u^i) les coordonnées normales du point $T_h\varphi_{U_\alpha}x_0$. On a $u^\iota>0$ d'après la convention mentionnée plus haut. On prend les $u^i(i\in I'\equiv I-\{\iota\}$ comme coordonnées locales du point x_0.

Si l'atlas $\mathscr{A}$ ne contient qu'un élément la variété M coïncide avec S. En laissant à coté ce cas trivial, considérons une couple des cartes locales φ_{U_α} et φ_{U_β} dont les domaines se coupent. Soient $x_0\in(U_\alpha\cap U_\beta)$,

$$\begin{aligned}
&\sigma_0=\varphi_{U_\alpha}x_0,\quad S(\sigma_0)=A_h\vee A_{i_1}\vee\cdots\vee A_{i_m}\quad(h<i_1<\cdots<i_m),\\
&\tau_0=\varphi_{U_\beta}x_0,\quad S(\tau_0)=A_k\vee A_{j_1}\vee\cdots\vee A_{j_n}\quad(k<j_1<\cdots<j_n),\\
&\mathfrak{C}(\sigma_0,\lambda)\subset\varphi_{U_\alpha}(U_\alpha\cap U_\beta),\qquad \mathfrak{C}(\tau_0,\mu)\subset\varphi_{U_\beta}(U_\alpha\cap U_\beta),\\
&T_h\mathfrak{C}(\sigma_0,\lambda)=\mathfrak{C}(u_0,\lambda)\subset\mathfrak{C}_\iota,\qquad (u_0=T_h\sigma_0=T_h\varphi_{U_\alpha}x_0),\\
&T_k\mathfrak{C}(\tau_0,\mu)=\mathfrak{C}(\tau_0,\mu)\subset\mathfrak{C}_\iota,\qquad (v_0=T_k\mu_0=T_k\varphi_{U_\beta}x_0).
\end{aligned}$$

On prend comme voisinage cubique V_{x_0} de x_0 l'intersection

$$V_{x_0}=(\varphi_{U_\alpha})^{-1}\mathfrak{C}(\sigma_0,\lambda)\cap(\varphi_{U_\beta})^{-1}\mathfrak{C}(\sigma_0,\mu).$$

Posons

$$\Omega_{\alpha,\beta}=T_h\varphi_{U_\alpha}V_{x_0},\qquad \Omega_{\beta,\alpha}=T_k\varphi_{U_\beta}V_{x_0}.$$

Ces deux domaines sont homéomorphes l'un sur l'autre. Les deux systèmes de coor données locales $((u^i)$ $(i\in I', u\in\Omega_{\alpha,\beta}))$ et (v^j) $(j\in I', v\in\Omega_{\beta,\alpha}))$ se relient au moyen d'équtions de la forme

$$v^j(x)=P^j(\cdots,u^i(x),\cdots),\qquad u^i(x)=Q^i(\cdots,v^j(x),\cdots)\quad(i,j\in I')\tag{3.1}$$

provénant de

$$v=T_k\varphi_{U_\beta}(T_h\varphi_{U_\alpha})^{-1}u,\qquad u=T_h\varphi_{U_\alpha}(T_k\varphi_{U_\beta})^{-1}v.\tag{3.2}$$

Un point $u\in\Omega_{\alpha,\beta}$ une fois fixé, on a $u^i=0$ sauf pour un nombre fini des indices $i\in I'$ et aussi $P^j=0$ sauf nombre fini des indices $j\in I'$. De même, un point $v\in\Omega_{\beta,\alpha}$ une fois fixé, on a $v^j=0$ sauf pour un nombre fini des indices $j\in I'$ et aussi $Q^i=0$ sauf pour un nombre fini des indices $i\in I'$. En tenant compte de (3. 2,) on tire

$$\begin{cases}v^i\equiv P^j(\cdots,Q^i,\cdots,v^j,\cdots),\cdots),\\ u^i\equiv Q^i(\cdots,P^j(\cdots,u^i,\cdots),\cdots).\end{cases}\tag{3.3}$$

Prenons maintenant un point $u\in\Omega_{\alpha,\beta}$. Soit $v\in\Omega_{\beta,\alpha}$ le point correspondant à u d'après

(3. 2). Pour un cube projective $\mathfrak{C}(v, \varepsilon)$ de largeur ε arbitrairement donné, il existe, dans $\Omega_{\alpha,\beta}$ un cube projective $\mathfrak{C}(u, \sigma)$ satisfaisant à la condition que

$$T_k\varphi_{U\beta}(T_k\varphi_{U\alpha})^{-}\mathfrak{C}(u,\sigma)\subset\mathfrak{C}(v, \varepsilon)\cap\Omega_{\beta,\alpha}$$

Prenons, dans $\mathfrak{C}(u,\sigma)$, un point u_1 dont les coordonnées locales ne diffèrent de celles de u que pour un seul indice i_1. Le point $\xi(t)=tu_1+(1-t)u$ $(0\leq t\leq 1)$ décrit un sgment dans $\mathfrak{C}(u,\sigma)$ car, $u_1{}^i$ étant de même signe que u^i pourvu que $u^i\neq 0$, on a $\Sigma_s|\xi^s(t)|\leq t\Sigma_s|u_1{}^s|+(1-t)\Sigma_s|u^s|=t+1-t=1$, et on a de plus $|\xi^i(t)-u^i|<t|u_1{}^i-u^i|<\tau$. Le point $\eta(t)=T_k\varphi_{U\beta}(T_k\varphi_{U\alpha})^{-1}\xi(t)$ engendre donc un arc dans $\mathfrak{C}(v, \varepsilon)\cap\Omega_{\beta,\alpha}$. Si les fonctins $\eta^j(t)$ $(j\in I')$ sont continûment difféerentiables dans $(0\leq t\leq 1)$ et que la borne inférieur ρ des valeurs absolues des $v^{j'}=\eta^{j'}(0)$ $(j\in I')$ soit positive à moins que les $v^{j'}=\eta^{j'}(0)$ $(j\in I')$ ne soient tous nul, cet arc est dit régilier au point $v(x)$. Cela équivant à dire que

$$P_{i_1}{}^j(u^i)=0 \qquad \left(P_{i_1}{}^j=\frac{\partial P^j}{\partial u_1{}^i}\right) \quad (j, i_1\in I')$$

sauf pour un nombre fini des indices j ([1], p. 10).

De même, en prenant d'abord $\eta(t)=tv_1+)1-t)\, v$ $(v_1{}^{j_1}\neq v^j,\, v_1{}^j=v^j(j\neq j_1))$ et en posant $\xi(t)=T_k\varphi_{U\alpha}(T_k\varphi_{U\beta})^{-1}\eta(t)$, on définit la régularité de l'arc $\xi(t)$ au point $u(x)$.

Lorsque ces deux régulerités sont vérifiées pour tout point $x\in V_{x_0}$ indépendamment de choix des indices i, et j_1 fixés à l'avance et aussi de choix du point $x_0\in U_\alpha\cap U_\beta$, on dit que les carte locales φ_U et φ_U se relient différentiablement. Si cela arrive, comme nous le supposerons désormais, pour toute couple de cartes locales dont les domainnes se coupent, la variété M est dite différentiable. Ainsi la variété différentiable est caractérisée par la condition que, le point x ainsi que les indices h et $x\in I'$ une fois fixés, on a

$$(3.3) \qquad P_k{}^j\left(\equiv\frac{\partial P^j}{\partial u^h}\right)=0, \quad Q_k{}^i\left(\equiv\frac{\partial Q^i}{\partial v^h}\right)=0$$

sauf pour un nombre fini respectivement des indices j et des indices i. On a alors, en vertu de (3.2), ([3], p. 9; [4] p. 13)

$$(3.4) \qquad \delta_j{}^i=\sum_s P_s{}^jQ_i{}^s=\sum_s Q_s{}^jP_i{}^s$$

ce qui nous montre que pour un indice quelconque $i\in I'$ il existe au moins un indice h tel que $Q_i{}^h\neq 0$ et au moins un indice k tel que $P_i{}^k\neq 0$. On a donc

$$(3.5) \qquad P_k\equiv\sum_m |P_k{}^m|>0, \quad Q_k\equiv\sum_m |Q_k{}^m|>0.$$

4. Atlas complet

La carte locale φ_U d'une partie ouverte de M sur celle de $\boldsymbol{S}$ est dite admissible â l'atlas $\mathscr{A}$, si elle est différentiablement reliée avec toute carte locale de $\mathscr{A}$ dont le domaine intersecte U. L'ensemble somme de $\mathscr{A}$ et $\{\varphi_U\}$ devient encore un atlas par lequel la variété M est différentiable. Plus généralement, il en est de même pour l'ensemble somme de $\mathscr{A}$ et des cartes locales admissible à $\mathscr{A}$ de nombre fini, car les deux cartes locales admissibles dont les domaines se coupent se relient différentiblement. En effet, soient φ_U et φ_V deux telles cartes admissibles. Prenons un point $x_0 \in \varphi_U \cap \varphi_V$. Il existe une carte locale φ_{U_γ} de $\mathscr{A}$ telle que $x_0 \in U_\gamma$. Considérons un voisinage cubique V_{x_0} de x_0 tel que

$$
\begin{aligned}
& V_{x_0} = \varphi_{U_\gamma}{}^{-1}\mathfrak{C}(\rho_0, \nu) \cap \varphi_U{}^{-1}\mathfrak{C}(\sigma_0, \lambda) \cap \varphi_V{}^{-1}\mathfrak{C}(c_6, \mu), \\
& T_l \mathfrak{C}(\rho_0. \nu) = \mathfrak{C}(w_0, \nu) \subset \mathfrak{C}_\iota \quad (w_0 = T_l \rho_6 = T_l \varphi_{U_\gamma} x_0), \\
& T_h \mathfrak{C}(\sigma_0, \lambda) = \mathfrak{C}(u_0, \lambda) \subset \mathfrak{C}_\iota \quad (u_0 = T_h \sigma_0 = T_h \varphi_U x_0), \\
& T_k \mathfrak{C}(\tau_0, \mu) = \mathfrak{C}(v_0, \mu) \subset \mathfrak{C}_\iota \quad (v_0 = T_k \tau_0 = T_k \varphi_V x_0), \\
& \Omega_{\gamma, \alpha, \beta} = T_l \varphi_{U_\gamma} V_{x_0}, \qquad \Omega_{\alpha, \beta, \gamma} = T_h \varphi_U V_{x_0}, \qquad \Omega_{\beta, \alpha, \gamma} = T_k \psi_V x_0, \\
& u^i = A^i(\cdots, w^m, \cdots), \qquad w^m = B^m(\cdots, w^i, \cdots), \\
& v^j = E^j(\cdots, w^m, \cdots), \qquad w^m = F^m(\cdots, v^j, \cdots).
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
& v^j = E^j(\cdots, B^m(\cdots, u^i, \cdots), \cdots) \equiv P^j(\cdots, u^i, \cdots), \\
& u^i = A^i(\cdots, F^m(\cdots, v^j, \cdots), \cdots) \equiv Q^i(\cdots, v^j, \cdots).
\end{aligned}
$$

Comme les cartes locales φ_U et φ_V sont admissible à $\mathscr{A}$ les indices l_1, h_1, l_2, k_1 une fois fixés, on a

$$
\frac{\partial A^i}{\partial w^{l_1}} = 0, \quad \frac{\partial B^m}{\partial u^{h_1}} = 0, \quad \frac{\partial E^j}{\partial w^{l_2}} = 0, \quad \frac{\partial F^{m'}}{\partial v^{k_1}} = 0
$$

sauf pour un nombre fini respectivement des indices i, m, j et m'. On en tire

$$
\frac{\partial F^j}{\partial u^{h_1}} = \sum_s \frac{\partial E^j}{\partial w^s} \frac{\partial B^s}{\partial u^{h_1}} = 0, \quad \frac{\partial Q^i}{\partial v^{k_1}} = \sum_t \frac{\partial A^i}{\partial w^t} \frac{\partial F^t}{\partial v^{k_1}} = 0.
$$

sauf pour un nombre fini respectivement des indices j et i ce qui nous montre que φ_U et φ_V se relient différentiablement, *L'ensemble* $\mathfrak{S}$ *des atlas ainsi obtenus, ordonné par inclusion, possède un élément maximal.* Pour le prouver il suffit de vérifier que pour tout sous-ensemble $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{S}$ totalement ordonné par inclusion, la réunion V des ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{S}$. Or, deux cartes locales admissibles contenus dans V appartiennent respectivement aux deux atlas de $\mathfrak{S}$ dont l'une renferme l'autre, et par suite, elles appartiennent à un même atlas. Elles se rellient donc diffrentiablement, comme nous venons de le remarquer, pourvu que leurs domaines se coupent. Cela revient à dire que V appartient à $\mathfrak{S}$.

L'élément maximal de $\mathfrak{S}$ dont existence est ainsi démontrée se nomme l'atras complet. Il renferme toute carte locale qui lui est admissible. Nous supposerons dorénavant que l'atras $\mathscr{A}$ lui-même est complet.

5. Variété connexe et différentiable

Prenons un point $x_0 \in M$ et une carte locale $\varphi_{U_\alpha} \subset \mathscr{A}$ dont le domaine U_α contient

x_0. Soient

$$x_0 \in V_{x_0} = (T_h \varphi_{U\alpha})^{-1} \mathfrak{C}(u_0, \lambda), \quad u = T_h \varphi_{U\alpha} x.$$

Posons

$$\xi(t) = (1-t)u_0 + tu \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Comme $u^\alpha (\alpha \in I)$ est de même signe que $u_0{}^\alpha$ pourvu que $u_0{}^\alpha \neq 0$, on a

$$\sum_\alpha |\xi^\alpha| = (1-t) \sum_\alpha |u_0{}^\alpha| + t \sum_\alpha |u_\alpha| = 1,$$

$$|\xi^\alpha - u_0{}^\alpha| \leq |u^\alpha - u_0{}^\alpha| < \lambda$$

de sorte que le point $(T_h \varphi_{U\alpha})^{-1} \xi(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ décrit un arc dans Vx_0, $\xi^i(t)$ $(i \in I' = I - \{\iota\})$ étant ses coordonnées locales. De plus on a

$$\frac{d\xi^i}{dt} = u^i - u_0{}^i$$

ce qui nous montre que les dérivées $d\xi^i/dt$ $(i \in I')$ s'annulent sauf pour un nombre fini des des indices i. En général, étant donné, sur M, un chemin $x(t)$ $(0 \leq t \leq)$ homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$, on dit qu'il est régulier si pour chaque valeur $k \in [0, 1]$ la borne inférieur de

$$\left| \frac{du^i}{dt} \right|_k \neq 0 \quad (i \in I', \ u = T_h \varphi_{U\alpha} x(t); \ x(k) \in U_\alpha)$$

est positive à moins que les dérivées $(du^i/dt)_k$ $(i \in I')$ ne soient tous nuls. Cela est une propriété indépendant du choix de la carte locale $\varphi_{U\alpha}$ dont le domaine contient $x(k)$ et équivaut, comme nous l'avons remarqué plus haut, à dire que les dérivées $(du^i/dt)_k$ $(i \in I')$ s'annullent sauf pour un nombre fini des indices i. Ce que nons venons de remarqué c'est donc que *tout point* $x \in V_{x_0}$ *peut être relié* a x_0 *par un arc régulier dans* V_{x_0}. Maintenant soit X l'ensemble des points x de M qu'on peut joindre à x_0 par un arc régulier par morceaux dans M. Comme cet ensemble contient V_{x_0}, il n'est pas vide. Prenons un point x de X. On peut joindre par un arc régulier par morceaux un point arbitaiirre y du voisinage cubique V_x à x et celui-ci à x_0. On a donc $V_x \subset X$. Cela revient à dire que X est ouvert. Soit eniuite x un point de $\overline{X}$. Le voisinage cubique V_x inersecte X en un point z. On peut joindre par un arc régulier par morceaux le point x à z et celui-ci à x_0. On a donc $\overline{X} \subset X'$: X est fermé. *Donc, si la variété M est connexe et diffrentiable,* comme nous le supposerons désormais, *elle est forcément connexe par arc régulier par morceaux.*

6. Espace vectoriel tangent

Pour la transformation projective normale T qui laisse invariant le cube projectif $\mathfrak{C}_\iota = \mathfrak{C}(A_\iota, 1)$, on a

$$p_\iota{}^\iota = 1, \ p_l{}^\iota = 0, \ p_\iota{}^l = 0 \quad (l \in I' \equiv I - \{\iota\})$$

de sorte que son équation s'ecrit

$$z'^i = \sum_j p_j{}^i z^j \left(i, j \in I^1, z^i = \frac{x^i}{x^\iota}; \sum_i |p_j{}^i| = 1; p_j{}^{i_0(p,j)} > 0 \right).$$

L'ensemble G_ι de telles transformations forme un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. La topologie de $\mathfrak{G}$ induite sur G_ι. Le groupe topologique ainsi obtenu opère sur $\mathfrak{E}_\iota$ comme un automorghisme ([2], p. 8).

On définit, dans $\mathfrak{E}_\iota$, un vecteur comme une classe d'équivalence entre les couples de deux points. Chaque vecteur peut être représenté par un couple de la forme $(A_\iota(1, 0), P(1, z^i))$ de sorte qu'il s'écrit $\boldsymbol{u}(z)$. L'espace de ces vecteurs se note Y_ι. Le vecteur $(A_\iota, U_{\iota k})$ se note $\boldsymbol{e}_k$. On a ([3], p. 4)

$$\boldsymbol{u}(z) = \sum_s z^s \boldsymbol{e}_{s\varepsilon}.$$

Cela posé, considérons une fonction $f(x)$ définie dans une partie ouverte U de M. Prenons un point $x_0 \in U$. Soient V_{x_0} un voisinage cubique contenu dans $U \cap U_\alpha$:

$$V_{x_0} = (\varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda), \quad \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) \subset \varphi_{U_\alpha}(U \cap U_\alpha),$$

$$\sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} x_0, \quad T_k \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) = \mathfrak{E}(u_0, \lambda), \quad u_0 = T_k \sigma_0.$$

Il existe la fonction $f^*(\cdots, u^i, \cdots)$ définie dans $T_k \varphi_{U_\alpha} V_{x_0}$ telle que

$$f(x) = f^*(\cdots, u^i(x), \cdots) \quad (x \in V_{x_0}, \ u(x) = T_k \varphi_{U_\alpha} x).$$

Lorsque cette fonction f^* est différentiable dans $T_k \varphi_{U_\alpha} T x_0$, la fonction $f(x)$ est dite différentiable en point x_0. Si cela arrive pour tout point $x_0 \subset U$, elle set dite différentiable dans U.

Envisageons ensuite une famlle $[f]$ des fonctions différentiables en point x_0. Prenons une fonction $f \in [f]$. Désignons par

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i \in I')$$

l'application qui fait correspondre le nombre réel

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial u^i} \right)_{u(x)} \quad (x \in V_{x_0})$$

au couple (x, f). L'ensemble $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) \quad (i \in I') \right)$ engendre un espace vectoriel qu'on appelle l'espace tangent à M en point x ([1], pp. 11, 12, 13). Maintenant soit $x_0 \in (U_\alpha \cap U_\beta)$ et V_{x_0} un voisinage qui se trouve dans $(U_\alpha \cap U_\beta)$. Il existe alors la fonction $f^{**}(\cdots, v^j, \cdots)$ définie dans $T_k \varphi_{U_\beta} x_0$ telle que

$$f(x) = f^{**}(\cdots, v^j(x), \cdots) \quad (x \in V_{x_0}, \ u(x) = T_k \varphi_{U_\beta} x),$$

D'autre part

$$f(x) = f^*(\cdots, u^i(x), \cdots) = f^*(\cdots, Q^i(\cdots, v^j(x), \cdots), \cdots).$$

On a donc

$$f^{**}(\cdots, v^i, \cdots) = f^*(\cdots, Q^i(\cdots, v^i, \cdots), \cdots),$$

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial v^j} = \sum_s \frac{\partial f^i}{\partial u^s} Q_j{}^s$$

d'où ([1], p. 13)

$$\frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_s Q_j{}^s \frac{\partial}{\partial u^s}. \tag{6.1}$$

De même on déduit

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_t P_i{}^t \frac{\partial}{\partial v^t}. \tag{6.2}$$

Soint $\chi_{\alpha, x}$ et $\chi_{\beta, x}$ les bijections $Y_\iota \to T_x$ qui font correspondre au vecteur $\sum_s z^s e_s$ respectivement les vecteurs tangents

$$\sum_s \frac{z^s}{\varepsilon_s P_s} \frac{\partial}{\partial u^s} \quad \text{et} \quad \sum_s z^s \frac{\partial}{\partial v^s} \quad (P_s = \sum_s |P_s{}^m|),$$

où ε_s est le signe de l'élément $P_s{}^{i_0(P,s)}$, $i_0(P, s)$ étant l'indice le plus petit des indices i tels que $P_s{}^i \neq 0$.

La composé $g_{\beta, \alpha} = \chi_{\beta, x}{}^{-1} \chi_{\alpha, x}$ opère sur Y_ι comme un atuomorphisme qui s'exprime, grâce à (6.2), par

$$z'^i = \sum_j p_j{}^i z^j \quad (i, j \in I'), \tag{6.3}$$

où

$$p_j{}^i = \frac{P_j{}^i}{\varepsilon_j P_j}. \tag{6.4}$$

En effet, si l'automorphisme $g_{\beta, \alpha}$ applique $\boldsymbol{a}(z)$ sur $\boldsymbol{b}(z')$, on a $\chi_{\alpha, x}\boldsymbol{a}(z) = \chi_{\beta, x}\boldsymbol{b}(z')$. Or,

$$\chi_{\alpha, x}\boldsymbol{a}(z) = \sum_s \frac{z^s}{\varepsilon_s P_s} \frac{\partial}{\partial u^s} = \sum_s \frac{z^s}{\varepsilon_s P_s} \sum_s P_s{}^t \frac{\partial}{\partial vt} = \sum_t \left(\sum_s \frac{z^s P_s{}^t}{\varepsilon_s P_s} \right) \frac{\partial}{\partial v^t}$$

$$= \chi_{\beta, x}(\boldsymbol{b}z') = \sum_t z'^t \frac{\partial}{\partial v^t}.$$

De là, il suit

$$z'^t = \sum_s \frac{P_s{}^t}{\varepsilon_s P_s} z^s.$$

On a de plus

$$P_j{}^{i_0(P,j)} = \frac{P_j{}^{i_0(P,j)}}{\varepsilon_j P_j} > 0, \qquad \sum |p_j{}^i| = \frac{\sum_m |P_j{}^m|}{P_j} = 1$$

ce qui nous montre que l'équation (6.3) définit une transformation appartenant à G_ι.

Mais les z^i sont originairement les coordonnées du point $x \in \mathfrak{C}_\iota$ tel que $x' = 1$. Donc, l'automorplıysime $g_{\beta\alpha}$ cïoncide avec l'élément de G_ι qui applique, sur G_ι, le point z sur le point z!

D'après la définition même de $g_{\beta\alpha}$ on a

$$(g_{\beta\alpha})^{-1} = (\chi_{\beta,x}{}^{-1}\chi_{\alpha,x})^{-1} = (\chi_{\alpha,x})^{-1}\chi_{\beta,x} = g_{\alpha\beta}.$$

De même, lorsque

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

on a

(6.5) $$g_{\gamma\alpha}(x) = g_{\gamma\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x).$$

L'inverse $q_k{}^h$ de $p_k{}^h$ s'érit

(6.5) $$q_k{}^h = \varepsilon_k P_k Q_k{}^h,$$

car on a

$$\sum_s q_s{}^m p_n{}^s = \sum_s \frac{\varepsilon_m P_m}{\varepsilon_n P_n} Q_s{}^m P_n{}^s = \frac{\varepsilon_m P_m}{\varepsilon_n P_n} \delta_n{}^m = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n), \end{cases}$$

$$\sum_s p_s{}^m q_n{}^s = \sum_s \frac{\varepsilon_s P_s}{\varepsilon_s P_s} P_s{}^m Q_n{}^s = \sum_s P_s{}^m Q_n{}^s = \delta_n{}^m$$

de sorte que l'équation (6.3) équivant à

(6.7) $$z^k = q_s{}^t z'^s.$$

7. Variété deux fois différentiable

Comme nous l'avons remarqué plus haut, deux points quelconques de M peut être reliés par un arc régulier par morceaux. En tous cas, considérons sur M un chemin $x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ régulier par morceaux. Soit $x_c(t)$ $(0 \leq t_c \leq t_{c+1} \leq 1)$ un morceau régulier de $x(t)$ et x_ν un point de ce morceau. Prenons deux cartes locales de $\mathcal{A}$ dont les domaines $U_{\alpha(\nu)}$ et $U_{\beta(\nu)}$ passent par x_ν. Chaque morceau $x_c(t)$ étant compact, l'ensemble des voisinages cubiques $V_{x_\nu} \subset U_{\alpha(\nu)}$ $(\nu \in [t_c, t_{c+1}])$ forme un recourement ouvert de $x_c(t)$ d'où on peut extraire un recouvrement fini. Il n'est pas empêché d'y ajouter $V_{x_c} \subset (U_{\alpha(c)} \cap U_{\beta(c)})$. On obtiient ainsi une subdivision de $x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ en parties réguliers de nombre fini dont chacune $x_a(t)$ $(0 \leq t_a \leq t_{a+1} \leq 1)$ est content dans $V_{x(t_a)} \subset (U_{\alpha(a)} \cap U_{\beta(a)})$.

Supposons mainttenant que les fonctions $P_k{}^j(\cdots, u^i, \cdots)$ sont continûment différentiable dans $\Omega_{\alpha\beta}$. En portant $(u^i(x_a(t)))$ $(t_a \leq t \leq t_{a+1})$ dans (6.4) on obtient un chemin $P_a(t)$ sur G_ι. Le chemin $x_a(t)$ $(t_a \leq t \leq t_{a+1})$ étant régulier, la valeur de $t \in [t_a, t_{a+1}]$ une fois fixé, on a $u'^i(t) = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i. On peut donc écrire

$$((p_c)_k{}^j)'(t) = \frac{d((p_a)_k{}^j)}{dt} = \sum_i ((p_a)_k{}^j)_i \, u'^i(t),$$

où

$$(7.1)\qquad ((p_a)_k{}^j)_i=\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{P_k{}^j}{\varepsilon_k P_k}\right)=\frac{1}{\varepsilon_k P_k}\left(\frac{\partial^2 P^j}{\partial u^k \partial u^i}-\frac{P_k{}^j}{P_k}\frac{\partial P_k}{\partial u^i}\right).$$

On dit le chemin $p_a(t)$ $(t_a \leq t \leq t_{a+1})$ régulier si, l'indice k ainsi que la valeur de $t \in [t_a, t_{a+1}]$ une fois fixés, la borne inférieur de

$$|((p_a)_k{}^j)'(t))| \neq 0$$

est positive à moins que tous les $((p_a)_k{}^j)'(t)$ ne s'annulent. Cela équivaut à dire que, l'indice k ainsi que la valeur de $t \in [t_a, t_{a+1}]$ une fois fixés, les dérivées $((p_a)_k{}^j)'(t)$ s'annullent sauf pour un nombre fini des indices j ([6], p. 10).

Lorsque cette régularité est vérifiée pour toute partie régulière $p_a(t)$ indépendamment du choix de chemin $x(t)$ régulier par morceaux et du choix de cartes locales φ_{U_α} et φ_{U_β} telles que $x(t_a) \in U_{\alpha(a)} \cap U_{\beta(a)}$, la vriété M est dite deux fois différentiable. Nous nous en occuperons d'ore et déjâ exclussivement. Pour cela, il faut et il suffit, grâce â (7.1), que le point x ainsi que les indices s, t, h et k une fois fixés, non seulement les dérivées du premier ordre

$$P_s{}^j=\frac{\partial P^j}{\partial u^s},\qquad Q_t{}^k=\frac{\partial Q^j}{\partial v^t}$$

mais aussi celles du second ordre

$$\frac{\partial^2 P^j}{\partial u^h \partial u^t}$$

s'annullent sauf pour un nombre fini des indices j.

Supposons maintenant que les $Q_h{}^i$ sont continûment différentiables dans $\Omega_{\beta,\alpha}$ On a alors, grâce à (3.4),

$$\frac{\partial^2 Q^i}{\partial v^h \partial v^k}=-\sum_{r,s,t}\frac{\partial^2 P^r}{\partial u^s \partial u^t}Q_r{}^i Q_h{}^s Q_h{}^t.$$

ce qui nous montre que, le point ainsi que les indices h et h une fois fixés, les dérivées

$$\frac{\partial^2 Q^i}{\partial v^h \partial v^k}$$

aussi s'annulent sauf pour un nombre des indices i. Par conséquent le chemin $q_a(v^j(t))$ $(t_a \leq t \leq t_{a+1})$ est aussi continûment différentiable et régulier.

Cela posé, en prenant un point $y_0=((y_0)_j{}^i) \in G_\iota$ posons d'abord

$$\eta(t)=\iota(p_a(t))y_0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Soit

$$(7.2)\qquad y_1=L(g_{\alpha(1),\alpha(0)}(t_1))y_0.$$

Posons ensuite

$$\eta(t)=L(p_1(t))y_1 \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

et ainsi de suite. On fait en général

(7.3) $\eta(t)=Lp_a(t)y_a \quad (t_a\leq t\leq t_{a+1}),$

(7.4) $y_a=L(g_{\alpha(a),\alpha(a-1)}(t_a))y_{a-1}.$

Maintenant en associant à y_a un voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{(y_a,\varepsilon)}=U_{(y_a,j_1(a),\varepsilon)}\cap\cdots\cap U_{(y_a,j_b(a),\varepsilon)}$$
$$(\varepsilon<\text{mini.}(|y_a)_{j_s(a)}{}^i|\neq 0 \quad (s=1,\cdots,b))$$

associons à chaque valeur $k\in[t_a, t_{a+1}]$ non seulement le point $\eta(k)$ mais aussi le voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{(\eta(k)},\tau)=U_{(\eta(k),j_1(a)},\tau)\cap\cdots\cap U_{(\eta k),j_b(a)},\tau)$$
$$(\tau<\text{mini.}(|\eta_{j_s(a)}|\neq 0 \quad (s=1,\cdots,b))$$

On démontre qu'on peut prendre comme vecteur tangent au chemin $\eta(t)$ $(t_a\leq t\leq t_{a+1})$ en point $\eta(k)$ un vecteur tangent à G_ι en ce point qui engendre, sur G_ι, un champ de vecteur muni de coordonnées

(7.5) $$\rho(k)=\sum_{js}\sum_{i(\neq js)}|\rho_{j_s}{}^i(k)|\frac{\partial}{\partial e_{j_s}}$$

dont les coefficient $\rho_j{}^i$ satisfont à la condition mentionnée au 2°, à savoir, $\rho=0$ pour $j\in\{j_1(a),\cdots,j_b(a)\}$ et aussi pour chaque j_s sauf pour un nombre fini des indices $i(\neq j_s)$ et de plus â la conditions que

(7.6) $$\sum_{js}\sum_{i(\ \ js)}|\rho_{j_s}{}^i(t)|<\kappa_a,$$

où κ_a est un nombre positif qui peut être autant petit qu'on veut ([16], p. 11).

8. Espace fibré principal

En prenant les $g_{\beta\alpha}$ défini au n° 2 comme les fonctins de transition, considérons l'espace fibré principal (M, G_ι) dont un exemple est l'ensemble des classes d'équivalence q définis par

$$q(x,y,\alpha)=q(x,g_{\beta,\alpha}y,\beta)$$

dans l'ensemble des triplets

$$((x,y,\alpha) \quad (x\in U_\alpha\subset M, y\in G_\iota), \alpha\in\mathfrak{a}))$$

qui est une partie ouverte du produit $M\times G_\iota\times\mathfrak{a}$ (muni de la topologie discrête) ([9], p. 14).

La surjection $p: B\rightarrow M$ est définie par

$$p\cdot q(x,y,\alpha)=x \quad (x\in U_\alpha, y\in G_\iota)$$

tandis que l'homéomorphisme local $\varphi_\alpha: U_\alpha\times G_\iota\rightarrow p^{-1}U_\alpha$ $(\alpha\in\mathfrak{a})$ est défini par

$$\varphi_\alpha(x,y)=q(x,y,\alpha).$$

Maintenant, étant donné un point $x\in(U_\alpha\cap U_\beta)$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,x}(y)&=\varphi_\alpha(x,y)=q(x,y,\alpha)\\&=q(x,g_{\beta\alpha}(x)y,\beta)=\varphi_\beta(x,y_{\beta\alpha}(x)y)=\varphi_{\beta,x}(g_{\beta\alpha}(x)y),\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\varphi_{\beta,\alpha}{}^{-1}\varphi_{\alpha,x}y=g_{\beta\alpha}(x)y. \tag{8.1}$$

Dautre part, comme nous l'avons remarqué au n°6, la translation à gauche associé au $p_0(t)$ $(0\leq t\leq t_1)$ coïncide avec l'opération $g_{\beta(0)\alpha(0)}$. Donc, d'après (8.1), l'opération $\varphi_{\beta(0)}$ applique le chemin $\eta(t)=L(p_0(t))(y)_0\subset G_t$ sur le chemin $b_0(t)\subset B$ défini par

$$\begin{aligned}b_0(t)&=\varphi_{\beta(0)}(x_0(t)\times L(p_0)(t)(y)_0\\&=\varphi_{\beta(0)}(x_0(t),g_{\beta(0)\alpha(0)}(y)_0)\\&=\varphi_{\alpha(0)}(x_0(t),(y)_0)\quad(0\leq t\leq t_1).\end{aligned}$$

De même, l'opération $\varphi_{\beta(1)}$ applique le chemin $y(t)=L(p_1)(t)(y)\subset G_t$ sur le chemin $b_1(t)$ $(t_1\leq t\leq t_2)$ défini par

$$b_1(t)=\varphi_{\beta(1)}(x_1(t),\eta(t))=\varphi_{\alpha(1)}(x_1(t),(y)_1)\quad(t_1\leq t\leq t_2)$$

et ainsi de suite. En vertu de (7.2), (7.4) on a

$$b_0(t_1)=b_1(t_1),\quad b_{a-1}(t_a)=b_a(t_a).$$

Nous obtenons ainsi, sur B, un chemin $b(t)$ $(0\leq t\leq 1)$ continu et différentiable par morceaux qui se trouve au dessus du chemin $x(t)\subset M$.

L'homéomorlhpisme $d\varphi_{\beta(0),x(t)}$ applique le vecteur tangent σ en point $\eta(k)$ $(k\in[t_a,t_{a+1}])$ sur le vecteur tangent θ au chemin $b_a(t)$ $(t_a\leq t\leq t_{a+1})$ en point $b_a(k)$ tandis que l'homéomorphisme $d(\varphi_{\alpha(0),x(t)})^{-1}$ applique θ sur un vecteur tangent à G_t en point $(y)_a$. Or, d'après (7.3), les vecteurs tangents σ et τ engendrent, sur B, le même champ de vecteurs. Nous voyons ainsi que l'homéomorphisme $d(\varphi_{\alpha(a),x(t)})^{-1}$ appli que le vecteur tangent â $b_a(t)$ en point $b_a(k)$ sur le vecteur tangent G_t en point $(y)_0$ génerateur du champ de vecteurs qui possède la coordonnée $\rho(k)$ définie par (7.5) où les coefficients $\rho_{j_s}(k)$ satisfont à la condition (7.6).

Tout chemin sur B au dessus de $x_a(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned}&\overline{b_a(t)}=D(\gamma(t))b_a(t)\equiv\varphi_{\alpha(a)}(x_a(t),r_a(t))\quad(t_a\leq t\leq t_{a+1})\\&(r_a(t)=D(\gamma_a(t)(y)_a=(y)_a\gamma_a(t),\quad \gamma_a(t)=g(t)^{-1}(G_t).\end{aligned}$$

Supposons que le chemin $g(t)$ ainsi que son inverse $\gamma_a(t)$ sont continûment différentiables et réguliers dans $[t_a,t_{a+1}]$. On démontre que la coordonnée du champ de vecteurs sur B engendré par $d(\varphi_{\alpha(a),x(t)})^{-1}\overline{\theta}$ est donnée par ([7] p. 13)

$$w(\bar\theta)=d(D)\gamma\Big(\sum_{j_s}\sum_{i(\neq i_0(q,j_s))}\Big(\sum_{r}g_{\cdot}{}^{i}\rho_{j_s}{}^{r}-g_{j_s}{}^{i}-\frac{\partial g_{j_s}{}^{i}}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial g_{j_s}{}^{i}}\Big) \tag{8.2}$$

où

$$(8.3)\qquad \rho_j{}^j=1-\sum_{i\neq j}|\rho_j{}^i|,\quad \rho_j{}^i=0\quad (i\neq j,\ \bar{j}\in\{j_1(a),\cdots,j_b(a)\}).$$

Lorsque $w(\bar{\theta})=0$, le chemin $\overline{b_a(t)}$ est dit horizontal.

9. Equation du chemin horizontal

Prenons maintenant le voisinage

$$U_{(\varrho,j_s,\varepsilon)}\ \left(\varepsilon<\frac{1}{4}\tau,\ \tau=\text{mini.}\,(|g_{j_s}{}^i|\neq 0)\right)$$

ainsi que les $\rho_{j_s}{}^i(u)$ mentionnés au n°7 de telle sorte que

$$\sum_{j_s}\sum_{i(\neq j_s)}\rho_{j_s}{}^i(u)<\chi_a\leq\varepsilon\quad (u\in[t_a,t_{a+1}]).$$

On a, grâce â (2.4),

$$(9.1)\qquad dD(\gamma)\left(\sum_{j_s}\sum_{i(\neq i_0(\varrho,j_s))}\left(\sum_l g_l{}^i\rho_{j_s}{}^l-g_{j_s}{}^i-\frac{dg_{j_s}{}^i}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial g_{j_s}{}^i}\right)$$

$$=\sum_{j_s}\sum_{i(\neq i_0)}\left(\sum_l g_l{}^i p_{j_s}{}^l-g_{j_s}{}^i-\frac{dg_{j_s}{}^i}{dt}\right)$$

$$\times\left(\sum_{hu(\neq i)}\gamma_{hu}{}^{j_s}\frac{\partial}{\partial c_{hu}{}^i}-\sum_{hu(\neq i_0)}\sigma_{j_s}{}^i\gamma_{hu}{}^{j_s}\frac{\partial}{\partial c_{hu}{}^{i_0}}\right)$$

Or, si on prend comme $\sigma_{j_s}{}^i$ le singe de $g_{j_s}{}^i$, il vient

$$(9.2)\qquad \sum_{i(\neq i_0(\varrho,j_s))}\sigma_{j_s}{}^i g_{j_s}{}^i=\sum_{i(\ i_0)}|g_{j_s}{}^i|=1-g_{j_s}{}^{i_0(\varrho,j_s)},$$

$$(9.3)\qquad \sum_{i(\neq i_0(\varrho,j_s))}\sigma_{j_s}{}^i\frac{dg_{j_s}{}^i}{dt}=-\frac{dg^{i_0(\varrho,j_s)}}{dt},$$

car

$$g_j{}^{i_0(\varrho,j_s)}>0.$$

Enfin, d'après (8.3), on peut regarder les $\rho_{j_s}{}^i$ comme les coordonnées normaleS d'un point $\rho_{j_s}\in G_t$ et, par suite, il en est de même pour

$$\xi_{j_s}{}^i=\sum_r g_r{}^i\rho_{j_s}{}^r$$

d'après ce qu'on a remarqué au n°2. Pour les indices h tels que $g_{j_s}{}^h\neq 0$, on a

$$(9.4)\qquad |\xi_{j_s}{}^h(u)-g_{j_s}{}^h|=|\sum_{l(\neq j_s)}g_l{}^h\rho_{j_s}{}^l(u)-g_{j_s}{}^h\sum_{r\neq j}|\rho_{j_s}{}^r|$$

$$\leq|\sum_{l\neq j_s}|g_l{}^h||\rho_{j_s}{}^l|+|g_{j_s}{}^h|(\sum_{r\neq j}|\rho_{j_s}{}^r|)$$

$$\leq 2\sum_{r\neq j}|\rho_{j_s}{}^r|\leq 2\varepsilon<\frac{\tau}{2},$$

$$g_{j_s}{}^h-\frac{\tau}{2}<\xi<g_{j_s}{}^h+\frac{\tau}{2},\qquad \tau\leq|g_{j_s}{}^h|,$$

c'est-à-dire, $\xi_{j_s}{}^h$ possède le même signe que $g_{j_s}{}^i$, en particulier, $\xi_{j_s}{}^{i_0(\varrho,j_s)}>0$. On voit ainsi que

$$\xi_{j_s} \in \mathfrak{S}(g_{j_s}, 2\varepsilon)$$

et, par suite, qu'on peut prendre comme $\sigma_{j_s}{}^i$ le signe de $\xi_{j_s}{}^i$ de sorte qu'on a

$$\sum_{i(\neq i_0(g,j_s))} \sigma_{j_s}{}^i \xi_{j_s}{}^i = 1 - \xi_{j_s}{}^{i_0(g,j_s)} \tag{9.5}$$

d'après (2.1). L'équation (8.2) peut s'écrire donc

$$\omega(\overline{\theta}) = \sum_{j_s} \sum_i \sum_{hu(\neq i)} \left(\sum_l g_l{}^i \rho_{i_s}{}^l - g_{i_s}{}^i - \frac{dg_{i_s}{}^i}{dt} \right) \gamma_{hu}{}^{j_s} \frac{\partial}{\partial e_{hu}{}^i}$$

et comme la sommation $\sum_{j_s}$ s'étend à un nombre fini d'indices, il en est de même pour $\sum_i$ et pour $\sum_{hu}$. Ainsi, *l'existence d'un chemin horizontal au dessus du chemin* $x_a(t)$ $(t_a \leq t \leq t_{a+1})$ *exige celle d'un système des fonctions* $g_j{}^i(t)$ $(t_a \leq t \leq t_{a+1})$ *telles que*

$$\sum_{j_s} \left(\sum_l g_l{}^i \rho_{j_s}{}^l - g_{j_s}{}^i - \frac{dg_{j_s}{}^i}{dt} \right) \gamma_{hu}{}^{j_s} = 0 \quad (i \neq h_u).$$

Si cette équation est vérifiée on a

$$\sum_{j_s} \sum_i \sum_{h(\neq i)} \left(\sum_l g_l{}^i \rho_{j_s}{}^l - g_{j_s}{}^i - \frac{dg_{j_s}{}^i}{dt} \right) \gamma_{ku}{}^{j_s} \frac{\partial}{\partial e_{hu}{}^i} \equiv 0 \tag{9.6}$$

Or, lorsque $g_{j_s}{}^i \neq 0$, $\sigma_{j_s}{}^i$ qui figure dans (9.1) est le signe de $g_{j_s}{}^i$ d'après définition et et $\xi_{j_s}{}^i$ possède la même signe que $\xi_{j_s}{}^i$ tandis qu'on peut prendre comme $\sigma_{j_s}{}^i$ le signe de $\xi_{j_s}{}^i$ si $g_{j_s}{}^i = 0$. Ainsi, l'équation (9.6) équivaut à dire que

$$\sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(g,j_s))} \left(\sum_l g_l{}^i \rho_{j_s}{}^l - g_{j_s}{}^i - \frac{dg_{j_s}{}^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial g_{j_s}} \equiv 0.$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{j_s} \left(g_l{}^i \rho_{j_s}{}^l - g_{j_s}{}^i - \frac{dg_{j_s}{}^i}{dt} \right) = 0 \quad (i \neq i_s(g, j_s)),$$

d'où

$$\sum_l g_l{}^{i_s} \rho_{j_0}{}^l - g_{j_s}{}^{i_s} - \frac{dg_{j_s}{}^i}{dt} = 0$$

en vertu de (9.2), (9.3) (9.5). En somme on a

$$\frac{dg_j{}^i}{dt} = \sum g_l{}^i \rho_j{}^l - g_j{}^i \quad j \in \{ j_1(a), \cdots, j_b(a) \}. \tag{9.7}$$

Réciproquement, en associant un voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{(g_a, \varepsilon)} = U_{(g_a, j_1(a), \varepsilon)} \cap \cdots \cap U_{(g_a, j_b(a), \varepsilon)}$$

$$\left(\varepsilon < \frac{\nu}{4} (\nu = \text{mini.} \, |(y_{j_s}{}^i)_a| \neq 0 \, (s = 1, \cdots b) \right)$$

ainsi que les $\rho_{j_s(a)}{}^i$ tels que

$$\sum_{j_s} \sum_{i(\neq j_s)} |\rho_{j_a(a)}{}^i(u)| < \kappa_a \leq \varepsilon \quad (t_a \leq u \leq t_{a+1})$$

au point y_a donné volotairement à l'avance, nous avons démontré ([5], pp. 123–136) que le système (9.7) d'équations différentielles admet un système unique des intégrales qui prennent les valeurs initiales $(y_j{}^i)_a$ en point t_a et qui deviennent les coordonnées normales d'un point dans la réstriction $\tilde{\Pi}_{(y_a,\varepsilon)}$ de $\Pi_{(y_a,\varepsilon)}$ On va y ajouter quelques remarques.

On pose ([5, p. 129)

$$(9.8) \qquad M_{j,n}{}^i=\sum_c\big(\sum_r(y_r{}^i)_a\rho_j{}^r(\bar{\tau}_c{}^{(n)})-(y_j{}^i)_a\big)(\tau_{c+1}{}^{(n)}-\tau_c{}^{(n)})$$

et démontre que la suite

$$M_{j,0}{}^i, M_{j,1}{}^i, \cdots, M_{j,n}{}^i, \cdots$$

tend uniformément vers l'intégral

$$\int_{ta}^t\big(\sum_l(y_l{}^i)_a\rho_j{}^l(u)-(y_j{}^i)_a\big)du \quad (t_a\le t\le t_{a+1}).$$

On pose, d'abord, pour $i\neq i_0(y_a, j_s)$,

$$g_{j,1}=(y_j{}^i)_a+\int_{ta}^t\big(\sum_l(y_l{}^i)_a\rho_j{}^l(u)-(y_j{}^i)_a\big)du,$$

Lorsque $j\overline{\in}\{j_1(a),\cdots,j_b(a)\}$, on a $g_{j,1}{}^i=(y_j{}^i)_a$. Pour chaque j_s

$$\xi_{js}{}^i(u)=\sum_l(y_l{}^i)_a\rho_{j_s}{}^l(u)$$

devient les coordonnées normales d'un point $\xi_{js}\in G_t$. D'après l'inégalité (9.4) où $g_{j_s}{}^i$, est remplacé par $(y_{j_s}{}^i)_a$, pour tout indice h tel que $g_{j_s}{}^h\neq 0$, $\xi_{j_s}{}^h$ possède le même signe que $(g_{j_s}{}^h)_a$. Ainsi, les indices i tels que $g_{j,1}{}^i\neq 0$ sont contenu dans l'ensemble des i satisfaisant à $\xi_{j_s}{}^i\neq 0$. Comme

$$\sum_l(y_l{}^i)_a\rho_{j_s}{}^l(u)-(y_{j_s}{}^i)_a=\sum_{l(\neq j_s)}(y_l{}^i)_a\rho_{ts}{}^l-y_{js}{}^i\big(\sum_{r\neq j_s}|\rho_{j_s}{}^r|\big),$$

il vient

$$|g_{j_s,1}{}^h(t)|\le|(g_{j_s}{}^h)_a|+\int_{ta}^t\Big|\sum_{l(\neq j_s)}(y_l{}^h)_a\rho_{j_s}{}^l(u)\Big|du$$
$$+\int_{ta}^t|y_{j_s}{}^h|\sum_{r(\neq j_s)}|\rho_{j_s}{}^r|du.$$

Or, $\rho_{j_s}{}^l(u)$ $(l\neq j_s)$ s'annule sauf pour un nombre fini des indices l, soit $l_1,\cdots,l_n$, et pour chaque l_r, $(y_{l_r}{}^h)_a$ s'annule à son tour sauf pour un nombre fini des indices h. On a donc

$$\sum_{h(\neq i_s)}|g_{j_s,1}{}^r|\le 1-(y_{j_s}{}^{i_0})a+\int_{ta}^t\sum_{lr}\sum_h|y_{lr}{}^h||\rho_{j_s}{}^{lr}|du+\int_{ta}^t\sum_{r(\neq j_s)}|\rho_{j_s}{}^r|du.$$

Pour les indices k tels que $(g_{j_s}{}^k)_a=0$, $\xi_{j_s}{}^k\neq 0$, on a

$$\sum_k|g_{j_s,1}{}^k|\le\int_{ta}^t\sum_{lr}\sum_k|y_{lr}{}^k|\rho_{j_s}{}^{lr}|du.$$

On a en somme

$$\sum_{i(\neq i_0)} |g_{j_s,1}{}^i| \leq 1-(y_{j_s}{}^{i_0})_a + \int_{t_a}^t \sum_{lr} |\rho_{j_s}{}^{lr}| du + \int_{t_a}^t \sum_{(r\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^n| du$$

$$\leq 1-(y_{j_s}{}^{i_0})_c + 2\int_{t_a}^t \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| du$$

$$\leq 1-y_{j_s}{}^{i_0})_a + \frac{(t-t_a)\nu}{2} \leq 1-(y_{j_s}{}^{i_0})_a\left(1-\frac{t-t_a}{2}\right).$$

On pose maintenant

$$g_{j,1}{}^{i_0} = 1 - \sum_{i(\neq i_0(y_a,j))} |g_{j,1}{}^i|.$$

Il vient alors

$$g_{j_s,1}{}^{i_0} \geq (y_{j_s}{}^{i_0})_a\left(1-\frac{t-t_a}{2}\right) > 0.$$

Pour $h(\neq i_0)$ aussi $g_{j_s,1}{}^h$ possède le même signe que $y_{j_s}{}^h$, car

$$|g_{j_s,1}{}^h - (y_{j_s}{}^h)_a| \leq \int_{t_a}^t \Big(\sum_{l(\neq j_s)} |y_l{}^h)_a|\rho_{j_s}{}^l| + |(y_{j_s}{}^h)_a| \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r|\Big) du$$

$$\leq 2\int_{t_a}^t \sum_{r(\neq ji)} |\rho_j{}^{ir}| du \leq \frac{(t-t_a)\nu}{2} \leq \frac{\nu}{2}.$$

Lorsque $j \in \{j_1(a), \cdots, j_b(a)\}$, on a

$$g_{j,1}{}^{i_0} = 1 - \sum_{i(\neq i_0)} |(y_j{}^i)_a| = (g_j{}^{i_0})_a.$$

On voit ainsi que les $g_{j_s,1}{}^i$ sont les coordonnées d'un point dans $\widetilde{\Pi}_{(y_c,2\varepsilon)}$. Maintenant on a

$$(9.9)_1 \qquad |g_{j_s,1}{}^i(v) - g_{j_s,1}{}^i(u)| \leq \frac{|v-u|\nu}{2}.$$

D'une manièrs précise,

$$|g^h{}_{j_s,1}(v) - g^h{}_{j_s,1}(u)| = \left| \int_u^v \Big(\sum_{l(\neq j_s)} (y_l{}^h)_a \rho_{j_s}{}^l(w) - (y_{j_s}{}^h)_a \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| \Big) dw \right|$$

$$\leq 2\int_u^v \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| dw \leq \frac{\nu}{2} \left| \int_u^v dw \right| = \frac{|v-u|\nu}{2},$$

$$|g^k{}_{j_s,1}(v) - g^k{}_{j_s,1}(u)| = \left| \int_u^v \sum_{l(\neq j_s)} (y_l{}^k)_a \rho_{j_s}{}^l(w) dw \right|$$

$$\leq \Big| \sum_{l(\neq j_s)} |(y_l{}^k)_a| |\rho_{j_s}{}^l(w)| dw \leq \int_u^v \sum_{l(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^l(w) dw|$$

$$\leq \left| \frac{\nu}{4} \int_u^v dw \right| = \frac{|v-u|\nu}{4} < \frac{|v-u|\nu}{2},$$

$$|g_{j_s,1}{}^{i_0}(v) - g_{j_s,1}{}^{i_0}(u)| = \Big| \sum_{i(\neq i_0)} g^i{}_{j_s,1}(v) - \sum_{i(\neq i_0)} g^i{}_{j_s,1}(u) \Big|$$

$$\leq \sum_{i(\neq i_0)} |g^i{}_{j_s,1}(v) - g^i{}_{j_s,1}(u)|$$

$$= \sum_{h(\neq i_0)} |g^h{}_{j_s,1}(v) - g^h{}_{j_s,1}(u)| + \sum_k |g^k{}_{j_s,1}(v) - g^k{}_{j_s,1}(u)|$$

$$\leq \sum_{h(\neq i_0)} \left| \int_u^v \sum_{lr} (y_{lr}{}^h)_a \rho_{j_s}{}^{lr}(w) dw \right|$$

$$+ \sum_{h(\neq i_0)} \left| \int_u^v (y^h{}_{j_s})_a \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| dw \right| + \sum_k \left| \int_u^v \sum_{lr} (y_{lr}{}^k)_a |\rho_{j_s}{}^{lr}| dw \right|$$

$$\leq \left| \int_u^v \sum_{lr} \Big(\sum_{h(\neq i_0)} |(y_{lv}{}^h)_a| + \sum_k |(y_{lr}{}^h)_a \Big) |\rho_{j_s}{}^{lr}| dw \right|$$

$$+ \left| \int_u^v \sum_{h(\neq i_0)} |(y_{j_s}{}^h)_a| \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| dw \right|$$

$$\leq \left| 2 \int_u^v \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| dw \right| \leq \frac{|v-u|\nu}{2}.$$

En remplaçant, dans (9.8), $(y_j{}^i)_a$ par $g_{j,1}{}^i$ on définit $M^i{}_{j,1,n}$ et en faisant l'usage de $(9.9)_1$, on démontre ([5], p. 131) que la suite

$$M^i{}_{j,1,0}, M^i{}_{j,1,1}, \cdots, M^i{}_{j,1,n}, \cdots$$

tend uniformément vers l'intégral

$$\int_{ta}^t \Big(\sum_l g^i{}_{l,1}(u) \rho_j{}^l(u) - g^i{}_{j,1}(u)\Big) du.$$

On pose, d'abord, pour $i \neq i_0(y_a, j)$

$$g^i{}_{j,2} = (y_j{}^i)_a + \int_{ta}^t \Big(\sum_l g^i{}_{l,1} \rho_j{}^l(u) - g_j{}^i(u)\Big) du.$$

Lorsque $j \in \{j_1(a), \cdots, j_b(a)\}$, on a $g^i{}_{j,1} = (y_j{}^i)_a$. Pour chaque j_s

$$\xi^i{}_{j_s,1}(u) = \sum_l g^i{}_{l,1} \rho^l{}_{j_s}(u)$$

devient les coordonnées d'un point dans $\tilde{\mathfrak{U}}_{(y_a, 2\varepsilon)}$.

Pour $h(\neq i_0)$ tel que $(y^h{}_{j_s})_a \neq 0$, on a

$$|g^h{}_{j_s,2}| \leq |(y^h{}_{j_s})_a| + \int_{ta}^t \sum_{lr} |g^h{}_{lr}| |\rho_{j_s}{}^{lr}| du + \int_{ta}^t |g^h{}_{j_s,1}| \sum_{r(\neq j_s)} |\rho^r{}_{j_s}| du,$$

Pour k_1 tel que $(y_{j_s}{}^{k_1})_a = 0$, $g_{j_s}{}^{k_1} \neq 0$ on a

$$|g_{j_s}{}^{k_1}{}_{,2}| \leq \int_{ta}^t \sum_{lr} |g^{k_1}{}_{lr,1}| |\rho_{j_s}{}^{lr}| du + \int_{ta}^t |g^{k_1}{}_{j_s,1}| \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| du.$$

Pour k_2 tel que $(y_{j_s}{}^{k_2})_a = 0$, $g^{k_2}{}_{j_s,1} = 0$, $\xi^{k_2}{}_{j_s,1} \neq 0$ on a

$$|g^{k_2}{}_{j_s,2}| \leq \int_{ta}^t \sum_{lr} |g^{k_2}{}_{lr,1}| \rho^{lr}{}_{j_s}| du.$$

On a ainsi

$$\sum_{i(\neq i_0)} |g^i{}_{j_s,2}| = \sum_{h(\neq i_0)} |g^h{}_{j_s,2}| + \sum_{k_1} |g^{k_1}{}_{j_s,2}| + \sum_{k_2} |g^{k_2}{}_{j_s,2}|$$

$$= 1 - (y^{i_0}{}_{j_s})_a + 2 \int_{ta}^t \sum_{r(\neq j_s)} |\rho_{j_s}{}^r| du \leq 1 - (g_{j_s}{}^{i_0}) + \frac{(t-t_a)\nu}{2}$$

$$\leq 1 - (y_{j_s}{}^{i_0})_a \Big(1 - \frac{t-t_a}{2}\Big).$$

On pose

$$g^{i_0}{}_{j,2}=1-\sum_{i(\neq i_0)}|g^i{}_{j,2}|.$$

Il vient alors

$$g^{i_0}{}_{j_s,2}\geq(y^i{}_{j_s})_a\left(1-\frac{t-t_a}{2}\right)>0.$$

Pour $h(\neq i_0)$ aussi $g^h{}_{j_s,2}$ possède le même signe que $(y_{j_s}{}^i)_a$. On peut déduire ensuite $(9.9)_2$ et ainsi de suite: en remplaçant, dans (9.8), $(y^i{}_j)_a$ par $g^i{}_{j,m-1}$ on déduit $M^i{}_{j,m-1,r}$ et en faisant l'usage de $(9.9)_{m-1}$ on démontre que la suite

$$M^i{}_{j,m-1,0}, M^i{}_{j,m-1,1}, \cdots, M^i{}_{j,m-1,r}, \cdots$$

tend unifomément vers l'integral

$$\int_{ta}^{t}(\sum_l g^i{}_{l,m-1}\rho_j{}^l(u)-g^i{}_{j,m-1}(u)du.$$

On pose

$$g^i{}_{j,m}=(y^i{}_j)_a+\int_{ta}^{t}(\sum_l g^i{}_{l,m-1}\rho_j{}^l(u)-g^i{}_{j,m-1}(u))du \quad (i\neq i_0(y_a, j)),$$

$$g^{i_0}{}_{j,m}=1-\sum_{i(\neq i_0)}|g^i{}_{j,m}|.$$

On désigne par k_1, l'indice tel que $(y_{j_s}{}^{k_1})=0$, $g^{k_1}{}_{j,m-1}\neq 0$ et par k_2 l'indice tel que

$$(y_{j_s}{}^{k_2})_a=0, \quad g^{k_2}{}_{j_s,m-1}=0, \quad \xi^{k_2}{}_{j_s,m-1}=0, \quad (\xi^i{}_{j_s,m-1}=\sum_l g^i{}_{jl,m-1}\rho_{j_s}{}^l).$$

On déduit

$$g^{i_0}{}_{js,m}\geq(y^{i_0}{}_{j_s})_a\left(1-\frac{t-t_a}{2}\right)>0.$$

ainsi que $(9.9)_m$. Lorsque $j\in\{j_1(a), \cdots, j_b(a)\}$ on a $g^i{}_{j,m}=(y^i{}_j)_a$. Les $g^i{}_{j_s,m}$ deviennet les coordonnées normales d'un point dans $\tilde{\mathfrak{U}}_{(y_a,2\varepsilon)}$.

Maintenant on démontre ([5], p. 135) que

$$\lim_{m\to\infty} g^k{}_{j_s,m}(t)=0 \quad ((y^k{}_{j_s})_a=0)$$

tandis que $g^h{}_{j_s,m}(t)$ $((y_{j_s}{}^h)_a\neq 0)$ tend uniformément vers l'intégral $g_{j_s}{}^h(t)$ $(t_a\leq t\leq t_{a+1})$ de (9.7) satisfaisant à la condition énoncée plua haut. Les intégrales anisi obténues peuvent se raccorder de proche en proche de sorte qu'on arrive à avoir un chemin horizontal continue et régulier par morceaux au dessus du chemin $x(t)$ $(0\leq t\leq 1)$ dans M ([7], p. 15).

Références

1) J. Kanitani. Sur une variéte localemct applicable dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ. (Hino City, Tokyo, Japan), No. 5 (Science and Engineering), 1970, pp. 1–13.

2) J. Kanitani. Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 6 (Science and Engineering), 1971, pp. 1–14.

3) J. Kanitani. Sur l'espace fibré tensoriel à une variété différentiable admettant les homémorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 9 (Science and Engineering), 1973, pp. 1–16.

4) J. Kanitani. Sur les champs de vecteurs au dessus d'une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin Meisei Univ, No. 10 (Science and Engineering), 1974, pp. 1–13.

5) J. Kanitani. Sur l'existence des intégrades d'un systeme d'équations différentielles aux fonctions inconnues de nombre infini. Jour. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, No. 1, 1976, pp. 123–136.

6) J. Kanitani. Sur un chemin des champs de vecteurs dont les coordonnées se trouvent dans un voisinage assez petit de l'elément neutre. Research Bulletin Meisei Univ. No. 14 (Science and Engineering), 1978, pp. 1–13.

7) J. Kanitani. Sur la translation à droite par rapport à un groupe à dimension infinie. Research Bulletin Meisei Univ. No. 15. (Science and Engineering), 1979, pp. 1–16.

8) N. Bourbaki. Elément de Mathématiques, Livre III Topologie Générale.

9) N. Steenrod. The Topology of Fibre Bundles.