相異なる二つの物質より成る輪形円板の熱伝導

小 平 吉 男

Conduction of Heat in a Ring-Shaped Circular Thin Plate Composed of Two Concentric Ring-Shaped Circular Plates made of Materials with Different Physical Constants

by *Yoshio KODAIRA*

Suppose a ring-shaped circular thin plate of radii b and a as shown in Fig. 1. This plate is supposed to be composed of two concentric ring-shaped plates. The one is made of material 1 and of radii b and a_1, and the other is made of material 2 and of radii a_1, and a. The physical quantities concerning the first ring are indicated by the suffix 1, and those concerning the second are indicated by the suffix 2.

The different equations for the conduction of heat are given by (1) and (2). The boundary conditions at the boundary of the two rings are (3) and (4). The initial conditions are (5) and (6). We here consider four problems.

Problem I. The boundary conditions at $r=b$ and $r=a$ are given by (7) and (8). The solutions of the differential equations are (9) and (10), where $J_0(\kappa_2\alpha_1 r)$, $J_0(\kappa_1\alpha_2 r)$ are Bessel functions and $Y_0(\kappa_2\alpha_1 r)$, $Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)$ are Neumann functions. A_{α_1}, B_{α_1}, C_{α_2}, D_{α_2} are constants determined by the boundary and initial conditions.

The eigenvalues $\kappa_2\alpha_1$, $\kappa_1\alpha_2$, are obtained from the two equations (22) and (26). These curves are shown in Fig. 3. The curve (22) is a hyperbola and (26) is composed of complicated concentric curves as shown in the figure.

The arbitrary functions are expanded in series of eigen-functions as shown by (63) and (64), where $u_n(s, r)$, $v_n(s, r)$, $V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$ are given by (48) (49) and (62).

The solution of the problem is given by (65) and (66).

Problem II. In this problem the boundary condition (7) is replaced by (67).

The eigenvalues are calculated from the equations (22) and (78). These curves are shown in Fig. 5.

The expansions of the arbutary functions $f_1(r)$ and $f_2(r)$ by means of eigenfunctions are (107) and (108), where $X_{1,s}(r)$, $X_{2,s}(r)$, $V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$ are (88), (89) and (106). The solution of the problem is given by (109) and (110).

Problem III. In this problem the boundary conditions (3) and (4) are replaced by (111) and (112) respectively.

In this case the eigenvalues are calculated from (22) and (113), and the curves showing the above two equations are drawn in Fig. 7.

The expansions of the arbitrary functions $f_1(r)$ and $f_2(r)$ are given by (122) and (123),

* 理工学部物理学科教授　物理数学
本論文は本学物理学科９期生村越陸男君及び９期生川口裕司君が著者の指導の下に行った卒業研究の不適当な個所を正し，整理したものである。

where $U(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$ is given by (124). $u_n(r,s)$, $v_n(r,s)$ are given by (120) and (121).
The solution of the problem is given by (125) and (126).

Problem IV. Here the boundary condition (112) in problem III is replaced by (127).

The eigenvalues are calculated from (22) and (128) and these curves are shown in Fig. 9.

The expansions of the arbitrary functions are given by (133) and (134), where $X_{1,s}(r)$ and $X_{2,s}(r)$ are given by (129) and (130) and $V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$ by (135). The solution of the problem is given by (136) and (137).

第1図に示す如く半径 a, b の円よる成る薄い輪形の板の熱伝導の問題を考える。この輪は半径 a_1 の同心円にて二つの部分に分れ，a_1 と b の間は1なる一様な物質，a と a_1 の間は2なる一様な物質より成るとし，各部分に於ける物理量には夫々 1, 2 なる脚符を附けることとする。熱は板の表面から逃げるとし，熱伝導の微分方程式として

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\kappa_1^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)-c_1^2u_1, \qquad [b<r<a_1] \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\kappa_2^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)-c_2^2u_2 \qquad [a_1<r<a] \tag{2}$$

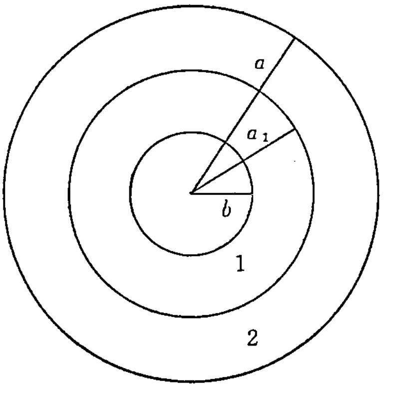

Fig. 1

を用いることとする。κ_1, κ_2 は熱拡散係数，c_1^2, c_2^2 は板の表面からの熱の放出の度合を示す定数である。

二つの物質の境界線における境異条件として

$$(u_1)_{r=a_1}=(u_2)_{r=a_1}, \tag{3}$$

$$k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a_1}=k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a_1} \tag{4}$$

を用いる。k_1, k_2 は熱伝導率である。

又初期条件として

$$(u_1)_{t=0}=f_1(r), \tag{5}$$

$$(u_2)_{t=0}=f_2(r) \tag{6}$$

を採用する。$f_1(r)$, $f_2(r)$ は共に r の任意の関数を表わす。

I　最初の問題として $r=b$ 及び $r=a$ に於ける境界条件を

$$(u_1)_{r=b}=0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a}=0 \tag{8}$$

の如く採ることとする。

以上の微分方程式と諸条件を満足させるために先づ (1), (2) の特解が必要である。それは

$$u_1=\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2)t\}\{A_{\alpha_1}J_0(\kappa_2\alpha_1 r)+B_{\alpha_1}Y_0(\kappa_2\alpha_1 r)\}, \tag{9}$$

$$u_2=\exp\{-(c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2)t\}\{C_{\alpha_2}J_0(\kappa_1\alpha_2 r)+D_{\alpha_2}Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)\} \tag{10}$$

と書くことができる。α_1, α_2 は境界条件によって決定される定数，$J_0(x)$，$Y_0(x)$ は夫々次数0次の Bessel 関数，Neumann 関数である。

境界条件 (7) を (9) に入れれば，

$$A_{\alpha 1}J_0(\kappa_2\alpha_1 b)+B_{\alpha 1}Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)=0 \tag{11}$$

となる。この関係は新しい任意の定数 E_{α_1} を用いて

$$A_{\alpha 1}=\frac{E_{\alpha 1}}{J_0(\kappa_2\alpha_1 b)},\quad B_{\alpha 1}=-\frac{E_{\alpha 1}}{Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)} \tag{12}$$

と置けば満足される。

(10)に境界条件 (8) を入れれば，

$$\kappa_1\alpha_2\{C_{\alpha_2}J_1(\kappa_1\alpha_2 a)+D_{\alpha_2}Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)\}=0 \tag{13}$$

となる。(13)は

$$\alpha_2=0 \tag{14}$$

又は

$$C_{\alpha_2}J_1(\kappa_1\alpha_2 a)+D_{\alpha_2}Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)=0 \tag{15}$$

によって満足される。

$\alpha_2=0$ の場合には微分方程式の特解(10)が有限であるためには

$$D_{\alpha_2}=0 \tag{16}$$

でなくてはならない。

$\alpha_2\neq 0$ とすれば(15)は任意の α_2 の定数 F_{α_2} を用いて，

$$C_{\alpha_2}=\frac{F_{\alpha_2}}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)},\quad D_{\alpha_2}=-\frac{F_{\alpha_2}}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)} \tag{17}$$

によって満足することがわかる。

(16)，(17)により (9)，(10)は

$$u_1=E_{\alpha_1}\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2)t\}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_1 r)}{J_0(\kappa_2\alpha_1 b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_1 r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)}\right), \tag{18}$$

$$u_2=F_{\alpha_2}\exp\{-(c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2)t\}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_2 r)}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)}\right) \tag{19}$$

となる。又 $\alpha_2=0$ の場合には(10)は

$$u_2=C_{\alpha_2}e^{-c_2^2 t} \tag{20}$$

なる形を採る。

$r=a_1$ に於ける境界条件 (3)，(4) は t の如何に関わず成立しなくてはならないから，(18)，(19)の時の関数が等しくなくてはならない。即ち

$$c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2=c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2 \tag{21}$$

が成立しなくてはならない。$\alpha_2=0$ の場合には

$$c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2=c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2 \tag{22}$$

となる $c_1\neq c_2$ のときには $\alpha_1\neq 0$ であるが，$c_1=c_2$ となれば

$$\alpha_1=0$$

となり得る。

$\alpha_1=0$ となる場合には (9) に於いて $B_{\alpha_1}=0$ でなくてはならないが (9) は

$$u_1=A_{\alpha_1}e^{-c_1^2t} \tag{23}$$

なる形となる。この場合には(20)の c_2 は $c_1=c_2$ とならなくてはならない。

$\alpha_2=0$ 又は $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ の場合を除けば境界条件 (3), (4) は (18), (19) により

$$E_{\alpha_1}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}\right)=F_{\alpha_2}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}\right), \tag{24}$$

$$E_{\alpha_1}k_1\kappa_2\alpha_1\left(\frac{J_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\frac{Y_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}\right)=F_{\alpha_2}k_2\kappa_1\alpha_2\left(\frac{J_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\frac{Y_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}\right) \tag{25}$$

となる。(25) は $\alpha_1=\alpha_2=0$ によって満足されるが，これは除いて考えとなる。

これら２式から

$$k_1\kappa_2\alpha_1\frac{\dfrac{J_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\dfrac{Y_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}}=k_2\kappa_1\alpha_2\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\dfrac{J_1(k_1\alpha_2a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}} \tag{26}$$

が得られる。この式と (21) とから固有値 $\kappa_1\alpha_2$, $\kappa_2\alpha_1$ が決定され，それから α_1, α_2 が求められるのである。

最初に $\alpha_2=0$, $\alpha_1\neq 0$ の場合を吟味してみよう。(18), (20) を境界条件 (4) に入れれば

$$E_{\alpha_1}\kappa_2\alpha_1\left(\frac{J_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\frac{Y_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}\right)=0$$

が成立しなくてはならない。即ち括弧内の式が０とならなくてはならない。この場合は非常に特殊の場合であって，問題の解決が困難となる。此処ではこのような特殊の場合を除いて問題を解くこととする。

次に $\alpha_2=0$, $\alpha_1=0$ の場合，即ち $c_1^2=c_2^2$ の場合を考える。(18) 式は

$$u_1=E_{\alpha_1}e^{-c_1^2t}\lim_{\alpha_1\to 0}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_1r)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_1r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}\right)$$

となる。$J_0(0)=1$ であり，α_1 の小さいときには

$$Y_0(\kappa_2\alpha_1r)\fallingdotseq\log(\kappa_2\alpha_1r)\fallingdotseq\log\alpha_1$$
$$Y_0(\kappa_2\alpha_1b)\fallingdotseq\log(\kappa_2\alpha_1b)\fallingdotseq\log\alpha_1$$

であるから

$$u_1=0 \tag{27}$$

となる。

(24), (27) を境界条件 (3) に入れれば,

$$u_2=0 \tag{28}$$

となる。即ち u_1 も u_2 も 0 となるので, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ の場合を考える必要はない。

次に本問題の固有値 $\kappa_2\alpha_1$, $\kappa_1\alpha_2$ について考えよう。これは (21), (26) から決定される。固有値は α_1, α_2 が決定されれば, それから計算することが出来る。

α_1, α_2 はどのように求められるかは, (21) と (26) の二曲線を α_1, α_2 を両軸に採って図に画いてその交点を求めればよい。(21)は双曲線であるから比較的簡単に画かれるが, (26)は複雑な曲線で, それを画くには可成りの手数を要する。(26)から

$$\eta_1=k_1\kappa_2\alpha_1\frac{\dfrac{J_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\dfrac{Y_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_1b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_1b)}}, \tag{29}$$

$$\eta_2=k_2\kappa_1\alpha_2\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{J_1(\varepsilon_1\alpha_2a)}-\dfrac{Y_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}} \tag{30}$$

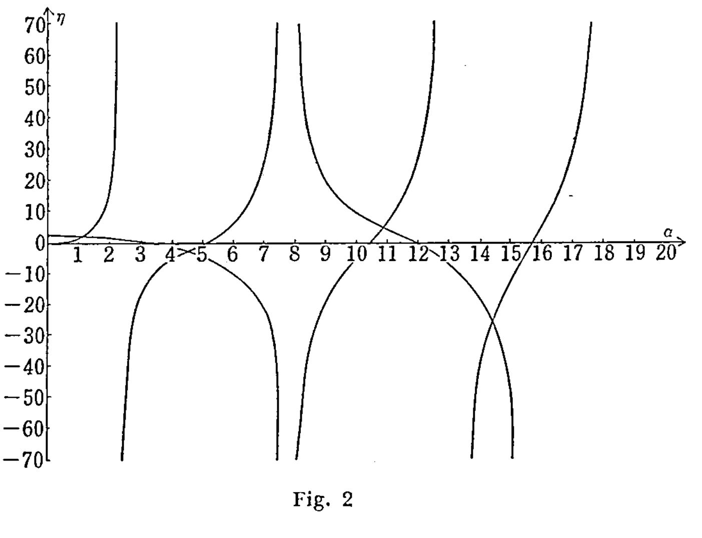

Fig. 2

なる曲線を同じ図上に η_1, α_1, η_2, α_2 を両座標軸に取った二曲線を同じ図上に画き, $\eta_1=\eta_2$ となる α_1, α_2 を求め, 別の図に α_1, α_2 を座標軸とする図を画けば, (26) の図示が出来る。

Fig. 2 は (29), (30) を画いたものである。(図では $k_1=1$, $k_2=1.5$, $\kappa_1=1.2$, $\kappa_2=1$, $a=1.5$, $a_1=1$, $b=0.6$, $c_1=1$, $c_2=2$, $c=1$ としてある。)

(21) の双曲線と Fig. 2 から得られる (28) の図を同じ図に画いたものが Fig. 3 である。これら二曲線の交点から α_1, α_2 が得られるのである。(図の数値は Fig. 2 と同じ。)

Fig. 3 から求まる正根 α_1, α_2 を大きさの順序に並べて s 番目のものを $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ と書くことする。(18), (19) を α_1, α_2 の許し得る総ての値に対して和を採れば

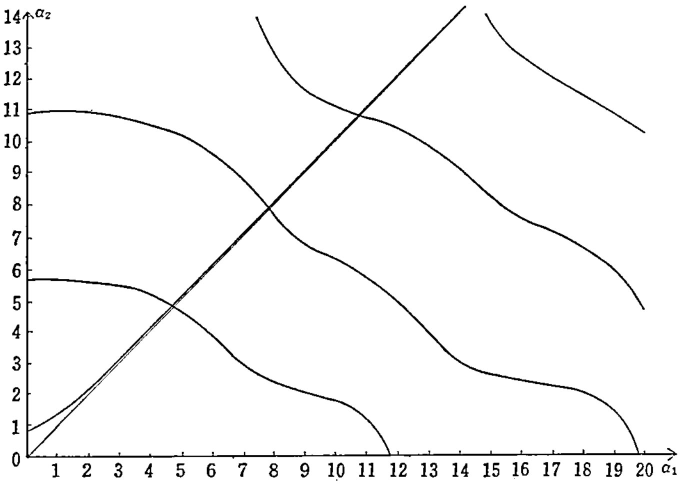

Fig. 3

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty} E_{\alpha_1,s}\exp\{-(\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2+c_1^2)t\}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right), \tag{31}$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty} F_{\alpha_2,s}\exp\{-(\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2+c_2^2)t\}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right) \tag{32}$$

となるに(21)，(24) により

$$E_{\alpha 1,s}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)=F_{\alpha 2,s}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\equiv M_s$$

と置くこととすれば，(31)，(32) は次の如く書ける：

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty} M_s\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)t\}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}, \tag{33}$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty} M_s\exp\{-(c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2)t\}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}. \tag{34}$$

今簡単のために

$$\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}=X_{1,s}(r),\quad \frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}=X_{2,s}(r) \tag{35}$$

と置く。これらは何れも円柱関数である。これらの関数を用いれば (33)，(34) は

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty} M_s\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)t\}X_{1,s}(r), \tag{36}$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)t\}X_{2,s}(r) \tag{37}$$

と書くことができる。又

$$\frac{J_n(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_n(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}=u_n(s,r),\ \frac{J_n(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_n(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}=v_n(s,r) \tag{38}$$

と書けば

$$X_{1,s}(r)=\frac{u_0(s,r)}{u_0(s,a_1)},\quad X_{2,s}(r)=\frac{v_0(s,r)}{v_0(s,a_1)} \tag{39}$$

と書くこともできる。

(36), (37) に初期条件 (5), (6) を入れれば,

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{1,s}(r), \tag{40}$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{2,s}(r) \tag{41}$$

となる。このような展開式が得られれば問題は解かれる。即ち (40), (41) を満足するように M_s を決定すればよい。

M_s を決定するために m を任意の正の整数とし, (40) の両辺に $k_1\kappa_2{}^2X_{1,m}(r)r$ を掛けて b から a_1 まで積分したものに, (41)の両辺に $k_2\kappa_1{}^2X_{2,m}(r)r$ を掛けて a_1 から a まで積分したものを加え合わせる：

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(r)X_{2,m}(r)rdr\\&=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}X_{1,s}(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}(r)X_{2,m}(r)rdr\right).\end{aligned} \tag{42}$$

(39) から

$$\int_b^{a_1}X_{1,s}(r)X_{1,m}(r)rdr=\frac{1}{u_0(s,a_1)}\frac{1}{u_0(m,a_1)}\int_b^{a_1}u_0(s,r)u_0(m,r)rdr, \tag{43}$$

$$\int_{a_1}^{a}X_{2,s}(r)X_{2,m}(r)rdr=\frac{1}{v_0(s,a_1)v_0(m,a_1)}\int_{a_1}^{a}v_0(s,r)v_0(m,r)rdr \tag{44}$$

と書ける。

最初に $s\neq m$ とする。$C_n(\alpha x), Z_n(\beta x)$ を n 次の円柱関数とすると,

$$(\alpha^2-\beta^2)\int xC_n(\alpha x)Z(\beta x)dx=\beta xC_n(\alpha x)Z_{n-1}(\beta x)-\alpha xC_{n-1}(\alpha x)Z_n(\beta x) \tag{45}$$

という公式がある。又

$$J_{-1}(x)=-J_1(x),\quad Y_{-1}(x)=-Y_1(x)$$

であるから,

$$u_{-1}(s,r)=\frac{J_{-1}(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_{-1}(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}=-\frac{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}+\frac{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}$$

$$=-u_1(s,r),\tag{46}$$

$$\begin{aligned}v_{-1}(s,r)&=\frac{J_{-1}(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_{-1}(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}=-\frac{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}+\frac{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\\&=-v_1(s,r)\end{aligned}\tag{47}$$

と書ける。尚 $u_0(s,b)$, $v_1(s,a)$ は

$$u_0(s,b)=\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}=0,\tag{48}$$

$$v_1(s,a)=\frac{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}{J_1(\kappa_1 a_{2,s}a)}-\frac{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}=0\tag{49}$$

なる性質を有している。

$u_0(s,r)$, $u_0(m,r)$ は円柱関数であるから，公式 (45) により，(48)，(49) を考慮に入れて

$$\begin{aligned}&\int_b^{a_1}u_0(s,r)u_0(m,r)rdr\\&=-\frac{\Big[\kappa_2\alpha_{1,m}ru_0(s,r)u_{-1}(m,r)-\kappa_2\alpha_{1,s}ru_{-1}(s,r)u_0(m,r)\Big]_b^{a_1}}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}\\&=-\frac{\Big[\kappa_2\alpha_{1,m}ru_0(s,r)u_1(m,r)-\kappa_2\alpha_{1,s}ru_1(s,r)u_0(m,r)\Big]_b^{a_1}}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}\\&=-\frac{\kappa_2}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}\{\alpha_{1,m}a_1u_0(s,a_1)u_1(m,a_1)-\alpha_{1,s}a_1u_1(s,a_1)u_0(m,a_1)\}\end{aligned}\tag{50}$$

を得る。同様にして

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a}v_0(s,r)v_0(m,r)rdr\\&=\frac{\kappa_1}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)}\{\alpha_{2,m}a_1v_0(s,a_1)v_1(m,a_1)-\alpha_{2,s}a_1v_1(s,a_1)v_0(m,a_1)\}\end{aligned}\tag{51}$$

が得られる。

(50)，(51) により

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1}f_1(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(r)X_{2,m}(r)rdr\\&=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\Bigg[-\frac{k_1\kappa_2^2}{u_0(s,a_1)u_0(m,a_1)}\frac{\kappa_2\{\alpha_{1,m}a_1u_0(s,a_1)u_1(m,a_1)-\alpha_{1,s}a_1u_1(s,a_1)u_0(m,a_1)\}}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}\\&\quad+\frac{k_2\kappa_1^2}{v_0(s,a_1)v_0(m,a_1)}\frac{\kappa_1\{\alpha_{2,m}a_1v_0(s,a_1)v_1(m,a_1)-\alpha_{2,s}a_1v_1(s,a_1)v_0(m,a_1)\}}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)}\Bigg]\\&=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\Bigg[\frac{a_1}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}\left\{-k_1\kappa_2\alpha_{1,m}\frac{u_1(m,a_1)}{u_0(m,a_1)}+k_1\kappa_2\alpha_{1,s}\frac{u_1(s,a_1)}{u_0(s,a_1)}\right\}\\&\quad+\frac{a_1}{\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2}\left\{k_2\kappa_1\alpha_{2,m}\frac{v_1(m,a_1)}{v_0(m,a_1)}-k_2\kappa_1\alpha_{2,s}\frac{v_1(s,a_1)}{v_0(s,a_1)}\right\}\Bigg]\end{aligned}\tag{52}$$

となる。然るに (21) により

$$c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2=c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2,$$
$$c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,m}^2=c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,m}^2$$

であるから

$$\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2=\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2 \tag{53}$$

である。又境界条件 (4) により

$$k_1\kappa_2\alpha_{1,s}\frac{u_1(s,a_1)}{u_0(s,a_1)}=k_2\kappa_1\alpha_{2,s}\frac{v_1(s,a_1)}{v_0(s,a_1)} \tag{54}$$

なる関係が成立する。上の式において s の代りに m と書いたものも成立する。

従って $s\neq m$ の場合には (52) は

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1}f_1(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(r)X_{2,m}(r)rdr\\ &=\sum_{s=1}^{\infty}M_s a_1\left[\left\{\frac{1}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}k_1\kappa_2\alpha_{1,s}\frac{u_1(s,a_1)}{u_0(s,a_1)}-\frac{1}{\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2}k_2\kappa_1\alpha_{2,s}\frac{v_1(s,a_1)}{v_0(s,a_1)}\right\}\right.\\ &\quad\left.-\left\{\frac{1}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}k_1\kappa_2\alpha_{1,m}\frac{u_1(m,a_1)}{u_0(m,a_1)}-\frac{1}{\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2}k_2\kappa_1\alpha_{2,m}\frac{v_1(m,a_1)}{v_0(m,a_1)}\right\}\right]=0\end{aligned} \tag{55}$$

なる結果が得られる。

次に $s=m$ の場合を考える。(42) はこの場合には

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1}f_1(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(r)X_{2,m}(r)rdr\\ &=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\left(k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1}X_{1,m}^2(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}^2(r)rdr\right)\end{aligned} \tag{56}$$

となる。(50) の左辺に於いて

$$\int_b^{a_1}X_{1,m}^2(r)rdr=\frac{1}{u_0^2(m,a_1)}\int_b^{a_1}u_0^2(m,r)rdr \tag{57}$$

と書ける。然るに一般に円柱関数 $C_n(\alpha x)$ に対して

$$\int x\{C_n(\alpha x)\}^2dx=\frac{x^2}{2}\left[\{C_n'(\alpha x)\}^2+\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2x^2}\right)\{C_n(\alpha x)\}^2\right] \tag{58}$$

であり，$C_0'(\alpha x)=-C_1(\alpha x)$ であるから

$$\int x\{C_0(\alpha x)\}^2dx=\frac{x^2}{2}\left[\{C_1(\alpha x)\}^2+\{C_0(\alpha x)\}^2\right]$$

である。故に

$$\int_b^{a_1}u_0^2(m,r)rdr=\left[\frac{r^2}{2}\{u_1^2(m,r)+u_0^2(m,r)\}\right]_b^{a_1}$$

となるが，(48) により $u_0(m,b)=0$ であるので，これは

$$\int_b^{a_1}u_0^2(m,r)rdr=\frac{a_1^2}{2}\{u_1^2(m,a_1)+u_0^2(m,a_1)\}-\frac{b^2}{2}\{u_1^2(m,b)\}$$

となる。従って

$$\int_b^{a_1} X_{1,m}{}^2(r)\,rdr=\frac{a_1{}^2}{2}\left(\frac{u_1{}^2(m,a_1)}{u_0{}^2(m,a_1)}+1\right)-\frac{b^2}{2}\frac{u_1{}^2(m,b)}{u_0{}^2(m,a_1)} \tag{59}$$

が得られる。

同様に (49) を用いて

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a} X_{2,m}{}^2(r)\,rdr&=\frac{1}{v_0{}^2(m,a_1)}\int_{a_1}^{a} v_0{}^2(m,r)\,rdr,\\&=\frac{1}{v_0{}^2(m,a_1)}\left[\frac{r^2}{2}\{v_1{}^2(m,r)+v_0{}^2(m,r)\}\right]_{a_1}^{a}\\&=\frac{1}{v_0{}^2(m,a_1)}\left[\frac{a^2}{2}\{v_0{}^2(m,a)\}-\frac{a_1{}^2}{2}\{v_1{}^2(m,a_1)+v_0{}^2(m,a_1)\}\right].\end{aligned}$$

従って

$$\int_{a_1}^{a} X_{2,m}{}^2(r)\,rdr=\frac{a^2}{2}\frac{v_0{}^2(m,a)}{v_0{}^2(m,a_1)}-\frac{a_1{}^2}{2}\left(\frac{v_1{}^2(m,a_1)}{v_0{}^2(m,a_1)}+1\right) \tag{60}$$

が得られる。

(55), (59), (60) により (56) は

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1} X_{1,m}{}^2(r)\,rdr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a} X_{2,m}{}^2(r)\,rdr\\&=M_m\left[\frac{k_1\kappa_2{}^2}{2}\left\{a_1{}^2\left(\frac{u_1{}^2(m,a_1)}{u_0{}^2(m,a_1)}+1\right)-b^2\left(\frac{u_1{}^2(m,b)}{u_0{}^2(m,b)}\right)\right\}\right.\\&\qquad\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{2}\left\{a^2\left(\frac{v_0{}^2(m,a)}{v_0{}^2(m,a_1)}\right)-a_1{}^2\left(\frac{v_1{}^2(m,a_1)}{v_0{}^2(m,a_1)}+1\right)\right\}\right] &(61)\\&\equiv M_m V(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m}) &(62)\end{aligned}$$

となる。(61) の四角な括弧内の式は複雑な式であるので $V(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})$ と書くこととする。これから係数 M_m を計算することができる。

(61) から求められる M_s により任意の関数の展開式は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}f_1(r)&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}(r)}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right)\\&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{u_0(s,r)}{u_0(s,a_1)}\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{u_0(s,a_1)}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)u_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right.\\&\qquad\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{v_0(s,a_1)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)v_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right), &(63)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(\lambda)&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}(r)}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right)\\&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{v_0(s,r)}{v_0(s,a_1)}\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{u_0(s,a_1)}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)u_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right.\\&\qquad\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{v_0(s,a_1)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)v_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right). &(64)\end{aligned}$$

(63), (64) によって任意の関数の展開式が得られたので求める温度 u_1, u_2 は次のように書ける：

$$u_1=\exp\{-c_1{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{u_0(s,r)}{u_0(s,a_1)}\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{u_0(s,a_1)}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)u_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{v_0(s,a_1)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)v_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right)$$
$$=\exp\{-c_1{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2 b_{1,s}a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}$$
$$\times\left\{\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\lambda d\lambda\right\},\tag{65}$$

$$u_2=\exp\{-c_2{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{v_0(s,r)}{v_0(s,a_1)}\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{u_0(s,a_1)}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)u_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{v_0(s,a_1)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)v_0(s,\lambda)\lambda d\lambda\right)$$
$$=\exp\{-c_2{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}$$
$$\times\left\{\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\lambda d\lambda\right\}.\tag{66}$$

これらの式の $V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})$ は (62) から分るように複雑な式である。

II　第二の問題として境界条件 (7) の代りに

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}-c\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=b}=0\tag{67}$$

を用いることとする。微分方程式及び他の条件はＩの場合と同じであるとする。

微分方程式の特解は前の場合と同じで (9), (10) である。

(9) に境界条件 (67) を入れれば,

$$-(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)\{A_{\alpha_1}J_0(\kappa_2\alpha_1 b)+B_{\alpha_1}Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)\}$$
$$+c\kappa_2\alpha_1\{A_{\alpha_1}J_1(\kappa_2\alpha_1 b)+B_{\alpha_1}Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)\}=0,$$

或は

$$A_{\alpha_1}\{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)\}$$
$$+B_{\alpha_1}\{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)\}=0\tag{68}$$

となる。新しい定数 $E_{\alpha 1}$ を用いて

$$A_{\alpha 1}=\frac{E_{\alpha 1}}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}, \tag{69}$$

$$B_{\alpha 1}=-\frac{E_{\alpha 1}}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)} \tag{70}$$

の如く採れば (68) は満足される。

従って u_1, u_2 は次の如く書かれる：

$$u_1=E_{\alpha 1}\exp\{-(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)t\}\Big(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_1 r)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-ck_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}$$
$$-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_1 r)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}\Big), \tag{73}$$

$$u_2=F_{\alpha 2}\exp\{-(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_2{}^2)t\}\Big(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_2 r)}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)}\Big). \tag{74}$$

境界条件 (3), (4) から

$$E_{\alpha 1}\Big(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}$$
$$-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}\Big)=F_{\alpha 2}\Big(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)}\Big), \tag{75}$$

$$E_{\alpha_1}k_1\kappa_2\alpha_1\Big(\frac{J_1(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}$$
$$-\frac{Y_1(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}\Big)=F_{\alpha_2}k_2\kappa_1\alpha_2\Big(\frac{J_1(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)}-\frac{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)}\Big) \tag{76}$$

なる二つの関係が得られる。

これら二式から

$$k_1\kappa_2\alpha_1\frac{\Big(\dfrac{J_1(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}-\dfrac{Y_1(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}\Big)}{\Big(\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_1 b)-c\kappa_2\alpha_1 Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}\Big)}$$
$$=k_2\kappa_1\alpha_2\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)}-\dfrac{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_2 a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a)}} \tag{78}$$

を得る。この式と (21) とから境界条件を満足する α_1, α_2 が決定される。

(21) は双曲線であるから，割合に簡単であるが，(78) は複雑な曲線である。(78) の曲線を作るにはⅠの場合と同様に

$$\eta_1=(78)\ \text{の左辺}, \tag{79}$$

$$\eta_2 = (78) \text{ の右辺} \tag{80}$$

を同じ図上に η_1, α_1, η_2, α_2 を両軸とする曲線を画き $\eta_1=\eta_2$ となる α_1, α_2 を求めれば (78) の曲線が得られる。Fig. 4 にこれら二曲線が画いてある。(図では $k_1=1$, $k_2=1.5$, $\kappa_1=1.2$, $\kappa_2=1$, $a=1.5$, $a_1=1$, $b=0.6$, $c_1=1$, $c_2=2$, $c=1$ としてある。)

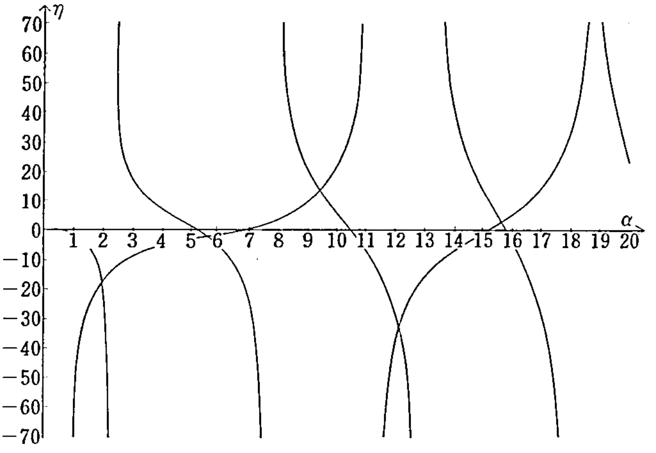

Fig. 4

Fig. 5 には上の如くにして求めた (78) と双曲線 (21) とが画かれている。図に用いた数値は Fig. 4 と同じである。この図で見ると α_1, α_2 の値は無限に多くある。このようにして得られた正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを夫々 $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ と書くこととする。

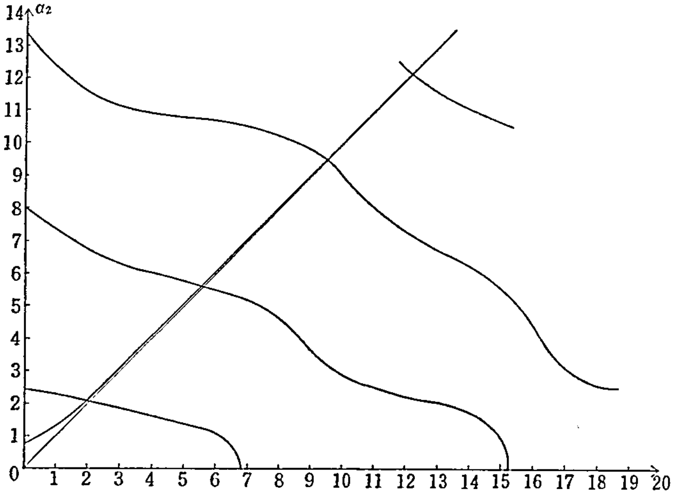

Fig. 5

上の如く定義した $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ を用いれば微分方程式 (1), (2) 境界条件 (7), (67) を満足する解は，s に就いての和を採った

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty}E_{\alpha_1,s}\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)t\}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right.$$
$$\left.-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right), \tag{81}$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty}F_{\alpha_2,s}\exp\{-(c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2)t\}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right) \tag{82}$$

の如く書くことができる。

境界条件(3)により

$$E_{\alpha_1,s}\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right.$$
$$\left.-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)Y_0(\kappa^2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)$$
$$=F_{\alpha_2,s}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\equiv M_s \tag{83}$$

であるから，両辺の値を M_s と置くこととする。

又

$$\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}$$
$$-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}=u_0(s,r), \tag{84}$$

$$\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}=v_0(s,r) \tag{85}$$

と置く。$u_0(s,r)$ は I の場合とは異るが，混同のおそれはない。然るときは u_1 及び u_2 を次のように書くことができる：

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)t\}\frac{u_0(s,r)}{u_0(s,a_1)}, \tag{86}$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-(c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2)t\}\frac{v_0(s,r)}{v_0(s,a_1)}. \tag{87}$$

或は

$$\frac{u_0(s,r)}{u_0(s,a_1)}=X_{1,s}(r), \tag{88}$$

$$\frac{v_0(s,r)}{v_0(s,a_1)}=X_{2,s}(r) \tag{89}$$

と書くことによれば次のようにも書ける：

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)t\}\,X_{1,s}(r), \tag{90}$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-(c_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2)t\}\,X_{2,s}(r). \tag{91}$$

これに初期条件(5)，(6)を入れれば，

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{1,s}(r), \tag{92}$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{2,s}(r) \tag{93}$$

となる。これを満足するように M_s を決定しなくてはならない。

M_s を決定するために (92) に $k_1\kappa_2^2\ X_{1,m}(r)r$ をかけて b から a_1 まで積分し, (93) に $k_2\kappa_1^2 X_{2,m}(r)r$ を掛けて a_1 から a まで積分したものと加え合わせる：

$$k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1} f_1(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} f_2(r)X_{2,m}(r)rdr$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty} M_s\left(k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1} X_{1,s}(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} X_{2,s}(r)X_{2,m}(r)rdr\right). \tag{94}$$

最初に $s\neq m$ の場合を考える。

$$\int_b^{a_1} X_{1,s}(r)X_{1,m}(r)rdr=\frac{1}{u_0(s,a_1)u_0(m,a_1)}\int_b^{a_1} u_0(s,r)u_0(m,r)rdr$$

である $u_0(s,r)$, $u_0(m,r)$ は円柱関数であるから,

$$\int_b^{a_1} u_0(s,r)u_0(m,r)rdr$$
$$=\frac{\Big[-\kappa_2\alpha_{1,m}ru_0(s,r)u_1(m,r)+\kappa_2\alpha_{1,s}ru_1(s,r)u_0(m,r)\Big]_b^{a_1}}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}$$
$$=\frac{-\kappa_2\alpha_{1,m}a_1u_0(s,a_1)u_1(m,a_1)+\kappa_2\alpha_{1,s}a_1u_1(s,a_1)u_0(m,a_1)}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}$$
$$+\frac{\kappa_2\alpha_{1,m}bu_0(s,b)u_1(m,b)-\kappa_2\alpha_{1,s}bu_1(s,b)u_0(m,b)}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)} \tag{95}$$

となる。境界条件 (67) によれば

$$-(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)X_{1,s}(s,b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}X_{1,s}'(s,b)=0$$

即ち

$$(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)\frac{u_0(s,b)}{u_0(s,a_1)}-c\kappa_2\alpha_{1,s}\frac{u_1(s,b)}{u_0(s,a_1)}=0$$

となる。これから

$$u_1(s,b)=\frac{c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2}{c\kappa_2\alpha_{1,s}}u_0(s,b), \tag{96}$$

$$u_1(m,b)=\frac{c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,m}^2}{c\kappa_2\alpha_{1,m}}u_0(m,b) \tag{97}$$

なる関係があることがわかる。これら二式から

$$\frac{\kappa_2\alpha_{1,m}b\ u_1(s,b)u_0(m,b)-\kappa_2\alpha_{1,s}b\ u_0(s,b)u_1(m,b)}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}$$
$$=\frac{\kappa_2 b}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}\left(\frac{\alpha_{1,m}(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,m}^2)u_0(s,b)\,u_0(m,b)}{c\kappa_2\alpha_{1,m}}\right.$$

$$-\frac{\alpha_{1,s}(c_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2)u_0(s,b)u_0(m,b)}{c\kappa_2\alpha_{1,s}}\Bigg)=-\frac{b\kappa_1^2\kappa_2^2}{c\kappa_2^2}u_0(s,b)u_0(m,b)$$

が得られので，次のようになる。

$$\int_b^{a_1}u_0(s,r)u_0(m,r)rdr$$
$$=\frac{-\kappa_2\alpha_{1,m}a_1u_0(s,a_1)u_1(m,a_1)+\kappa_2\alpha_{1,s}a_1u_1(s,a_1)u_0(m,a_1)}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}$$
$$-\frac{b\kappa_1^2\kappa_2^2}{c\kappa_2^2}u_0(s,b)u_0(m,b). \tag{98}$$

次に

$$\int_{a_1}^{a}X_{2,s}(r)X_{2,m}(r)rdr=\frac{1}{v_0(s,a_1)v_0(m,a_1)}\int_{a_1}^{a}v_0(s,r)v_0(m,r)rdr$$

を考える。

$$\int_{a_1}^{a}v_0(s,r)v_0(m,r)rdr$$
$$=\frac{\Big[-\kappa_1\alpha_{2,m}rv_0(s,r)v_1(m,r)+\kappa_1\alpha_{2,s}rv_1(s,r)v_0(m,r)\Big]_{a_1}^{a}}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)}$$
$$=\frac{-\kappa_1\alpha_{2,m}av_0(s,a)v_1(m,a)+\kappa_1\alpha_{2,s}av_1(s,a)v_0(m,a)}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)}$$
$$+\frac{\kappa_1\alpha_{2,m}a_1v_0(s,a_1)v_1(m,a_1)-\kappa_1\alpha_{2,s}a_1v_1(s,a_1)v_0(s,a_1)}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)} \tag{99}$$

然るに (85) の $v_0(s,r)$ の定義から

$$v_1(s,r)=\frac{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}$$

なることがわかるから，

$$v_1(s,a)=0,\qquad v_1(m,a)=0$$

である。従って

$$\int_{a_1}^{a}v_0(s,r)v_0(m,r)rdr=\frac{\kappa_1\alpha_{2,s}a_1v_0(s,a_1)v_1(m,a_1)-\kappa_1\alpha_{2,s}a_1v_1(s,a_1)v_0(m,a_1)}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)} \tag{100}$$

となる。

(98), (100) から

$$k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1}X_{1,s}(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}(r)X_{2,m}(r)rdr$$
$$=\frac{k_1\kappa_2^2}{u_0(s,a_1)u_0(m,a_1)}\Bigg(\frac{-\kappa_2\alpha_{1,m}a_1u_0(s,a_1)u_1(m,a_1)+\kappa_2\alpha_{1,s}a_1u_1(s,a_1)u_0(m,a_1)}{\kappa_2^2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}$$
$$-\frac{b\kappa_1^2\kappa_2^2}{c\kappa_2^2}u_0(s,b)u_0(m,b)\Bigg)$$

$$+\frac{k_2\kappa_1^2}{v_0(s,a_1)v_0(m,a_1)}\frac{\kappa_1\alpha_{2,m}a_1v_0(s,a_1)v_1(m,a_1)-\kappa_1\alpha_{2,s}a_1v_1(s,a_1)v_0(m,a_1)}{\kappa_1^2(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)}$$

$$=\frac{k_1a_1}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}\left(-\kappa_2\alpha_{1,m}\frac{u_1(m,a_1)}{u_0(m,a_1)}+\kappa_2\alpha_{1,s}\frac{u_1(s,a_1)}{u_0(s,a_1)}\right)-\frac{k_1\kappa_1^2\kappa_2^2b}{c}\frac{u_0(s,b)u_0(m,b)}{u_0(s,a_1)u_0(m,a_1)}$$
$$+\frac{k_2a_1}{\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2}\left(\kappa_1\alpha_{2,m}\frac{v_1(m,a_1)}{v_0(m,a_1)}-\kappa_1\alpha_{2,s}\frac{v_1(s,a_1)}{v_0(s,a_1)}\right)$$

となる。境界条件 (4) から

$$k_1\kappa_2\alpha_{1,s}\frac{u_1(s,a_1)}{u_0(s,a_1)}=k_2\kappa_1\alpha_{2,s}\frac{v_1(s,a_1)}{v_0(s,a_1)},$$
$$k_1\kappa_2\alpha_{1,m}\frac{u_1(m,a_1)}{u_0(m,a_1)}=k_2\kappa_1\alpha_{2,m}\frac{v_1(m,a_1)}{v_0(m,a_1)}$$

なることが言われる。又 (53) で与えられているように

$$\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2=\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2$$

であるから，$s\neq m$ の場合には，次の結果を得る：

$$k_1\kappa_2^2\int_b^{a_1}X_{1,s}(r)X_{1,m}(r)rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}(r)X_{2,m}(r)rdr$$
$$=a_1\left(-\frac{k_1\kappa_2\alpha_{1,m}}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}\frac{u_1(m,a_1)}{u_0(m,a_1)}+\frac{k_2\kappa_1\alpha_{2,m}}{\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2}\frac{v_1(m,a_1)}{v_0(m,a_1)}\right)$$
$$+a_1\left(\frac{k_1\kappa_2\alpha_{1,s}}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}\frac{u_1(s,a_1)}{u_0(s,a_1)}-\frac{k_2\kappa_1\alpha_{2,s}}{\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2}\frac{v_1(s,a_1)}{v_0(s,a_1)}\right)-\frac{k_1\kappa_1^2\kappa_2^2b}{c}\frac{u_0(s,b)u_0(m,b)}{u_0(s,a_1)u_0(m,a_1)}$$
$$=-\frac{k_1\kappa_1^2\kappa_2^2b}{c}\frac{u_0(s,b)u_0(m,b)}{u_0(s,a_1)u_0(m,a_1)}. \tag{101}$$

次に $s=m$ の場合を考える。

$$\int_b^{a_1}\{X_{1,m}(r)\}^2rdr=\frac{1}{\{u_0(m,a_1)\}^2}\int_b^{a_1}\{u_0(m,r)\}^2rdr$$
$$=\frac{1}{\{u_0(m,a_1)\}^2}\left[\frac{r^2}{2}\{u_1(m,r))^2+(u_0(m,r))^2\}\right]_b^{a1}$$
$$=\frac{1}{\{u_0(m,a_1)\}^2}\left[\frac{a_1^2}{2}\{(u_1(m,a_1))^2+(u_0(m,a_1))^2\}-\frac{b^2}{2}\{(u_1((m,b))^2+(u_0(m,b))^2\}\right], \tag{102}$$

$$\int_{a1}^{a}\{X_{2,m}(r)\}^2rdr=\frac{1}{\{v_0(m,a_1)\}^2}\left(\frac{a^2}{2}\{(v_1(m,a))^2+(v_0(m,a))^2\}\right.$$
$$\left.-\frac{a_1^2}{2}\{(v_1(m,a_1))^2+(v_0(m,a_1))^2\}\right)$$

である。然るに

$$v_1(m,a)=0$$

であるから，

$$\int_{a_1}^{a}\{X_{2,m}(r)\}^2 r dr=\frac{1}{\{v_0(m,a_1)\}^2}\left(\frac{a^2}{2}(v_0(m,a))^2-\frac{a_1{}^2}{2}\{(v_1(m,a_1))^2+(v_0(m,a_1))^2\}\right) \tag{103}$$

が得られる。

(102) 及び (103) に依り

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}\{X_{1,m}(r)\}^2 r dr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}\{X_{2,m}(r)\}^2 r dr\\&=\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\{u_0(m,a_1)\}^2}\left(\frac{a_1{}^2}{2}\{(u_1(m,a_1))^2+(u_0(m,a_1))^2\}\right.\\&\qquad\left.-\frac{b^2}{2}\{(u_1(m,b))^2+(u_0(m,b))^2\}\right)\\&+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\{v_1(m,a_1)\}^2}\left(\frac{a^2}{2}(v_0(m,a))^2-\frac{a_1{}^2}{2}\{v_1((m,a_1))^2+(v_0(m,a_1)^2\}\right)\\&\qquad\equiv U(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})\end{aligned} \tag{104}$$

となる。(104) の式は複雑なので $U(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})$ と書くこととする。

(101), (104) により

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,m}(r)r dr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,m}(r)r dr\\&=-\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}\sum_{s=1}^{\infty}M_s\frac{u_0(s,b)}{u_0(s,a_1)}+M_m\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\left(\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}\right)^2\\&\qquad+M_m U(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})\end{aligned} \tag{105}$$

となる。これに (92) から得られる関係：

$$\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}f_1(b)=\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}\sum_{s=1}^{\infty}M_s\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}$$

を加えれば

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,m}(\lambda)\lambda d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,m}(\lambda)\lambda d\lambda+\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}f_1(b)\\&=M_m\left(U(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})+\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\left(\frac{u_0(m,b)}{u_0(m,a_1)}\right)^2\right)\\&=M_m V(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})\end{aligned} \tag{106}$$

が得られる。(106) の右辺の複雑な式を $V(\alpha_{1,m},\alpha_{2,m})$ と書いてある。

(106) によって M_s が与えられるので, $f_1(r), f_2(r)$ の展開式は次のように書かれる：

$$\begin{aligned}f_1(r)&=\sum_{s=1}^{\infty}M_s X_{1,s}(r)\\&=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}(r)}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right.\\&\qquad\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda+\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2 b}{c}\frac{u_0(s,b)}{u_0(s,m)}f_1(b)\right),\end{aligned} \tag{107}$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_s X_{2,s}(r)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}(r)}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda+\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2b}{c}\frac{u_0(s,b)}{u_0(s,a_1)}f_1(b)\right). \tag{108}$$

(107), (108) によって任意の関係の展開式ができたので，問題の解は次のように書かれる：

$$u_1=\exp\{-c_1{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}$$

$$\times\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\cdot$$

$$\times\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(k_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\lambda d\lambda\right.$$

$$+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}\lambda d\lambda$$

$$\left.+\frac{k_1\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2b}{c}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{(c_1{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2)Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}b)-c\kappa_2\alpha_{1,s}Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}f_1(b)\right), \tag{109}$$

$$u_2=\exp\{-c_2{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}$$

$$\times\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}a)}}\left(\qquad〃\qquad\right). \tag{110}$$

この式の中の $V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})$ は (106) で与えられる複雑な式である。

III　次の問題として $r=b$ 及び $r=a$ に於ける境界条件を

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=b}=0, \tag{111}$$

$$(u_2)_{r=a}=0 \tag{112}$$

の如く採ることとする。他は問題 I と同じである。

この問題の解は問題 I の解と殆んど同じに出来る。固有値 $\kappa_2\alpha_1, \kappa_1\alpha_2$ は (22) と，(26) の代りに

$$k_1\kappa_2\alpha_1\frac{\dfrac{J_1(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}-\dfrac{Y_1(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_1 b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_1 a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_1 b)}}=k_2\kappa_1\alpha_2\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_2 a)}-\dfrac{Y_1(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_2 a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_2 a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_2 a)}} \tag{113}$$

を用いて決定される。

問題 I に用いたと同じ数値を用いて Fig. 2 と Fig. 3 に対する図を画けば Fig. 6 と Fig. 7 になる。

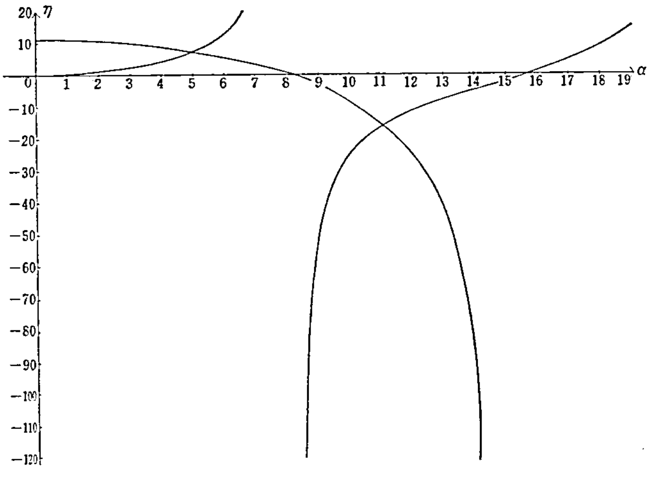

Fig. 6

今

$$X_{1,s}(r)=\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}, \tag{114}$$

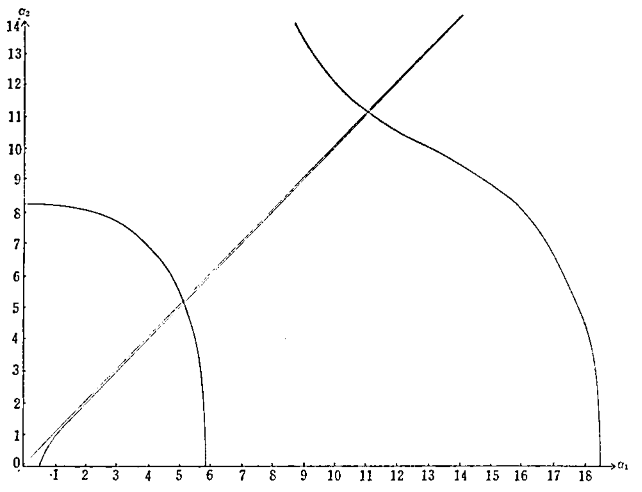

Fig. 7

$$X_{2,s}(r)=\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}} \tag{115}$$

と置くときは，解 u_1, u_2 及び任意の関数 $f_1(r), f_2(r)$ は

$$u_1=\exp\{-c_1^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2t\}X_{1,s}(r), \tag{116}$$

$$u_2=\exp\{-c_2^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}M_s\exp\{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2t\}X_{2,s}(r), \tag{117}$$

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{1,s}(r), \tag{118}$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{2,s}(r) \tag{119}$$

の如く表わされる。M_s は初期条件から決定される定数である。

又

$$u_n(r,s)=\frac{J_n(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_n(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}, \tag{120}$$

$$v_n(r,s)=\frac{J_n(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_n(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} \tag{121}$$

と置く。然るときは $f_1(r)$，$f_2(r)$ の展開式は次のようになる：

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{1,s}(r)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}(r)}{U(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{u_0(r,s)}{u_0(a_1,s)}}{U(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{u_0(a_1,\ s)}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)u_0(\lambda,s)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{v_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)v_0(\lambda,s)\lambda d\lambda\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}}{U(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$
$$\times\left\{\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\lambda d\lambda\right\},\tag{122}$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{2,s}(r)$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}(r)}{U(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right)$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{v_0(r,s)}{v_0(a_1,s)}}{U(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{u_0(a_1,s)}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)u_0(\lambda,s)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{v_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)v_0(\lambda,\ s)\lambda d\lambda\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}}{U(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$
$$\times\left\{\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\lambda d\lambda\right\}.\tag{123}$$

但し $U(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})$ は次の式を表わす：

$$U(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})=\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\{u_0(a_1,s)\}^2}\left[\frac{a_1{}^2}{2}(\{u_0{}'(a_1,s)\}^2+\{u_0(a_1,s)\}^2)-\frac{b^2}{2}\{u_0(b,\ s)\}^2\right]$$

$$+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\{v_0(a_1,s)\}^2}\left[\frac{a^2}{2}\{v_0'(a,s)\}^2-\frac{a_1{}^2}{2}(\{v_0'(a_1,s)\}^2+\{v_0(a_1,s)\}^2)\right]. \tag{124}$$

上の結果により求める解は次のようになる：

$$u_1=\exp\{-c_1{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2t\}}{U(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(k_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(k_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(k_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(k_2\alpha_{1,s}b)}}$$

$$\times\left\{\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}\int_b^{a_1}f_1(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}\right)\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}\right)\lambda d\lambda\right\}, \tag{125}$$

$$u_2=\exp\{-c_2{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2t\}}{U(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}$$

$$\times\left(\qquad\qquad 〃 \qquad\qquad\right). \tag{126}$$

IV　問題IIIの境界条件 (112) の代りに

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}+c\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a}=0 \tag{127}$$

を用いることとする。他は問題IIIと同じ微分方程式，境界条件及び初期条件を用いる。

この場合の $\kappa_2\alpha_1,\kappa_1\alpha_2$ を決める式は (26) と (113) の代りのに

$$k_1\kappa_2\alpha_1\left(\frac{\dfrac{J_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_1b)}-\dfrac{Y_1(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_1b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_1b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_1a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_1b)}}\right)$$

$$=k_2\kappa_1\alpha_2\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_2{}^2)J_0(\kappa_1\alpha_2a)+c\kappa_1\alpha_2J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\dfrac{Y_1(\kappa_1\alpha_2a_1)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_2{}^2)Y_0(\kappa_1\alpha_2a)+c\kappa_1\alpha_2Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_2{}^2)J_0(\kappa_1\alpha_2a)+c\kappa_1\alpha_2J_1(\kappa_1\alpha_2a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_2a_1)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_2{}^2)Y_0(\kappa_1\alpha_2a)+c\kappa_1\alpha_2Y_1(\kappa_1\alpha_2a)}} \tag{128}$$

なる式から決定される。

Fig. 5 と Fig. 6 に対する図は同じ数値を用いる Fig. 8, Fig. 9 となる。

問題IVに於いて

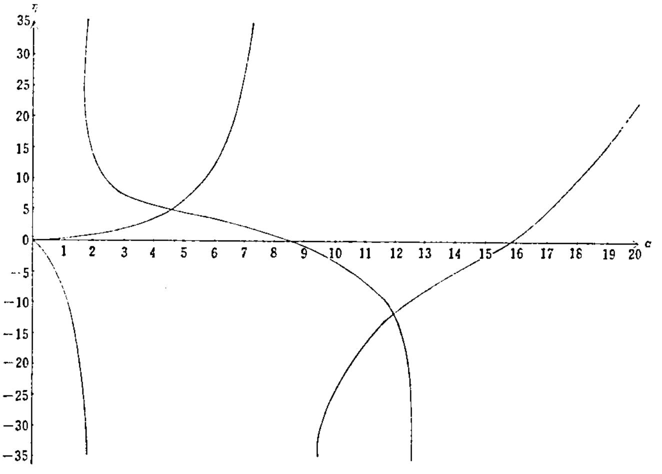

Fig. 8

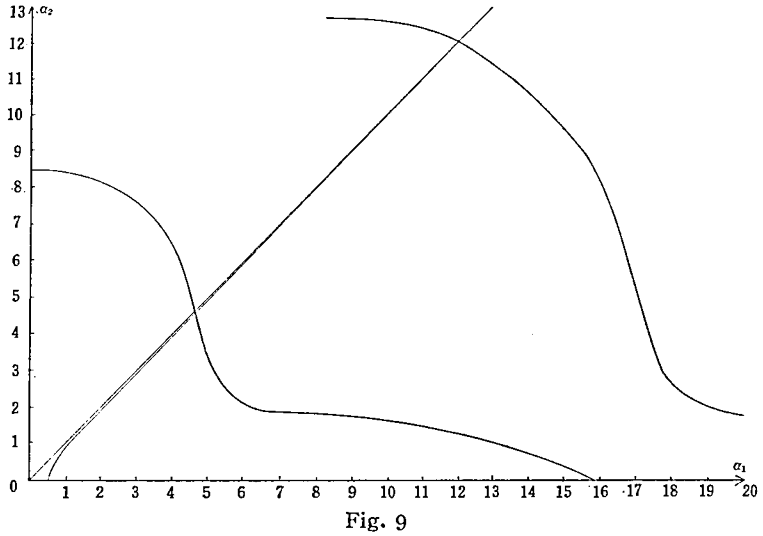

Fig. 9

$$X_{1,s}(r)=\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}}, \tag{129}$$

$$X_{2,s}(r)=\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)+c\kappa_1\alpha_{2,s}J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)+c\kappa_1\alpha_{2,s}Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)+c\kappa_1\alpha_{2,s}J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)+c\kappa_1\alpha_{2,s}Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}} \tag{130}$$

と置くときは，u_1，u_2 及び任意の関数 $f_1(r)$，$f_2(r)$ は夫々 (116)，(117)，(118)，(119) と同じ形の式で表わされることになる。

又簡単のために次のように置く：

$$u_n(r,s)=\frac{J_n(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}-\frac{Y_n(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{Y_1(\kappa_2\alpha_{1,s}b)}, \tag{131}$$

$$v_n(r,s)=\frac{J_n(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)+c\kappa_1\alpha_{2,s}J_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}$$
$$-\frac{Y_n(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{(c_2{}^2+\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2)Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)+c\kappa_1\alpha_{2,s}Y_1(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} \tag{132}$$

計算の結果 $f_1(r)$, $f_2(r)$ は次の如く表わされる：

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}(r)}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2a}{c}\frac{v_0(a,s)}{v_0(a_1,s)}f_2(a)\right), \tag{133}$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}(r)}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)\lambda d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2a}{c}\frac{v_0(a,s)}{v_0(a_1,s)}f_2(a)\right). \tag{134}$$

但し $V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})$ は次の式を表わす：

$$V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})=\frac{k_1\kappa_2{}^2}{\{u_0(a_1,s)\}^2}\left[\frac{a_1{}^2}{2}\{(u_1(a_1,s))^2+(u_0(a_1,s))^2\}-\frac{b^2}{2}\{(u_0(b,s))^2\}\right]$$
$$+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\{v_0(a_1,s)\}^2}\left[\frac{a^2}{2}\{(v_1(a,s))^2+(v_0(a,s))^2\}-\frac{a_1{}^2}{2}\{(v_1(a_1,s))^2\right.$$
$$\left.+(v_0(a_1,s))^2\}\right]+\frac{k_2\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2a}{c}\left(\frac{v_0(a,s)}{v_0(a_1,s)}\right)^2. \tag{135}$$

求める解は次の如く書かれる：

$$u_1=\exp\{-c_1{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{1,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}X_{1,s}(r)\left(k_1\kappa_2{}^2\int_b^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}(\lambda)d\lambda\right.$$
$$\left.+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}(\lambda)\lambda d\lambda+\frac{k_2\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2a}{c}\frac{v_0(a,s)}{v_0(a_1,s)}f_2(a)\right), \tag{136}$$

$$u_2=\exp\{-c_2{}^2t\}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\exp\{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_{2,s}{}^2t\}}{V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})}X_{2,s}(r)\left(\qquad\qquad〃\qquad\qquad\right). \tag{137}$$

$X_{1,s}(r)$, $X_{2,s}(r)$, $v_n(r,s)$, $V(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s})$ に複雑な式を入れて書くことは省略する。