

ランダム系列に関する一考察

小 野 英 夫*

序

いくつかの標識の集合を考える場合、その要素を全く無規則に並べたものがランダム系列である。例えば、乱数表などはその一例である。1919 年、Richard Von Mises がこのようなものをコレクティブ (Kollektiv) と呼んでその満足すべき条件を提唱し、確率論の基礎としようとした。Mises は、一つの系列のランダム性をその系列から「項位選出」によって部分系列を選出し、その部分系列の各標識の相対頻度の極限が、もとの系列におけるその標識の相対頻度の極限に等しいということにその特徴をもとめた。

Mises の確率論の基礎をなすものは、Kollektiv である。

二つの標識 0, 1 をもつ標識系列

$$m_1, m_2, m_3, \dots$$

が、つぎの二つの条件を満足するとき、この系列を Kollektiv といっている。

(条件 1) 標識系列の最初の n 項のうち、0 と 1 なる標識をもつ項の数をそれぞれ n_0, n_1 とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = q = 1 - p$$

なる極限值が存在する。

(条件 2) 標識系列 $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ なる原系列からある「項位選出」によって得られる「すべて」の部分系列をつくるとき、その部分系列において最初の n' 項のうち、0, 1 なる標識をもつ項の数をそれぞれ n'_0, n'_1 とすれば

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_0}{n'} = p, \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_1}{n'} = q = 1 - p$$

である。ここでいう「項位選出」とは、系列のある項をぬき出すかどうかを、その項の標識が何であるかによらないで定めるものである。例えば標識系列 m_1, m_2, m_3, \dots から部分系列 $m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3}, \dots$ を抜き出す方法で、次のようなものを考える。まず m_1 を抜き出して、部分系列の第 1 項にするか否かは、 m_1 の何であるかには無関係に定める。次に m_2 を抜き出して部分系列の項とするか否かは、 m_1 が何であるかという知識を使っても良いが、 m_2 の何であるかには無関係に定める。一般に m_i を抜き出すか否かは、 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{i-1}$ の知識は使っても良いが、 m_i 自体何であるかという事は用いずに定める。このようにして、原標識系列から部分系列を抜き出すことを「項位選出」と Mises は、定義した。

* 一般教養助教授 数学

最初に Mises が条件 2 において「すべての」項位選出を許すといったこのような考えに対して批判がなされ、論理的矛盾の例が作られている。このような異議に対し、1937 年 Von A. Wald は、「項位選出」の数が、せいぜい可附番個ならば、そのような矛盾は起らないことを示した。Mises のいった「すべて」という言葉も、人間の行為として出来るすべてと考えれば、その数は可附番以上にすることはないから、その制限は不適當でないと考えられる。したがって、「項位選出」が可附番個であるならば、Kollektiv は存在するということが証明されたのは、非常に都合のよいことである。

本論文では、これらのことを見渡した上で 0, 1 系列についてその中に現われる順列をパターンとして注目し、考察することを考えた。この考えは、Popper が 1935 年に取り上げていたのでこれを参照、検討して考察を進めた。そしてまず Popper の論文から示唆されるものを、具体的現実の取扱いに適應させることを考えた。ここで行なわれる主な考え方は、0, 1 系列の中に一つの n 項順列 π_n が現われるとき、その直後にくる 0, 1 の頻度を着眼することである。そしてこの頻度が 2^n 個の n 項順列 π_n についてすべて等しくかつこれがもとの系列の 0 と 1 の頻度と同じ場合に、その系列を n -free とよぶ。これはパターン π_n の後につづくものが、このパターンに無関係なことを示すと考えられて、 π_n による「after effect がない」とみなされる。

Popper の論文は、標本空間 M がもっぱら二つの要素から成り立っている場合について、「after effect のない系列」を作る為に、一つのある構成方法を提示し、ランダムな経験に近似する数学系列 (mathematical sequence) を見つけ出そうと試みている。これは n -free 0, 1 系列なるものを出発点として、absolute free な 0, 1 系列なる概念を導き、その absolute free な 0, 1 系列をランダム系列と定義している。ここでいう absolute free とはあらゆる自然数 n について n -free である系列のことである。

さて、これらのことを参考にここでは次のことを私は提案した。すなわち、ある系列のランダム性を検定する場合にこの「 n -free の性質」を使うことである。日常の作業においてある系列のランダム性を検定する手段として、「連による検定」や「 χ^2 -検定 (組合せ検定)」などが行なわれている。実際これらの二つの検定によってランダム系列と認められた系列に after effect のあるか否かを調べると、確かに「after effect がない系列」となっていることが確認される事例もある。しかしこれらの両検定によってランダム系列と認められた系列でも必ずしも「after effect がない」といえない系列があるかも知れないと考え、その事例を搜索した。その結果、この両検定のいずれにも十分に合格した系列でありながら、after effect がある系列、すなわち n -free でない系列を二、三見出すことが出来た。after effect があるということは、ランダム性としては当然望ましくない性質である。この事例から「 χ^2 -検定」や「連による検定」によって、系列の大域にわたっての頻度の安定性が確かめられるとしても、after effect をともなうというような系列のこまかいところでの disorder は、これらの検定によっては見破られないという注目すべき事実を発見した。このようなことから、ある系列がランダムであるか否かを検定するとき、この「 n -free の性質」を使うことを提案した。以上のことに関しては第 3 節において論じる。これらは、この論文の主要点の一つである。

つぎに、最初に n -free 系列の一つの作り方を、実際に 0 の相対頻度が $\frac{1}{2}$ の場合、 $\frac{2}{3}$ の場合、 $\frac{3}{5}$ の場合を取り上げて提示した。これは、Popper の論文においては、0 と 1 の頻度比が、1:1 のときだけしか示されていなかったものを頻度比が、任意の整数比のと

きまでに一般化したものである。Popper は、その論文の中で n -free の作り方において 1-free, 2-free, 3-free, ..., の系列の 1 と 0 の相対頻度 $p = \frac{1}{2}$ の場合についての一つの具体的な作り方をのべ、 n -free ということをもとにして議論を展開している。しかし相対頻度 p が $\frac{1}{3}$ とか、 $\frac{2}{5}$ とか、..., 一般に $\frac{r}{m}$ (既約分数, $m > r$) のときには、どのようにして作るのかははっきり示していない。これらの問題に対して、一つの n -free 系列を作るとき、0 と 1 の配列の可能なすべての n 項順列 π_n を考えて、これに続く項の選択法に着目した。そしてランダムな経験に近似する数学系列 (mathematical sequence) を作ることを試みた。本講究では、0 の相対頻度 ${}_nF(0) = \frac{1}{2}$, ${}_nF(0) = \frac{2}{3}$, ${}_nF(0) = \frac{3}{5}$ の場合を取り上げ、実際に n -free 系列を作る实例を示した。

この方法は、0 の相対頻度 $\frac{1}{2}$ のみならず、その $p = \frac{1}{2}$ の n -free 系列を作る同じ方法をもって、相対頻度 $p = \frac{r}{m}$ (既約分数, $m > r$) なる n -free 系列を作る場合にも拡張して使用することができる。この場合、すべての n 項順列 π_n の中である n 項順列 π_n は頻繁に使われ、ある n 項順列 π_n は、頻繁に使われないが、しかし、0 と 1 の割り合い、順序は一定になっており相対頻度 p は、与えられた値を持っている。したがってこの方法は Popper の n -free 系列の作り方より明確になり、拡張使用できる。これらに関しては第 4 節において論じられる。これは本論文における主要点の一つである。

第 5 節においては、 n -free 系列中には、0, 1 の 2^n 個の n 項順列 π_n のいずれもが、必ず現われてくるということについて論じる。したがって、 n -free な 0, 1 系列は、 n がどのように大きな整数であっても、また α における 0 の相対頻度 ${}_nF(0) = \frac{r}{m}$ (既約分数, $m > r$) が、どんな m, r でも作れることが示された。

つぎに、無限 0, 1 系列 α が、「 n -free であるならば、 α は $(n-1)$ -free である」ことを示した。すなわち、 n -free が検証されれば、 n より小さい整数 K についての K -free をいちいち検証する必要はなくなる。これによってある十分大きな n について系列が n -free であることを示せば、それが、absolute free 系列に良く接近することが示される。これに関しては、第 6 節において論ぜられる。なお、これらの検討については、佐藤良一郎氏(未発表論文)の示唆に負うところが多い。

以上 n 項順列 π_n をパターンとして注目し、これにもとづいて、 n -free なる概念を基礎にし、after effect についての問題について論ぜられた。実は、after effect に関しては、これに先立ち、一般の標識系列について、H. Reichenbach が考察した業績があり、これを結びつけて前節までの考察を補完することも意味があると思われたので以下にこれに関して取り上げた。

Hans Reichenbach は、normal 系列というものを考えた。Reichenbach によれば、ランダム系列であるというためには、「after effect から自由」という性質は必要であるが十分ではない。その十分条件としては、規則的分割 (the regular division)(例えば、7 番目の項 y_7 の選出)によって、原系列 A より項位選出 (この選出を S とする) された部分系列においての B の頻度 $P(A, S, B)$ が、原系列における B の頻度 $P(A, B)$ と等しいことを条件とした。

ランダム系列の一つの特性として after effect がないということが望ましく、Popper の n -free はこのことを実現する一つの手段であった。また absolute free といったくり返して作った数学系列をもってランダムへの近似を試みたわけだが、Popper の作った方法は長さ 2^{n+1} でもとにもどり、以後はこの循環節のくり返しになる。また第 5 節で示し

た作り方においても m^{n+1} の循環節のくり返しになる。しかし、このような数学系列はその循環が、十分に長ければその一部分をとってランダムと考えられる有限系列に近似できるであろうが、これを無限に循環させては、周期的になるというランダムとしては、不適格な性質をもつことになる。したがって「after effectがない」だけでは不十分で、periodicの選出を調べなければならない。これを解決するために Reichenbach の理論を参照し、前節であげた 2,000 回のサイコロ投げで作った自然系列などを Reichenbach の理論にあてはめたらどうなるかを調べた。その結果、良き一致を得られることを確認した。これらに関しては、第 7 節、第 8 節、第 9 節において論じられる。

第 1 節 n -free 系列

定義

0, 1 を項とする有限または無限の系列を、0, 1 系列 (alternative sequence) という。つぎの系列 α を 0011 を循環節とする無限 0, 1 系列であるとする

$$(\alpha) 0011001100110011001\cdots$$

ここで、この系列 α における 0 の相対頻度を ${}_aF(0)$, 1 の相対頻度を ${}_aF(1)$ と表わすことにする。

系列 α において

$${}_aF(0) = {}_aF(1) = \frac{1}{2}$$

である。

つぎに、この系列 α から「1 の直後」の項をすべて選出してできた部分系列 α_1' は

$$(\alpha_1') 101010101\cdots$$

なる 10 を循環節とする系列である。この α_1' においては

$${}_{\alpha_1'}F(0) = {}_{\alpha_1'}F(1) = \frac{1}{2}$$

であり、これはもとの系列 α における ${}_aF(0)$, ${}_aF(1)$ と同じである。すなわち

$${}_{\alpha_1'}F(0) = {}_aF(0), {}_{\alpha_1'}F(1) = {}_aF(1)$$

となる。このとき系列 α は「1 を Predecessor とする項位選出に対しては insensitive」という。ここで、系列 α から「1 の直後」の項位選出してできる α の部分系列の 0 と 1 の相対頻度を ${}_aF(0|1)$, ${}_aF(1|1)$ と表わすことにする。そうすると上述のことは

$${}_{\alpha_1'}F(0) = {}_aF(0|1), {}_{\alpha_1'}F(1) = {}_aF(1|1)$$

となるから

$$(1) \quad {}_aF(0|1) = {}_aF(0), {}_aF(1|1) = {}_aF(1)$$

である。

同様にして、この系列 α から「0 の直後」の項をすべて選出してできた部分系列 α_2' についても

$${}_{\alpha_2'}F(0) = {}_{\alpha_2'}F(1) = \frac{1}{2}$$

となり、もとの系列 α における ${}_aF(0)$, ${}_aF(1)$ と同じである。このとき系列 α は、「0 を predecessor とする項位選出に対しては insensitive」という。すなわち

$$(2) \quad {}_aF(0|0) = {}_aF(0), \quad {}_aF(1|0) = {}_aF(1)$$

である。

Popper は、(1), (2) をみたすような系列 α を、「1-free 系列」という。

また、0, 1 系列

$$(\beta) \quad 00011101000111010001110100011101\cdots$$

00011101 を循環節とする系列とすると

$${}_{\beta}F(0) = {}_{\beta}F(1) = \frac{1}{2}$$

である。

ここで、系列 β から「対 11 の直後」にある項を選出すると、その部分系列 β' は

$$(\beta') \quad 10101010\cdots$$

となる。系列 β' において

$${}_{\beta'}F(0) = {}_{\beta'}F(1) = \frac{1}{2}, \quad {}_{\beta'}F(1) = {}_{\beta'}F(1) = \frac{1}{2}$$

である。したがって

$$(3) \quad {}_{\beta}F(0|11) = {}_{\beta}F(0), \quad {}_{\beta}F(1|11) = {}_{\beta}F(1)$$

が成り立つ。

同様に、系列 β において「対 10, 対 01, 対 00 の直後」にある項を選出するとき、得られた β の各部分系列における 0 と 1 の相対頻度は $\frac{1}{2}$ である。したがって

$$(4) \quad {}_{\beta}F(0|10) = {}_{\beta}F(0), \quad {}_{\beta}F(1|10) = {}_{\beta}F(1)$$

$$(5) \quad {}_{\beta}F(0|01) = {}_{\beta}F(0), \quad {}_{\beta}F(1|01) = {}_{\beta}F(1)$$

$$(6) \quad {}_{\beta}F(0|00) = {}_{\beta}F(0), \quad {}_{\beta}F(1|00) = {}_{\beta}F(1)$$

が成り立つ。

このような (3), (4), (5), (6) を同時に満たすような系列 β を「2-free 系列」という。

そしてこの考え方を一般化して、つぎのように n -free を定義する。

定義

0, 1 系列 α から、0 と 1 から成る一つの n 項順列 π_n の直後にある項を選出して得られた部分系列を α' とする。この部分系列 α' における 1 (または 0) の相対頻度が、もとの系列 α の 1 (または 0) の相対頻度に等しいとき、 α は「 π_n を Predecessor とする」という項位選出に対して insensitive である」といい、 2^n 個の n 項順列のいずれに対しても insensitive であるときは α は n -free であるという。

すなわち、すべての n 項順列 π_n について

$${}_aF(1|\pi_n) = {}_aF(1), \quad {}_aF(0|\pi_n) = {}_aF(0)$$

が成り立つとき、 α は n -free であるという。

ここで 0, 1 から成る n 項順列というのは、 K を負でない整数として、 K 個の 0 と $(n-K)$ 個の 1 を、任意の順に一行に並べたものである（可能な n 項順列の個数は 2^n 個である）。

第2節 absolute free な系列

0, 1 系列 α が無限のとき、系列 α の最初から N 個のなかにある 0 の個数を n_0 とし、0 の頻度を ${}_aF(0)$ とすると ${}_aF(0) = \frac{n_0}{N}$ である。この場合、もし極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_0}{N} = P$ が存在するとき、 P を α における 0 の頻度といい、記号 ${}_aF(0)$ で表わす。すなわち

$${}_aF(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_0}{N} = P.$$

定義

無限 0, 1 系列 α において ${}_aF(0) = P$, ${}_aF(1) = 1 - P$ とするとき、 n をどのような整数と定めても、そして 0, 1 n 項順列 π_n のどれをとっても

$$\begin{aligned} {}_aF(0|\pi_n) &= {}_aF(0) = P \\ {}_aF(1|\pi_n) &= {}_aF(1) = 1 - P \end{aligned}$$

ならば α は absolute free な 0, 1 系列という。

これは、すべての整数 n について、 n -free である系列である。Popper は、absolute free な 0, 1 系列をランダム系列または chance like 系列といっている。

第3節 n -free による検定

「連による検定」や「 χ^2 -検定(組合せ検定)」によって、ランダム系列と認められた系列でも、必ずしも「after effect がない」といえない系列が、あるかも知れないという考えをもち、その例を搜索した結果、両検定に合格してもなお「after effect のある系列」を二、三見出すことができた。after effect のあるということは、ランダム性としては当然望ましくない性質である。「 χ^2 -検定」や「連による検定」によって系列の大域にわたっての頻度の安定性が確かめられるとしても、after effect をともなうというような系列のこまかいところでの disorder は、これらの検定によっては見破られない。このようなことから n -free の性質をもってランダム性の検定を行うことを提案したい。

以下に上のことに関する具体例を示す。具体例の例1においては、考える系列が「 χ^2 -検定」と「連による検定」の両検定によってランダム系列と認められ、そして「after effect がない系列」となっていることが確認される実例を示す。例2以降は考える系列が「 χ^2 -検定」や「連による検定」の両検定によってランダム系列と認められる結果が得られるが、しかし「after effect のある系列」の実例を示す。

また、各系列の計算結果のところでは ZR , χ^2 とあるのは次に示す通常行なわれている(イ)と(ロ)における実現値である。

(イ) 連による検定

0, 1 系列において、1, 0 の個数をそれぞれ n_A , n_B とし ($n_A + n_B = N$)、連 (run) の総数を R とする。 n が大のとき

$$ZR = \frac{R - \left(\frac{2n_A \cdot n_B}{n_A + n_B} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{2n_A \cdot n_B \cdot (2n_A \cdot n_B - n_A - n_B)}{(n_A + n_B)^2 (n_A + n_B - 1)}}} \sim N(0, 1)$$

(ロ) χ^2 -検定 (組合せ検定)

系列 x_1, x_2, \dots, x_K を $(x_1, x_2, \dots, x_K), (x_{K+1}, x_{K+2}, \dots, x_{2K}), (x_{2K+1}, x_{2K+2}, \dots, x_{3K}), \dots$ というように K 個のクラス間隔 (class interval) に分割する。そして i 番目のクラス間隔における実測度数を f_i , i 番目のクラス間隔に入る理論度数を F_i とするとき ($\sum_{i=1}^K f_i = N$, $\sum_{i=1}^K F_i = N$),

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} \quad (A)$$

を求める。

式 (A) は, n が大きいとき, χ^2 は自由度 $K-1$ の χ^2 分布にしたがって分布する。(本講究では, クラス間隔を $K=10$ として計算を行なった。)

3.1 n -free で合格する例

例 1

サイコロ投げを 2,000 回行ないつぎの表 1 における系列を得た。(p. 24)

表 1 の系列からつぎの計算結果を得た。(1 の個数を n_A , 0 の個数を n_B , $n_A + n_B = N$ とする)。

N	n_A/N	n_B/N	run	ZR	χ^2
2000	0.4955	0.5045	1012	0.4957244	3.4184103

これより表 1 の系列における 1 と 0 の相対頻度は,

$$\frac{1}{2000} F(1) = \frac{1}{2000} F(0) = \frac{1}{2}$$

である。

また「連による検定」における ZR の実現値が, 1.96 より大きい, -1.96 より小さいければ, 有意水準 5% でランダム性は認められないことになる。表 1 の系列は, $ZR = 0.4957244$ であるから, 「連による検定」によってランダム性とみなせる結果を得た。

また $\chi^2 = 3.4184103$ であるから, 自由度 6 の χ^2 -分布の有意水準 5% で棄却域 ($\chi^2_{6(0.05)} = 12.592$ より大きい部分) に入らず, 表 1 の系列は, χ^2 -検定によってもランダム性とみなせる結果が得られた。

つぎに, 表 1 の系列が 1-free であるかどうか調べるために, 表 1 から 1 の直後の項と 0 の直後の項を項位選出し, それぞれ表 2, 表 3 なる各部分系列を得た。(p. 25)

表 2, 表 3 の各系列よりつぎの結果を得た。

	N	n_A/N	n_B/N	run	ZR	χ^2
表 2	989	0.49039	0.50961	536	2.5895309	3.2348537
表 3	1009	0.50149	0.49851	495	-0.6611520	5.8377123

→

01111	00000	01010	10101	11010	01000	01110	10011
01010	11001	11010	11010	00110	11101	01010	11110
00100	11010	10111	01111	01100	11011	01011	10110
11100	00011	11101	00000	11111	10110	00010	10000
10101	01110	10001	11010	01001	01010	01000	11001
10000	00011	00010	11011	11011	10110	10011	10000
10001	01110	11010	00001	11000	01001	11011	01100
10011	01111	00101	10100	11000	11001	01111	11000
10011	01001	00010	00110	01001	11011	11101	10101
01100	00110	01010	00111	11001	11101	11000	00001
00101	01011	10110	00101	11001	11001	11011	11001
11001	01101	11011	00111	01100	00000	01100	11010
00000	00111	11000	11100	01100	01000	00001	10111
00100	11110	11000	00011	10110	01011	00011	01100
00010	01111	10111	01001	11011	10110	01110	10110
11000	01110	00111	10111	10001	10000	11111	00111
01100	01100	10110	10110	01001	00101	11100	01010
10011	10111	01110	00100	11000	00111	11001	10110
10000	01000	00000	00110	00110	01000	01010	00010
10011	01101	11011	11011	11000	00011	10010	11100
10000	10000	11101	00100	00010	10101	10111	11101
00011	10111	00111	10001	01100	11010	10110	00101
01011	00100	01101	11000	00101	00000	01000	00111
10101	00001	10101	00110	01001	10101	01010	00100
11000	11100	10111	00011	00110	10110	11101	10100
11101	11001	00011	00100	11010	00010	00010	10011
10000	01010	01001	10111	01100	11010	01011	01011
00001	10110	01100	01110	11110	00110	01110	11011
01000	11100	01111	01110	10000	01100	10111	01111
11010	11101	10101	10111	00000	01001	00111	10100
00001	01010	11101	00010	10001	11011	11100	01101
11010	00001	10101	00100	10111	01110	00000	11000
11111	00001	00101	10101	10010	00100	10010	11010
10111	10010	00010	01101	00111	11000	11001	00000
10001	11000	00101	01001	11101	11010	01001	11000
01110	00000	11111	00100	11001	10000	11001	01011
11011	01011	01110	11001	11010	01100	01100	01111
01001	11000	11001	10110	00111	11001	10011	01100
11000	01001	00101	01101	00001	10101	01010	11101
01100	11101	01001	11000	00101	00101	01101	10101
01101	01111	11100	00001	01011	00100	00010	11000
00000	11100	10110	01010	01100	10010	00000	01110
01010	00101	01110	11001	11100	11010	01101	11101
11100	00101	00011	10000	11101	11101	00000	10100
01100	01010	01101	10011	10001	01110	11110	01001
01000	11101	01000	00000	11011	11100	00011	11010
11111	00110	00010	00011	11101	10010	10100	10011
11011	10011	00110	10010	00011	11010	11001	01101
11011	00000	10010	11100	11100	11100	01010	10001
01001	00011	11000	01010	11010	00111	11101	00101

(例 1)

表 1

→

11100	00011	00011	00100	01011	00100	10110	00011
10010	00110	11101	01010	01101	01101	11100	11111
01000	00011	00110	00000	01010	10010	11101	10100
11000	11010	01100	11010	10010	11100	10010	10011
11100	10000	10011	01111	01000	10100	01111	01110
11000	00110	10011	01101	10111	01100	10110	10110
10101	00111	10110	10010	11001	11010	11010	01010
10011	11011	00110	11010	11001	01011	01110	11101
01111	01101	01001	00100	00111	00001	10110	11001
01111	01010	00101	00000	01010	11011	10111	01100
11000	11000	00010	11111	00110	11011	10010	10001
00001	00101	10000	11100	01000	10010	00000	10110
01101	01001	01101	00110	11001	00100	00011	00001
01101	01000	10010	10101	01101	11010	11010	10011
01110	11001	00110	11111	00110	10010	11000	11100
00011	00001	10111	10101	10010	00001	10110	10111
10001	00100	00010	00111	00010	01111	01000	11000
01110	11000	11011	01111	00101	01000	11101	00101
10101	10010	10111	00110	10101	01111	01010	10100
00010	01000	00110	01011	00011	00000	10100	01001
11111	00010	00101	10010	00100	01100	00011	01011
10100	10111	01110	00110	11011	10000	10001	10110
01101	11000	01100	01011	11011	10011	11010	01111
01000	00111	01101	01000	11100	10010	11010	00110
11011	00000	00111	00010	01111	1000		

(例 1)

表 2

→

10000	01111	11010	00110	11110	11110	01111	11001
01111	11011	11110	00011	00001	10001	10001	11110
01101	01110	10010	10000	00100	11111	10100	01001
11100	00100	01011	10101	10111	01001	01100	10110
10010	01010	11111	10001	01100	10110	00000	10111
11001	10101	10101	11101	10000	00010	11000	00001
00100	10010	00000	11010	11000	00110	11001	10000
10111	01110	11110	00100	11001	00010	11001	01111
01010	11001	11011	10010	10000	10111	00001	00000
00001	00101	00011	00011	01111	10000	01011	01000
10001	10100	00111	11100	11010	01101	11100	11110
10011	00001	10000	01000	01110	00111	01010	11111
00101	00101	10010	11111	10110	10010	10110	00100
01101	00001	10101	11011	01111	00011	01001	10010
11110	01001	11000	01011	11111	11000	00101	01100
00011	11100	11001	10011	10000	11101	01110	00001
00100	01011	11010	01010	11111	01000	10110	10010
10000	10010	00011	10111	01010	00100	00010	10101
00010	11111	11101	10100	10011	01001	01100	10101
10100	01010	11110	00111	11111	01110	10001	10011
11111	11000	00111	01000	01100	00000	10110	11010
10100	00001	01100	11110	10110	11100	01100	10001
11000	01100	10011	01101	00111	01011	00111	00000
00110	00011	10100	01000	11011	10101	10101	10100
01110	11110	00010	11010	10011	10011	01001	00011
11001	1011						

(例 1)

表 3

この結果より

$$\text{表1}F(0|1)=\text{表1}F(0),$$

$$\text{表1}F(1|1)=\text{表1}F(1),$$

$$\text{表1}F(0|0)=\text{表1}F(0),$$

$$\text{表1}F(1|0)=\text{表1}F(1).$$

を得た。したがって表1の系列は 1-free であることが確かめられた。また表2, 表3の各系列は「 χ^2 -検定」の結果より (自由度 6, 有意水準 5%) ランダムの特徴を示していることがわかる。「連による検定」によっては, 表3の系列は有意水準 5%でランダム性であると認められる。(表2の系列は有意水準 5%ではランダムであると認められない)。

つぎに, 表1の系列が 2-free であるかどうか調べるために, 対 11, 対 10, 対 01, 対 00 の直後の項を, 項位選出して, 表1における各部分系列 表4, 表5, 表6, 表7を得た。

→

11010100010001011001011000010010111101111
0010100000110100101001010000110000111100
0101110000111011010100101010110100100100
00111010001011001000001110101010100100101
10110011101000001101010101001110000001011
0110101010011110101011000000101100000101
0000100101000100100000000101100100010110
1001011110100010110101011100100101010110
0001100111001011010101011100001100010010
0011010000111000000010010100001111100010
00101001100011011011010101100010101101011
101101110011100110100011001001001010101100
11110

(例 1)

表 4

→

0000110011101011100010001001001011110110
0000101100101000100111111011011101011100
110110000011011111100000110000001010101
000001110000110100011110010101001101111
011011000110001000000001011001001100011
100100110001011101101101000100001000010011
110110110111101110010011000111100110101
10101000110000111000010101010100011100010
10011101111001110110001010000111100100001
1110011110101101101111001110011100101000
0110001000000111111000001101111001010010
0010101110111010000001000111001001111110
01100011110101101001011

(例 1)

表 5

→

10000	10010	10011	01011	00010	10011	11101	11101
10000	01010	00000	11101	11101	00110	10111	01101
01101	01000	10111	00110	01110	00011	01111	10111
11110	11101	10111	10111	01101	11101	11111	11110
10100	01000	11101	11100	11000	00111	11101	00100
00011	01110	11001	00010	11000	10010	01010	00001
10111	01110	11010	10000	10001	11100	10111	11111
11011	10101	10110	11001	00001	00011	11010	00011
11001	01000	01001	00101	10010	00110	01110	11100
11011	11011	10111	11111	10000	10100	00101	10010
00011	00101	00100	11010	01001	00001	11101	11001
11000	10011	10110	00100	11101	10110	00011	11001
01011	10011	10000	00100	10100			

(例 1)

表 6

→

01111	10010	11101	11011	11100	11111	01111	10101
01011	11010	01100	00011	11100	01110	00110	01011
00010	01000	00111	11001	00100	11110	10010	01110
10010	00001	00101	01010	01101	10111	00100	01001
11000	10110	11000	01100	00010	10111	10010	00100
11111	01001	01110	11100	10100	11011	00011	11000
01001	11110	10000	10010	01001	10101	11010	01001
11001	10011	11111	10001	01111	01010	11011	00110
00011	10000	11110	00100	00001	10110	00000	00011
11111	01000	10001	00010	00011	10111	11110	11001
01111	11110	11001	00101	00000	10111	00101	10100
11010	01010	01100	10110	10110	00101	10010	01001
10111	00100	01101	00011	10101			

(例 1)

表 7

この表 4～表 7 の各系列から、つぎの結果を得た。

	N	n_A/N	n_B/N	run	ZR	χ^2
表 4	485	0.44536	0.55464	272	2.8887463	9.1351595
表 5	503	0.49105	0.50895	242	-0.9303886	7.4917612
表 6	505	0.53267	0.46733	246	-0.5745561	8.8227396
表 7	505	0.51089	0.48911	250	-0.3012749	1.1083860

上の計算結果より

$$\text{表1}F(0|11)=\text{表1}F(0|10)=\text{表1}F(0|01)=\text{表1}F(0|00)=\text{表1}F(0)$$

$$\text{表1}F(1|11)=\text{表1}F(1|10)=\text{表1}F(1|01)=\text{表1}F(1|00)=\text{表1}F(1)$$

となる。

したがって、表 1 の系列は 2-free であることが確かめられた。

また、「 χ^2 -検定」によると、表 4～表 7 の各系列は、ランダム性と認められ、「連による検定」によって表 4、表 5、表 6、表 7 の各系列はランダム性と認められる。

今度は、表 1 の系列が 3-free であるかどうか調べるために 1 と 0 からなる 3 項順列の直後の項を項位選出し、表 1 における各部分系列を得た。3 項順列が、100, 101, 110, 111, 000, 001, 010, 011 のときのそれぞれの部分系列はそれぞれ表 8, 表 9, 表 10, 表 11, 表 12, 表 13, 表 14, 表 15 である。

→

01011	00110	00001	11010	01000	01111	10101	10011
01010	10111	11010	00001	10100	11100	00101	11101
01010	00100	10110	01001	01010	00001	11010	10111
01100	10111	10100	10001	01100	00011	00011	01110
11010	00111	00111	01110	01010	11101	10110	00100
11111	01011	10000	00110	11000	10011	11110	10111
00100	01						

(例 1)

表 8

→

00010	00010	10100	01001	11101	11010	00100	00111
10110	11110	10110	01010	01111	11110	11111	10110
11111	01100	11100	01111	10001	10110	01001	10000
00000	10111	01000	11010	11111	01011	01101	10001
00110	00111	01100	10001	00110	11100	11010	00001
01000	01100	10101	11000	11011	01000	11100	01011
00100	11111	00001	00				

(例 1)

表 9

→

01110	11110	11101	11101	10110	00111	10110	11010
10001	01110	00101	00010	01101	00100	01010	10010
11110	11001	00010	01001	10001	10011	11000	11110
00100	10110	10000	11111	00101	10110	10010	01110
11011	11101	11011	11000	10101	00011	00000	01111
01001	00100	01001	11010	11100	00000	10011	10011
01001	01101	00101	00110	11000	0011		

(例 1)

表 10

→

10000	01001	00011	01110	00100	00001	01110	01101
10100	00001	00001	10001	00110	00000	10101	10010
00011	00101	00001	11000	10010	00000	00010	00100
01110	00100	01100	00110	10110	01000	01101	00010
01100	00111	10000	10101	00010	00100	11010	11011
01001	00000	10111	0				

(例 1)

表 11

→

00010	11100	10010	10111	00001	10110	01011	11101
10000	11000	00100	00011	11000	01000	11001	01110
11110	01001	00000	00110	10100	01010	10011	11100
10001	00101	11110	10100	10111	11001	00010	00111
10010	00110	11011	00110	01010	00101	11110	10101
10001	00100	00010	00011	01101	00111	11000	00100
10101	01001	11101	1				

(例 1)

表 12

→

00111	10111	10010	00111	01001	01010	11001	00101
10110	00111	01111	11010	11010	11111	11110	00001
01110	11000	11001	10011	01001	00111	01011	01110
10100	10011	01111	11110	00100	11100	11000	00000
11100	10101	11011	10111	11111	11100	01110	00001
00100	10011	10110	10110	00111	10100	11101	00011
00010	10						

(例 1)

表 13

→

11110	00111	01110	11101	01110	00110	01001	00010
10000	01110	01111	10001	00111	00111	00000	10101
00001	11011	11110	10010	10011	10011	00000	10100
01100	11100	01110	10010	01011	00011	10000	01100
00111	00001	10111	11101	01111	11101	11000	10110
10010	10101	01010	11000	01101	11010	01100	1

(例 1)

表 14

→

11100	10011	01100	01011	10110	00011	01101	10001
00010	01100	01111	01111	10101	00011	00110	10000
11110	10011	10110	00011	11010	00000	11111	10111
10000	01100	00110	00101	10010	10000	00011	01001
11011	10011	11101	01101	00010	10111	11100	01001
01001	10001	00000	01011	00010	01001	10100	11111
00011	11011	10101	10010	01011	1101		

(例 1)

表 15

この表 8, 表 9, 表 10, 表 11, 表 12, 表 13, 表 14, 表 15 の各系列より, つぎの計算結果を得た。

	N	n_A/N	n_B/N	run	ZR
表 8	247	0.51012	0.48988	132	0.9632234
表 9	257	0.51362	0.48638	125	-0.5509974
表10	269	0.50929	0.49071	142	0.8000627
表11	216	0.37037	0.62963	104	0.3304814
表12	256	0.47266	0.52734	130	0.1737130
表13	247	0.55061	0.44939	121	-0.2879376
表14	236	0.51271	0.48729	115	-0.5122480
表15	269	0.50558	0.49442	129	-0.7921610

この結果によると、 $\text{表}1F(1|111)$ と $\text{表}1F(0|111)$ は、他の系列の場合と比べると、それぞれ $\text{表}1F(1)$ と $\text{表}1F(0)$ よりやや離れるが、それほど差はなく、各表の系列における 1 と 0 の相対頻度は、もとの表 1 の系列における 1 と 0 の相対頻度に等しい。
すなわち

$$\begin{aligned} \text{表}1F(1|100) &= \text{表}1F(1|101) = \text{表}1F(1|110) = \text{表}1F(1|111) = \text{表}1F(1|000) \\ &= \text{表}1F(1|001) = \text{表}1F(1|010) = \text{表}1F(1|011) = \text{表}1F(1), \\ \text{表}1F(0|100) &= \text{表}1F(0|101) = \text{表}1F(0|110) = \text{表}1F(0|111) = \text{表}1F(0|000) \\ &= \text{表}1F(0|001) = \text{表}1F(0|010) = \text{表}1F(0|011) = \text{表}1F(0) \end{aligned}$$

となる。

したがって、表 1 の系列は、3-free であるといえる。また、表 8～表 15 の系列において、データ数（項数）が少ないために「 χ^2 -検定」を行なうのは無理であるが、「連による検定」に関しては、これらの部分系列がランダム性の特徴を示すことが分った。

以上のことより、サイコロ投げを行なって得た表 1 の系列は、「連による検定」と「 χ^2 -検定」の両検定においてランダム系列と認められ、また 3-free であり、2-free であり、1-free となっていることが確認された。

3.2 n-free では不合格となる例

例 2

→

00010	10101	00101	00101	01001	11100	10111	10010
01010	01111	01001	00111	00011	10100	11110	10011
10010	00111	01010	11101	00001	01110	10100	10100
11110	01110	10001	01001	11010	01111	10000	01110
00101	01000	01111	01110	01011	10011	10010	11100
00111	10101	00101	11100	11100	10100	10101	01000
11100	11101	11010	00111	01000	11110	10001	11100
10111	00111	11101	00010	00001	00010	10101	00001
00001	11000	11100	10111	00101	11101	00011	11000
01110	01010	01110	00010	10001	11010	00111	00101
00001	11001	00001	11110	01001	11001	01000	10100
10011	11001	00100	01000	01110	10011	11101	11001
01000	01111	00010	10011	10100	01000	01010	01110
01010	11101	00111	11010	00001	00111	11000	01110
01010	10010	00101	11001	00011	10011	11001	01010
11110	01110	00011	10000	10100	10011	11000	11110
11110	10011	11001	11101	00000	10101	00010	11110
01011	10011	11100	01000	00101	01111	00111	00000
10100	01111	11100	00011	10000	01110	00101	11100
01001	01110	01000	10111	10100	10000	10111	01111
00010	11100	00101	00001	01110	01010	01111	01111
00001	00101	00001	11100	01010	10111	00111	01110
10111	10000	10001	00111	01111	10010	00010	10111
10011	11000	00111	00010	01110	01110	00111	00000
01010	10001	01000	11110	01111	01010	11100	01110

(例 2)

表 16

表 16 よりつぎの結果を得た。

N	n_A/N	n_B/N	run	ZR	χ^2
1000	0.500	0.500	495	-0.3796634	6.7316790

これより、表 16 の系列における 0 と 1 の相対頻度は、

$$\text{表16}F(0)=\frac{1}{2}, \quad \text{表16}F(1)=\frac{1}{2}$$

である。

また上の ZR と χ^2 の実現値から、「連による検定」(有意水準 5%) や「 χ^2 -検定」(自由度 6, 有意水準 5%) によって、表 16 の系列がランダム系列と認められる結果を得た。

つぎに、表 16 の系列が、「after effect のない系列」となっているかどうか調べるために、まず 0 の直後と 1 の直後の項を項位選出して二つの部分系列を得る。
その部分系列からつぎの結果を得る。

$$\begin{aligned} \text{表16}F(0|0) &= 0.50501, & \text{表16}F(1|0) &= 0.49499 \\ \text{表16}F(0|1) &= 0.49400, & \text{表16}F(1|1) &= 0.50600 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{表16}F(0|0) &= \text{表16}F(0), & \text{表16}F(1|0) &= \text{表16}F(1), \\ \text{表16}F(0|1) &= \text{表16}F(0), & \text{表16}F(1|1) &= \text{表16}F(1) \end{aligned}$$

である。

したがって、表 16 の系列は、0 または 1 を Predecessor とする項位選出に対しては、after effect がない系列である。

すなわち、表 16 の系列は、1-free となっている。

つぎに、表 16 の系列において、対 00 の直後、対 01 の直後、対 10 の直後、対 11 の直後の項の項位選出をして得られた各部分系列から、つぎの結果を得た。

$$\begin{aligned} \text{表16}F(0|00) &= 0.44048, & \text{表16}F(1|00) &= 0.55952, \\ \text{表16}F(0|01) &= 0.59919, & \text{表16}F(1|01) &= 0.40081 \\ \text{表16}F(0|10) &= 0.56911, & \text{表16}F(1|10) &= 0.43089 \\ \text{表16}F(0|11) &= 0.39921, & \text{表16}F(1|11) &= 0.60079 \end{aligned}$$

この結果より、各部分系列における 0 と 1 の相対頻度は、それぞれ $\text{表16}F(0)=\frac{1}{2}$, $\text{表16}F(1)=\frac{1}{2}$ から、やや離れているところがあることがわかる。

つぎに表 16 の系列において、000 の直後、001 の直後、010 の直後、011 の直後、100 の直後、101 の直後、110 の直後、111 の直後の項の項位選出をして得られた各部分系列からつぎの結果を得た。

$$\begin{aligned} \text{表16}F(0|000) &= 0.38739, & \text{表16}F(1|000) &= 0.61261 \\ \text{表16}F(0|001) &= 0.52857, & \text{表16}F(1|001) &= 0.47143 \\ \text{表16}F(0|010) &= 0.50000, & \text{表16}F(1|010) &= 0.50000 \\ \text{表16}F(0|011) &= 0.00000, & \text{表16}F(1|011) &= 1.00000 \\ \text{表16}F(0|100) &= 0.47857, & \text{表16}F(1|100) &= 0.52143 \\ \text{表16}F(0|101) &= 0.70093, & \text{表16}F(1|101) &= 0.29907 \end{aligned}$$

$$\text{表16}F(0|110)=0.67347, \text{表16}F(1|110)=0.32653$$

$$\text{表16}F(0|111)=0.61039, \text{表16}F(1|111)=0.38961$$

上の結果より、 $\text{表16}F(0|011)=0$ 、 $\text{表16}F(1|011)=1$ となっており、明らかに

$\text{表16}F(0|011) \neq \text{表16}F(0)$ 、 $\text{表16}F(1|011) \neq \text{表16}F(1)$ である。

また、101 の直後、110 の直後、111 の直後の項の項位選出から得られた各部分系列における 0 と 1 の相対頻度も、表 16 の系列における 0 と 1 の相対頻度 $\text{表16}F(0)=\text{表16}F(1)=\frac{1}{2}$ から離れている。したがって表 16 の系列は 0 と 1 による Predecessor に対して完全に「after effect がある系列」となっていることが示された。

ゆえに、「 χ^2 -検定」と「連による検定」に合格した系列でありながら、表 16 の系列のように「 n -free でない系列」があることを見い出した。after effect があることはランダム性としては望ましくない性質である。このことより、「after effect がある」という性質を、この両検定によっては、完全に見破ることができないということが示された。

例 3

→

00111	11101	00001	01000	01000	11110	01101	01010
00111	10100	11111	10010	00101	00011	10011	01001
10001	11010	01110	10001	10101	01010	01001	11101
01001	01001	00111	10011	01010	10100	10100	11111
00100	11110	10010	00010	10011	10100	01110	10011
11001	01000	01111	11000	01100	11110	00011	10100
10011	11100	10011	01000	00111	01001	11100	10100
10100	10000	11101	00111	11001	01001	11001	01001
11100	00111	00001	10100	11000	11111	00011	00101
00111	10011	00001	00000	11111	00100	11101	01010
01100	01000	11101	00111	01001	10101	00111	10010
00001	10010	10101	00111	10010	10001	11111	01001
10000	11110	10101	00000	11110	01100	01100	11000
11111	00101	00111	10010	10010	10101	00110	10011
10011	00000	10001	00100	11111	11110	00110	10011
01001	00110	01110	01010	10011	11101	01001	00110
00011	10010	01111	10100	11001	11001	10000	10011
01010	01000	11001	11111	00001	11110	10100	11000
10100	11001	00100	11110	01110	10011	00000	01111
00110	10000	10011	11111	01001	10011	11000	10100
10100	11111	00010	01000	10011	00111	10010	10011
11101	01001	01000	01100	11001	11000	10100	11111
00100	11100	10011	00101	00111	00111	10010	01111
01001	00111	01000	01100	11000	01001	11101	01001
01001	11110	00111	00100	10011	00101	00111	01001

(例 3)

表 17

表 17 よりつぎの結果を得た。

N	n_A/N	n_B/N	run	ZR	χ^2
1000	0.500	0.500	510	0.5694941	4.0619650

これより、表 17 の系列における 0 と 1 の相対頻度は、

$$\text{表17}F(0)=\frac{1}{2}, \quad \text{表17}F(1)=\frac{1}{2}$$

である。

また「連による検定」(有意水準 5%) や「 χ^2 -検定」(自由度 6, 有意水準 5%) によって表 17 の系列は、ランダム系列と上の計算結果より認められる。

つぎに表 17 の系列が、after effect があるか否かを調べるために、例 1 と同様の Predecessors を選び計算を行なった結果は次の通りである。

$\text{表17}F(0 0)=0.49000$	$\text{表17}F(1 0)=0.51000$
$\text{表17}F(0 1)=0.50902$	$\text{表17}F(1 1)=0.49098$
$\text{表17}F(0 00)=0.31837$	$\text{表17}F(1 00)=0.68163$
$\text{表17}F(0 01)=0.58268$	$\text{表17}F(1 01)=0.41732$
$\text{表17}F(0 10)=0.65354$	$\text{表17}F(1 10)=0.34646$
$\text{表17}F(0 11)=0.43265$	$\text{表17}F(1 11)=0.56735$
$\text{表17}F(0 000)=0.39744$	$\text{表17}F(1 000)=0.60256$
$\text{表17}F(0 001)=0.36145$	$\text{表17}F(1 001)=0.63855$
$\text{表17}F(0 010)=0.66216$	$\text{表17}F(1 010)=0.33784$
$\text{表17}F(0 011)=0.37736$	$\text{表17}F(1 011)=0.62264$
$\text{表17}F(0 100)=0.28313$	$\text{表17}F(1 100)=0.71687$
$\text{表17}F(0 101)=1.00000$	$\text{表17}F(1 101)=0.00000$
$\text{表17}F(0 110)=0.64151$	$\text{表17}F(1 110)=0.35849$
$\text{表17}F(0 111)=0.47482$	$\text{表17}F(1 111)=0.52518$

上の結果から

$$\begin{aligned} \text{表17}F(0|0) &= \text{表17}F(0), & \text{表17}F(1|0) &= \text{表17}F(1) \\ \text{表17}F(0|1) &= \text{表17}F(0), & \text{表17}F(1|1) &= \text{表17}F(1) \end{aligned}$$

を得る。

したがって Single predecessor に対して、表 17 の系列は after effect がない。すなわち 1-free である。

しかし、0, 1 からなる 2 項順列、または 3 項順列を Predecessor として得られた各部分系列における 0 と 1 の相対頻度は、 $\text{表17}F(0)=\text{表17}F(1)=\frac{1}{2}$ に等しくない。

すなわち、表 17 の系列は after effect が現われている。特に $\text{表17}F(0|101)=1$, $\text{表17}F(1|101)=0$ となって表 17 の系列は完全に「after effect がある系列」であることがわかる。したがって「 χ^2 -検定」や「連による検定」でランダムと認められる場合でも、after effect があることが示された。

例 4

表 18 よりつぎの結果を得た。

N	n_A/N	n_B/N	run	ZR	χ^2
1000	0.499	0.501	493	-0.5060810	6.4838066

例 4

00011	11100	00111	11100	01001	10101	11000	10000
01011	11001	11100	01001	00111	11010	00101	10100
00110	01010	00111	00100	11111	00011	01100	00111
01100	01100	01101	00111	11111	10001	00100	10010
11000	10100	10110	00011	10100	10111	11000	11000
01101	00101	11101	00010	11110	01110	10010	10110
00100	01101	10011	11110	00010	00111	11100	01000
11010	11110	11010	00111	11001	01000	10100	10100
01000	11110	00110	01000	11001	11000	10100	10111
10001	00111	11110	01000	10001	01110	00011	11010
11110	10100	01001	00101	10001	11100	10001	10111
10110	01010	00101	01100	00111	11000	10010	11010
10001	00111	01000	10001	01111	10001	11100	11000
01111	11100	01000	10001	10100	01011	11000	11110
01011	00111	10001	00101	11110	11000	10010	10010
10111	10101	11100	11010	00101	11100	00100	00010
10111	11100	01110	01000	10001	01011	11010	00100
01010	00100	11011	11100	01011	11100	00101	10010
01010	01011	11010	11000	01000	11111	01000	10110
00100	10001	01111	00001	10010	00100	10111	11011
01010	00100	01111	00011	10111	10001	01000	10011
00010	00100	11111	00010	00101	00111	10111	11100
10011	10110	01010	00101	00001	01111	11010	00110
01011	11000	10100	01000	10101	00100	01111	01111
00101	00101	10011	00010	01101	11010	11111	10010

(例 4)

表 18

これより表 18 の系列における 0 と 1 の相対頻度は

$$\text{表18}F(0)=0.499 \quad \text{表18}F(1)=0.501$$

である。

また「連による検定」(有意水準 5%) や「 χ^2 -検定」(自由度 6, 有意水準 5%) によって表 18 における系列はランダム系列と上の計算結果より認められる。

つぎに、例 2 と同様の Predecessors に注目して計算した結果は、つぎのようになった。

$\text{表18}F(0 0)=0.50800$	$\text{表18}F(1 0)=0.49200$
$\text{表18}F(0 1)=0.49299$	$\text{表18}F(1 1)=0.50701$
$\text{表18}F(0 00)=0.42353$	$\text{表18}F(1 00)=0.57647$
$\text{表18}F(0 01)=0.58130$	$\text{表18}F(1 01)=0.41870$
$\text{表18}F(0 10)=0.59426$	$\text{表18}F(1 10)=0.40574$
$\text{表18}F(0 11)=0.40711$	$\text{表18}F(1 11)=0.59289$
$\text{表18}F(0 000)=0.16800$	$\text{表18}F(1 000)=0.83200$
$\text{表18}F(0 001)=0.63946$	$\text{表18}F(1 001)=0.36054$
$\text{表18}F(0 010)=0.56300$	$\text{表18}F(1 010)=0.43700$
$\text{表18}F(0 011)=0.39806$	$\text{表18}F(1 011)=0.60194$
$\text{表18}F(0 100)=0.60300$	$\text{表18}F(1 100)=0.39700$

$$\text{表18}F(0|101)=0.49495 \quad \text{表18}F(1|101)=0.50505$$

$$\text{表18}F(0|110)=0.64078 \quad \text{表18}F(1|110)=0.35922$$

$$\text{表18}F(0|111)=0.41333 \quad \text{表18}F(1|111)=0.58667$$

上の結果より

$$\text{表18}F(0|0)=\text{表18}F(0), \quad \text{表18}F(1|0)=\text{表18}F(1)$$

$$\text{表18}F(0|1)=\text{表18}F(0), \quad \text{表18}F(1|1)=\text{表18}F(1)$$

となる。

したがって、表 18 の系列は 1 と 0 の Predecessor に対しては after effect はない。すなわち 1-free となっている。しかし他の Predecessors に対しては、after effect があることは、上の計算結果より明らかである。特に、 $\text{表18}F(0|000)$ 、 $\text{表18}F(1|000)$ は、それぞれ $\text{表18}F(0)=0.499$ 、 $\text{表18}F(1)=0.501$ とは大きく異なっている。

したがって、例 3 においても、「 χ^2 -検定」や「連による検定」によってはランダムネスと認められたが、表 18 の系列は、「after effect がある系列」であることが示された。

第 4 節 一つの n -free の作り方

定義

各順列に対してある順序で m 回のうち r 回は 0、 $(m-r)$ 回は 1 をつけるとき、 m 回のうちの最初を第 1 循環目、第 2 回目を第 2 循環目、第 3 回目を第 3 循環目、 \dots 、第 i 回目を第 i 循環目、 \dots 、 $(m>i)$ ということにする。

n を任意の整数とし、 $aF(0)=P=-\frac{r}{m}$ (既約分数、 $m>r$) なる n -free 系列の作り方は、次のようにする。ここでは、0 と 1 の割り合いが、 $r:(m-r)$ であるから、 m 回ごとのうち r 回は 0 をつけ、 $(m-r)$ 回は 1 を使うようにする。そしてある順列に対して、0 と 1 をある順番につけたとき、この順列に対しては、その順番を変えないものとして作っていく。そこでこのような約束のもとでつぎのようにして作る。

① n 個の 0 からなる n 項順列 $\overbrace{000\dots 0}^{n=}$ を最初に書き、第 1 循環目は n 項順列 $\overbrace{000\dots 0}^{n=}$ のあとに r 個の 0 をつけ足して、そのあとに 1 を 1 個つける ($\overbrace{000\dots 0}^{n=}$ 1)。第 2 循環目からは、 n 項順列 $\overbrace{000\dots 0}^{n=}$ の現われるごとに、1 を 1 個ずつ合計 $(m-r-1)$ 回までつける。そして次回以降に n 項順列 $\overbrace{000\dots 0}^{n=}$ が現われるがごとにまた最初と同じ順番に、0, 1 をつけていく。

② はじめて現われた n 個の 1 からなる n 項順列 $\overbrace{111\dots 1}^{n=}$ のあとには、 $(m-r)$ 個の 1 とそのあとに 0 を 1 個つける ($\overbrace{111\dots 1}^{(m-r)=}$ 0)。第 2 循環目以後 n 項順列 $\overbrace{111\dots 1}^{n=}$ が現われるがごとに 0 を 1 個ずつつけて合計 $(r-1)$ 回まで 0 をつける。そして次回以降に n 項順列 $\overbrace{111\dots 1}^{n=}$ が現われるがごとに、また最初と同じ 0 と 1 の順番につけていく。

③ n 項順列 $\overbrace{000\dots 0}^{n=}$ と $\overbrace{111\dots 1}^{n=}$ を除いた他の順列に移ったとき各 n 項順列のあとは、初回から $(m-r)$ 循環目まで許すかぎり 1 をつける。許すかぎりというのは、1 をつけてできる n 項順列が、その循環中にまだ出ていない限りということである。

④ すでに、その循環中に前にでたところには、1 のかわりに 0 をつけて、またそのつ

ぎには許すかぎり 1 をつけ足していく。

つぎに上述の方法によって実例を示す。

ここでは、 $n=3$, ${}_aF(0)=\frac{2}{3}$ である 3-free の系列の場合を例にとりて、その作り方の一つを示すことにする。3-free 系列 α の作る要点は、順に出てくる隣り合う 3 項順列が互いに 2 項を overlap して一列につながるようにし、その系列 α において ${}_aF(0)=\frac{2}{3}$ かつ ${}_aF(0|000)={}_aF(0|001)={}_aF(0|010)={}_aF(0|011)={}_aF(0|100)={}_aF(0|101)={}_aF(0|110)={}_aF(0|111)=\frac{2}{3}$ とすることである。

そこでつぎのような約束をする。

①. 3 項順列のあとに 1 または 0 をつけ足して、その末尾に現われる 3 項順列のどれに対しても、3 回ごとにそのうちの 2 回は 0 をつけ足し、1 回は 1 をつけ足す。そして一つの 3 項順列に対し最初の 3 回に 1, 0, 0, という順番につけ足したときは、その 3 項順列に対しては、この順番は変えない。

②. ①に反しない限り、そして「許す限り」は、1 をつけ足す。ここで「許す限り」ということはつぎのことである。各順列に対し、ある順序で 3 回ごとのうち 1 回は 1, 2 回は 0 をつけるから、3 回ごとのうち最初を第 1 循環、第 2 回目を第 2 循環、…、ということにするならば、ここでいう「許す限り」とは、当面の順列の末尾に 1 をつけ足してできる 3 項順列が、その循環中にまだ現われていない場合はそれで良いが、すでに現われていれば、1 をつけないで 0 をつけるということである。

上述の約束を満たすようにして、 ${}_aF(0)=\frac{2}{3}$ なる 3-free 系列は、次のようにして作られる。

- (イ) 初めの順列 000 に対して 2 回 0 をつけ足し、そのあとへ 1 をつけ足す。そうすると 000001 となり、末尾に 3 項順列 001 ができる。
- (ロ) 末尾に出来た順列 001 のあとへは、1 をつける。すると末尾に 3 項順列 011 ができる。
- (ハ) 末尾に出来た順列 011 のあとへは、1 をつけ足す。すると末尾に 3 項順列 111 ができる。
- (ニ) 末尾に出来た順列 111 のあとへは、1 をつけ足し、そのあとへ 0 をつけ足す。そうすると末尾に 3 項順列 110 ができる。
- (ホ) 末尾に出来た順列 110 のあとへは、1 をつけ足すと、末尾に 3 項順列 101 ができる。
- (ヘ) 末尾に出来た順列 101 のあとへは 0 をつけ足すと、末尾に 3 項順列 010 ができる（このとき、1 をつけ足すと末尾にできる 3 項順列 011 は (ハ) のところででているので 0 をつける。)
- (ト) 末尾に出来た順列 010 のあとへは、0 をつけ足す（このとき、1 をつけ足すと末尾にできる 3 項順列 101 はすでに (ヘ) のところででているので 0 をつける。すると末尾に 3 項順列 100 ができる。
- (チ) 末尾に出来た順列 100 のあとへは 0 をつけ足す（このとき 1 をつけ足すと末尾にできる 3 項順列 001 はすでに (ロ) のところででているので、0 をつける。)

以上のようにして、8 個のすべての 3 項順列のあとに、0 か 1 かつけられたならば、再び 3 項順列 000 から順番に上述の約束に従って 0 または 1 をつけ足してつづけていく。

[1-d] 4-free

0 0 0 0	0 ₁	1 ₂	0 ₃₃	1 ₃₄	0 ₆₅	1 ₆₆	0 ₉₇	1 ₉₈	---
0 0 0 1	1 ₃	0 ₁₉	1 ₃₅	0 ₅₁	1 ₆₇	0 ₈₃	1 ₉₉	0 ₁₁₅	---
0 0 1 0	1 ₁₄	0 ₂₀	1 ₄₆	0 ₅₂	1 ₇₈	0 ₈₄	1 ₁₁₀	0 ₁₁₆	---
0 0 1 1	1 ₄	0 ₂₃	1 ₃₆	0 ₅₅	1 ₆₈	0 ₈₇	1 ₁₀₀	0 ₁₁₉	---
0 1 0 0	0 ₁₇	1 ₂₁	0 ₄₉	1 ₅₃	0 ₈₁	1 ₈₅	0 ₁₁₃	1 ₁₁₇	---
0 1 0 1	0 ₁₅	1 ₂₇	0 ₄₇	1 ₅₉	0 ₇₉	1 ₉₁	0 ₁₁₁	1 ₁₂₃	---
0 1 1 0	0 ₁₁	1 ₂₄	0 ₄₃	1 ₅₆	0 ₇₅	1 ₈₈	0 ₁₀₇	1 ₁₂₀	---
0 1 1 1	1 ₅		0 ₂₉	1 ₃₇	0 ₆₁	1 ₆₉	0 ₉₃	1 ₁₀₁	---
1 0 0 0	1 ₁₈		0 ₃₂	1 ₅₀	0 ₆₄	1 ₈₂	0 ₉₆	1 ₁₁₄	---
1 0 0 1	0 ₁₃	1 ₂₂	0 ₄₅	1 ₅₄	0 ₇₇	1 ₈₆	0 ₁₀₉	1 ₁₁₈	---
1 0 1 0	0 ₁₆	1 ₂₆	0 ₄₈	1 ₅₈	0 ₈₀	1 ₉₀	0 ₁₁₂	1 ₁₂₂	---
1 0 1 1	0 ₁₀	1 ₂₈	0 ₄₂	1 ₆₀	0 ₇₄	1 ₉₂	0 ₁₀₆	1 ₁₂₄	---
1 1 0 0	1 ₁₂		0 ₃₁	1 ₄₄	0 ₆₃	1 ₇₆	0 ₉₅	1 ₁₀₈	---
1 1 0 1	1 ₉	0 ₂₅	1 ₄₁	0 ₅₇	1 ₇₃	0 ₈₉	1 ₁₀₅	0 ₁₂₁	---
1 1 1 0	1 ₈		0 ₃₀	1 ₄₀	0 ₆₂	1 ₇₂	0 ₉₄	1 ₁₀₄	---
1 1 1 1	1 ₆	0 ₇	1 ₃₈	0 ₃₉	1 ₇₀	0 ₇₁	1 ₁₀₂	0 ₁₀₃	---

0 0 0 0 0	1 1 1 1 1	0 1 1 0 0	1 0 1 0 0	0 1 0 0 1	1 0 1 0 1	1 1 0 0 0
0 0 1 1 1	1 1 0 1 1	0 0 1 0 1	0 0 0 1 0	0 1 1 0 1	0 1 1 1 0	0 0 0 0 1
1 1 1 1 0	1 1 0 0 1	0 1 0 0 0	1 0 0 1 1	0 1 0 1 1	1 0 0 0 0	0 1 1 1 1
1 0 1 1 0	0 1 0 1 0	0 0 1 0 0	1 1 0 1 0	1 1 -----	-----	-----

例2. $F(0)=\frac{2}{3}$, $F(1)=\frac{1}{3}$ の場合

[2-a] 1-free

0	0 ₁ 0 ₂ 1 ₃ 0 ₆ 0 ₇ 1 ₈ 0 ₁₀ 0 ₁₁ 1 ₁₂ 0 ₁₅ 0 ₁₆ 1 ₁₇ 0 ₁₉ 0 ₂₀ 1 ₂₁ 0 ₂₄ 0 ₂₅ 1 ₂₆ 0 ₂₈ 0 ₂₉ 1 ₃₀ 0 ₃₃ 0 ₃₄ 1 ₃₅ ---
1	1 ₄ 0 ₅ 0 ₉ 1 ₁₃ 0 ₁₄ 0 ₁₈ 1 ₂₂ 0 ₂₃ 0 ₂₇ 1 ₃₁ 0 ₃₂ ---

0 0 0 1 1	0 0 0 1 0	0 0 1 1 0	0 0 1 0 0	0 1 1 0 0	0 1 0 0 0	1 1 0 0 0
1 -----	-----					

[2-b] 2-free

→			
0 0	0 ₁ 0 ₂ 1 ₃ 0 ₁₀ 0 ₁₁ 1 ₁₂ 0 ₁₅ 0 ₁₆ 1 ₁₇ 0 ₂₃ 0 ₂₄ 1 ₂₅ 0 ₂₈ 0 ₂₉ 1 ₃₀ 0 ₃₇ 0 ₃₈ 1 ₃₉ 0 ₄₂ 0 ₄₃ 1 ₄₄ 0 ₅₀ 0 ₅₁ 1 ₅₂ 0 ₅₅ 0 ₅₆ 1 ₅₇ 0 ₆₄ 0 ₆₅ 1 ₆₆ 0 ₆₉ 0 ₇₀ 1 ₇₁ 0 ₇₇ 0 ₇₈ 1 ₇₉ -----		
0 1	1 ₄ 0 ₈ 0 ₁₃ 1 ₁₈ 0 ₂₁	0 ₂₆ 1 ₃₁ 0 ₃₅ 0 ₄₀ 1 ₄₅ 0 ₄₈ 0 ₅₃ 1 ₅₈ 0 ₆₂ 0 ₆₇ 1 ₇₂ 0 ₇₅ ---	
1 0	1 ₇ 0 ₉ 0 ₁₄ 1 ₂₀ 0 ₂₂	0 ₂₇ 1 ₃₄ 0 ₃₆ 0 ₄₁ 1 ₄₇ 0 ₄₉ 0 ₅₄ 1 ₆₁ 0 ₆₃ 0 ₆₈ 1 ₇₄ 0 ₇₆ ---	
1 1	1 ₅ 0 ₆ 0 ₁₉	1 ₃₂ 0 ₃₃ 0 ₄₆	1 ₅₉ 0 ₆₀ 0 ₇₃ ---

<div>→</div>						
0 0 0 0 1	1 1 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 1	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 1 1 0
1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 1 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 1	1 0 1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 1 1 0	1 0 0 0 0	1-----	-----			

[2-c] 3-free

→			
0 0 0	0 ₁ 0 ₂ 1 ₃ 0 ₁₈ 0 ₁₉ 1 ₂₀ 0 ₂₄ 0 ₂₅ 1 ₂₆ 0 ₃₄ 0 ₃₅ 1 ₃₆ 0 ₄₂ 0 ₄₃ 1 ₄₄ 0 ₅₈ 0 ₅₉ 1 ₆₀ 0 ₆₄ 0 ₆₅ 1 ₆₆ 0 ₇₄ 0 ₇₅ 1 ₇₆ 0 ₈₂ 0 ₈₃ 1 ₈₄ 0 ₉₉ 0 ₁₀₀ 1 ₁₀₁ 0 ₁₀₅ 0 ₁₀₆ 1 ₁₀₇ 0 ₁₁₅ 0 ₁₁₆ 1 ₁₁₇ 0 ₁₂₃ 0 ₁₂₄ 1 ₁₂₅ 0 ₁₃₃ 0 ₁₄₀ 1 ₁₄₁ 0 ₁₄₅ 0 ₁₄₆ 1 ₁₄₇ 0 ₁₅₅ 0 ₁₅₆ 1 ₁₅₇ ---		
0 0 1	1 ₄ 0 ₁₂ 0 ₂₁ 1 ₂₇ 0 ₃₁ 0 ₃₇ 1 ₄₅ 0 ₅₂ 0 ₆₁ 1 ₆₇ 0 ₇₁ 0 ₇₇ 1 ₈₅ 0 ₉₃ 0 ₁₀₂ 1 ₁₀₈ 0 ₁₁₂ 0 ₁₁₈ 1 ₁₂₆ 0 ₁₃₃ 0 ₁₄₂ 1 ₁₄₅ 0 ₁₅₂ 0 ₁₅₈ ---		
0 1 0	0 ₁₀ 1 ₁₃ 0 ₂₂ 0 ₃₂ 1 ₃₈ 0 ₄₀ 0 ₅₀ 1 ₅₃ 0 ₆₂ 0 ₇₂ 1 ₇₈ 0 ₈₀ 0 ₉₁ 1 ₉₄ 0 ₁₀₃ 0 ₁₁₃ 1 ₁₁₉ 0 ₁₂₁ 0 ₁₃₁ 1 ₁₃₄ 0 ₁₄₃ 0 ₁₅₃ 1 ₁₅₉ ---		
0 1 1	1 ₅ 0 ₁₅ 0 ₂₈ 1 ₄₅ 0 ₅₅ 0 ₆₃ 1 ₆₆ 0 ₉₆ 0 ₁₀₉ 1 ₁₂₇ 0 ₁₃₆ 0 ₁₄₉ ---		
1 0 0	1 ₁₁ 0 ₁₇ 0 ₂₃ 1 ₃₀ 0 ₃₃ 0 ₄₁ 1 ₅₁ 0 ₅₇ 0 ₆₃ 1 ₇₀ 0 ₇₃ 0 ₈₁ 1 ₉₂ 0 ₉₉ 0 ₁₀₄ 1 ₁₁₁ 0 ₁₁₄ 0 ₁₂₂ 1 ₁₃₂ 0 ₁₃₈ 0 ₁₄₄ 1 ₁₅₁ 0 ₁₅₄ ---		
1 0 1	0 ₉ 1 ₁₄ 0 ₃₉ 0 ₄₉ 1 ₅₄ 0 ₇₉ 0 ₉₀ 1 ₉₅ 0 ₁₂₀ 0 ₁₃₀ 1 ₁₃₅ ---		
1 1 0	1 ₈ 0 ₁₆ 0 ₂₉ 1 ₄₈ 0 ₅₆ 0 ₆₉ 1 ₈₉ 0 ₉₇ 0 ₁₁₀ 1 ₁₂₉ 0 ₁₃₇ 0 ₁₅₀ ---		
1 1 1	1 ₆ 0 ₇ 0 ₄₇ 1 ₆₇ 0 ₈₈ 0 ₁₂₈ ---		

→

0 0 0 0 0	1 1 1 1 0	1 0 0 1 0	1 1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 1 1	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	1 0 0 0 0	0 1 1 1 0	1 0 0 1 0	1 1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 1 1
0 0 1 0 0	0 0 0 1 0	1 0 0 0 0	0 1 1 1 1	0 1 0 0 1	0 1 1 0 0	0 0 0 1 0
0 0 0 0 1	1 0 0 1 0	0 0 0 0 1	0 1 0 0 0	0 0 1 1 1	0 1 0 0 1	0 1 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 0 1	1 0 0 1 0	0 0 0 0 1	0 1 -----	-----	----

[2-d] 4-free

0 0 0 0	0 ₁ 0 ₂ 1 ₃ 0 ₃₄ 0 ₃₅ 1 ₃₆ 0 ₄₁ 0 ₄₂ 1 ₄₃ 0 ₅₅ 0 ₅₆ 1 ₅₇ 0 ₆₅ 0 ₆₆ 1 ₆₇ 0 ₆₈ 0 ₆₉ 1 ₆₉ 0 ₉₄ 0 ₉₅ 1 ₉₆ 0 ₁₁₃ 0 ₁₁₄ 1 ₁₁₅ 0 ₁₂₃ 0 ₁₂₄ 1 ₁₂₅ 0 ₁₅₅ 0 ₁₅₆ 1 ₁₅₇ 0 ₁₆₂ 0 ₁₆₃ 1 ₁₆₄ 0 ₁₇₆ 0 ₁₇₇ 1 ₁₇₈ 0 ₁₈₆ 0 ₁₈₇ 1 ₁₈₈ 0 ₂₀₈ 0 ₂₀₉ 1 ₂₁₀ 0 ₂₁₅ 0 ₂₁₆ 1 ₂₁₇ 0 ₂₃₄ 0 ₂₃₅ 1 ₂₃₆ 0 ₂₄₄ 0 ₂₄₅ 1 ₂₄₆ 0 ₂₇₇ 0 ₂₇₈ 1 ₂₇₉ 0 ₂₈₄ 0 ₂₈₅ 1 ₂₈₆ 0 ₂₉₈ 0 ₂₉₉ 1 ₃₀₀ 0 ₃₀₈ 0 ₃₀₉ 1 ₃₁₀ 0 ₃₃₀ 0 ₃₃₁ 1 ₃₃₂ 0 ₃₃₇ 0 ₃₃₈ 1 ₃₃₉ 0 ₃₅₆ 0 ₃₅₇ 1 ₃₅₈ 0 ₃₆₅ 0 ₃₆₇ 1 ₃₆₈ 0 ₃₉₈ 0 ₃₉₉ 1 ₄₀₀ 0 ₄₀₅ 0 ₄₀₆ 1 ₄₀₇ 0 ₄₁₉ 0 ₄₂₀ 1 ₄₂₁ 0 ₄₂₉ 0 ₄₃₀ 1 ₄₃₁ 0 ₄₅₁ 0 ₄₅₂ 1 ₄₅₃ 0 ₄₅₈ 0 ₄₅₉ 1 ₄₆₀ 0 ₄₇₇ 0 ₄₇₈ 1 ₄₇₉ ---
0 0 0 1	1 ₄ 0 ₂₀ 0 ₃₇ 1 ₄₄ 0 ₄₉ 0 ₅₈ 1 ₆₈ 0 ₇₉ 0 ₉₀ 1 ₉₇ 0 ₁₀₇ 0 ₁₁₆ 1 ₁₂₆ 0 ₁₄₁ 0 ₁₅₈ 1 ₁₆₅ 0 ₁₇₀ 0 ₁₇₉ 1 ₁₈₉ 0 ₂₀₀ 0 ₂₁₁ 1 ₂₁₈ 0 ₂₂₈ 0 ₂₃₇ 1 ₂₄₇ 0 ₂₆₃ 0 ₂₈₀ 1 ₂₈₇ 0 ₂₉₂ 0 ₃₀₁ 1 ₃₁₁ 0 ₃₂₂ 0 ₃₃₃ 1 ₃₄₀ 0 ₃₅₀ 0 ₃₅₉ 1 ₃₆₉ 0 ₃₈₄ 0 ₄₀₁ 1 ₄₀₈ 0 ₄₁₃ 0 ₄₂₂ 1 ₄₃₂ 0 ₄₄₃ 0 ₄₅₄ 1 ₄₆₁ 0 ₄₇₁ 0 ₄₈₀ ---
0 0 1 0	1 ₁₅ 0 ₂₁ 0 ₃₈ 1 ₅₀ 0 ₅₉ 0 ₆₂ 1 ₇₄ 0 ₈₀ 0 ₉₁ 1 ₁₀₈ 0 ₁₁₇ 1 ₁₂₀ 1 ₁₃₆ 0 ₁₄₂ 0 ₁₅₉ 1 ₁₇₁ 0 ₁₈₀ 0 ₁₈₃ 1 ₁₉₅ 0 ₂₀₁ 0 ₂₁₂ 1 ₂₂₉ 0 ₂₃₈ 0 ₂₄₁ 1 ₂₅₈ 0 ₂₆₄ 0 ₂₈₁ 1 ₂₉₃ 0 ₃₀₂ 0 ₃₀₅ 1 ₃₁₇ 0 ₃₂₃ 0 ₃₃₄ 1 ₃₅₁ 0 ₃₆₀ 0 ₃₆₃ 1 ₃₇₉ 0 ₃₈₅ 0 ₄₀₂ 1 ₄₁₄ 0 ₄₂₃ 0 ₄₂₆ 1 ₄₃₅ 0 ₄₄₄ 0 ₄₅₅ 1 ₄₇₂ 0 ₄₈₁ ---
0 0 1 1	1 ₅ 0 ₂₄ 0 ₄₅ 1 ₆₉ 0 ₈₃ 0 ₉₈ 1 ₁₂₇ 0 ₁₄₅ 0 ₁₆₆ 1 ₁₉₀ 0 ₂₀₄ 0 ₂₁₉ 1 ₂₄₅ 0 ₂₆₇ 0 ₂₈₈ 1 ₃₁₂ 0 ₃₂₆ 0 ₃₄₁ 1 ₃₇₀ 0 ₃₈₈ 0 ₄₀₉ 1 ₄₃₃ 0 ₄₄₇ 0 ₄₆₂ ---
0 1 0 0	0 ₁₈ 1 ₂₂ 0 ₃₉ 0 ₅₃ 1 ₆₀ 0 ₆₃ 0 ₇₇ 1 ₈₁ 0 ₉₂ 0 ₁₁₁ 1 ₁₁₈ 0 ₁₂₁ 0 ₁₃₉ 1 ₁₄₃ 0 ₁₆₀ 0 ₁₇₄ 1 ₁₈₁ 0 ₁₈₄ 0 ₁₉₈ 1 ₂₀₂ 0 ₂₁₃ 0 ₂₃₂ 1 ₂₃₉ 0 ₂₄₂ 0 ₂₆₁ 1 ₂₆₅ 0 ₂₈₂ 0 ₂₉₆ 1 ₃₀₃ 0 ₃₀₆ 0 ₃₂₀ 1 ₃₂₄ 0 ₃₃₅ 0 ₃₅₄ 1 ₃₆₁ 0 ₃₆₄ 0 ₃₈₂ 1 ₃₈₆ 0 ₄₀₃ 0 ₄₁₇ 1 ₄₂₄ 0 ₄₂₇ 0 ₄₄₁ 1 ₄₄₅ 0 ₄₅₅ 0 ₄₇₅ 1 ₄₈₂ ---
0 1 0 1	0 ₁₆ 1 ₂₅ 0 ₅₁ 0 ₇₅ 1 ₁₀₂ 0 ₁₀₉ 0 ₁₃₇ 1 ₁₄₉ 0 ₁₇₂ 0 ₁₉₆ 1 ₂₂₃ 0 ₂₃₀ 0 ₂₅₀ 1 ₂₇₁ 0 ₂₈₄ 0 ₃₁₈ 1 ₃₄₅ 0 ₃₅₂ 0 ₃₈₀ 1 ₃₉₂ 0 ₄₁₅ 0 ₄₃₃ 1 ₄₅₆ 0 ₄₇₃
0 1 1 0	0 ₁₂ 1 ₂₅ 0 ₄₆ 0 ₅₄ 1 ₉₉ 0 ₁₀₄ 0 ₁₃₃ 1 ₁₄₅ 0 ₁₆₇ 0 ₂₀₅ 1 ₂₂₀ 0 ₂₂₅ 0 ₂₅₅ 1 ₂₆₆ 0 ₂₈₉ 0 ₃₂₇ 1 ₃₄₂ 0 ₃₄₇ 0 ₃₇₆ 1 ₃₈₉ 0 ₄₁₀ 0 ₄₄₈ 1 ₄₆₃ 0 ₄₆₈ ---
0 1 1 1	1 ₆ 0 ₃₀ 0 ₇₀ 1 ₁₂₈ 0 ₁₅₁ 0 ₁₉₁ 1 ₂₄₉ 0 ₂₇₃ 0 ₃₁₃ 1 ₃₇₁ 0 ₃₉₄ 0 ₄₃₄ ---
1 0 0 0	1 ₁₉ 0 ₃₃ 0 ₄₀ 1 ₄₅ 0 ₅₄ 0 ₆₄ 1 ₇₈ 0 ₈₅ 0 ₉₃ 1 ₁₀₆ 0 ₁₁₂ 0 ₁₂₂ 1 ₁₄₀ 0 ₁₅₄ 0 ₁₆₁ 1 ₁₆₉ 0 ₁₇₅ 0 ₁₈₅ 1 ₁₉₉ 0 ₂₀₇ 0 ₂₁₄ 1 ₂₂₇ 0 ₂₃₃ 0 ₂₄₃ 1 ₂₆₂ 0 ₂₇₆ 0 ₂₈₃ 1 ₂₉₁ 0 ₂₉₇ 0 ₃₀₇ 1 ₃₂₁ 0 ₃₂₉ 0 ₃₃₆ 1 ₃₄₉ 0 ₃₅₅ 0 ₃₆₅ 1 ₃₈₃ 0 ₃₈₇ 0 ₄₀₄ 1 ₄₁₂ 0 ₄₁₈ 0 ₄₂₈ 1 ₄₄₂ 0 ₄₅₀ 0 ₄₅₇ 1 ₄₇₀ 0 ₄₇₆ ---
1 0 0 1	0 ₁₄ 1 ₂₅ 0 ₆₁ 0 ₇₃ 1 ₈₂ 0 ₁₁₉ 0 ₁₃₅ 1 ₁₄₄ 0 ₁₆₂ 0 ₁₉₄ 1 ₂₀₃ 0 ₂₄₀ 0 ₂₅₇ 1 ₂₆₆ 0 ₃₀₄ 0 ₃₁₆ 1 ₃₂₅ 0 ₃₆₂ 0 ₃₇₈ 1 ₃₈₇ 0 ₄₂₅ 0 ₄₃₇ 1 ₄₄₆ ---
1 0 1 0	0 ₁₇ 1 ₂₇ 0 ₅₂ 0 ₇₆ 1 ₁₀₁ 0 ₁₁₀ 0 ₁₃₈ 1 ₁₄₅ 0 ₁₇₃ 0 ₁₉₇ 1 ₂₂₂ 0 ₂₃₁ 0 ₂₆₀ 1 ₂₇₀ 0 ₂₉₅ 0 ₃₁₉ 1 ₃₄₄ 0 ₃₅₃ 0 ₃₈₁ 1 ₃₉₁ 0 ₄₁₆ 0 ₄₄₀ 1 ₄₅₅ 0 ₄₇₄
1 0 1 1	0 ₁₁ 1 ₂₁ 0 ₁₀₃ 0 ₁₃₂ 1 ₁₅₀ 0 ₂₂₄ 0 ₂₅₄ 1 ₂₇₂ 0 ₃₄₆ 0 ₃₇₅ 1 ₃₉₃ 0 ₄₅₇ ---
1 1 0 0	1 ₁₃ 0 ₃₂ 0 ₄₇ 1 ₇₂ 0 ₈₅ 0 ₁₀₅ 1 ₁₃₄ 0 ₁₅₃ 0 ₁₆₅ 1 ₁₉₃ 0 ₂₀₆ 0 ₂₂₆ 1 ₂₅₆ 0 ₂₇₅ 0 ₂₉₀ 1 ₃₁₅ 0 ₃₂₈ 0 ₃₄₈ 1 ₃₇₇ 0 ₃₉₆ 0 ₄₁₁ 1 ₄₃₅ 0 ₄₄₉ 0 ₄₆₉ ---
1 1 0 1	1 ₁₀ 0 ₂₆ 0 ₁₀₀ 1 ₁₃₁ 0 ₁₄₇ 0 ₂₂₁ 1 ₂₅₃ 0 ₂₆₉ 0 ₃₄₃ 1 ₃₇₄ 0 ₃₉₀ 0 ₄₆₄ ---
1 1 1 0	1 ₉ 0 ₃₁ 0 ₇₁ 1 ₁₃₀ 0 ₁₅₂ 0 ₁₉₂ 1 ₂₅₂ 0 ₂₇₄ 0 ₃₁₄ 1 ₃₇₃ 0 ₃₉₅ 0 ₄₃₅ ---
1 1 1 1	1 ₇ 0 ₆ 0 ₁₂₉ 1 ₂₅₉ 0 ₂₅₁ 0 ₃₇₂ ---

00000	01111	10110	01010	00100	11010	11100	00001	00000	01100
01010	00000	10010	00000	11100	10100	01001	10000	00100	00001
10101	10001	01000	00010	01000	00011	11011	00101	00010	01101
01110	00000	10000	00110	00101	00000	01001	00000	01110	01010
00100	11000	00010	00000	11010	11000	10100	00001	00100	00001
11110	11001	01000	10011	01011	10000	00100	00001	10001	01000
00010	01000	00011	10010	10001	00110	00000	10000	00110	10110
00101	00000	01001	00000	01111	01100	10100	01001	10101	11000
00010	00000	11000	10100	00001	00100	00001	11001	01000	10011
00000	01000	00011	01011	00010	10000	00100	1.....

例 3. $F(0)=\frac{3}{5}$, $F(1)=\frac{2}{5}$ の場合

[3-a] 1-free

0	0 ₁ 0 ₂ 0 ₃ 1 ₄ 1 ₈ 0 ₁₀ 0 ₁₁ 0 ₁₂ 1 ₁₃ 1 ₁₅ 0 ₁₉ 0 ₂₀ 0 ₂₁ 1 ₂₂ 1 ₂₄ 0 ₂₆ 0 ₂₇ 0 ₂₈ 1 ₂₉ 1 ₃₃ 0 ₃₅ 0 ₃₆ 0 ₃₇ 1 ₃₈ 1 ₄₀
	0 ₄₄ 0 ₄₅ 0 ₄₆ 1 ₄₇ 1 ₄₉ 0 ₅₁ 0 ₅₂ 0 ₅₃ 1 ₅₄ 1 ₅₈ 0 ₆₀ 0 ₆₁ 0 ₆₂ 1 ₆₃ 1 ₆₅ 0 ₆₉ 0 ₇₀ 0 ₇₁ 1 ₇₂ 1 ₇₄ -----
1	1 ₅ 1 ₆ 0 ₇ 0 ₉ 0 ₁₄ 1 ₁₆ 1 ₁₇ 0 ₁₈ 0 ₂₃ 0 ₂₅ 1 ₃₀ 1 ₃₁ 0 ₃₂ 0 ₃₄ 0 ₃₉ 1 ₄₁ 1 ₄₂ 0 ₄₃ 0 ₄₈ 0 ₅₀ 1 ₅₅ 1 ₅₆ 0 ₅₇ 0 ₅₉ 0 ₆₄
	1 ₆₆ 1 ₆₇ 0 ₆₈ 0 ₇₃ -----

0 0 0 0 1	1 1 0 1 0	0 0 0 1 0	1 1 1 0 0	0 0 1 0 1	0 0 0 0 1	1 1 0 1 0
0 0 0 1 0	1 1 1 0 0	0 0 1 0 1	0 0 0 0 1	1 1 0 1 0	0 0 0 1 0	1 1 1 0 0
0 0 1 0 1	-----					

[3-b] 2-free

0 0	0 ₁ 0 ₂ 0 ₃ 1 ₄ 1 ₁₀ 0 ₁₄ 0 ₁₅ 0 ₁₆ 1 ₁₇ 1 ₂₀ 0 ₂₈ 0 ₂₉ 0 ₃₀ 1 ₃₁ 1 ₃₇ 0 ₄₀ 0 ₄₁ 0 ₄₂ 1 ₄₃ 1 ₅₁ 0 ₅₅ 0 ₅₆ 0 ₅₇ 1 ₅₈ 1 ₆₁
	0 ₇₁ 0 ₇₂ 0 ₇₃ 1 ₇₄ 1 ₇₈ 0 ₈₁ 0 ₈₂ 0 ₈₃ 1 ₈₄ 1 ₉₂ 0 ₉₈ 0 ₉₉ 0 ₁₀₀ 1 ₁₀₁ 1 ₁₀₄ 0 ₁₁₂ 0 ₁₁₃ 0 ₁₁₄ 1 ₁₁₅ 1 ₁₁₉ 0 ₁₂₂ 0 ₁₂₃ 0 ₁₂₄ 1 ₁₂₅ 1 ₁₃₅
	0 ₁₃₉ 0 ₁₄₀ 0 ₁₄₁ 1 ₁₄₂ 1 ₁₄₅ 0 ₁₅₃ 0 ₁₅₄ 0 ₁₅₅ 1 ₁₅₆ 1 ₁₆₂ 0 ₁₆₅ 0 ₁₆₆ 0 ₁₆₇ 1 ₁₆₈ 1 ₁₇₆ 0 ₁₈₀ 0 ₁₈₁ 0 ₁₈₂ 1 ₁₈₃ 1 ₁₈₆ 0 ₁₉₆ 0 ₁₉₇ 0 ₁₉₈ 1 ₁₉₉ 1 ₂₀₃
	0 ₂₀₆ 0 ₂₀₇ 0 ₂₀₈ 1 ₂₀₉ 1 ₂₁₇ 0 ₂₂₃ 0 ₂₂₄ 0 ₂₂₅ 1 ₂₂₆ 1 ₂₂₉ 0 ₂₃₇ 0 ₂₃₈ 0 ₂₃₉ 1 ₂₄₀ 1 ₂₄₄ 0 ₂₄₇ 0 ₂₄₈ 0 ₂₄₉ 1 ₂₅₀ -----
0 1	1 ₅ 1 ₁₁ 0 ₁₈ 0 ₂₁ 0 ₂₃ 1 ₂₅ 1 ₃₂ 0 ₃₈ 0 ₄₄ 0 ₄₆ 1 ₄₈ 1 ₅₂ 0 ₅₉ 0 ₆₂ 0 ₆₄ 1 ₆₅ 1 ₇₅ 0 ₇₉ 0 ₈₅ 0 ₈₇ 1 ₈₉ 1 ₉₃ 0 ₁₀₂ 0 ₁₀₅ 0 ₁₀₇
	1 ₁₀₉ 1 ₁₁₆ 0 ₁₂₀ 0 ₁₂₆ 0 ₁₂₈ 1 ₁₃₀ 1 ₁₃₆ 0 ₁₄₃ 0 ₁₄₅ 0 ₁₄₈ 1 ₁₅₀ 1 ₁₅₇ 0 ₁₆₃ 0 ₁₆₉ 0 ₁₇₁ 1 ₁₇₃ 1 ₁₇₇ 0 ₁₈₄ 0 ₁₈₇ 0 ₁₈₉ 1 ₁₉₁ 1 ₂₀₀ 0 ₂₀₄ 0 ₂₁₀ 0 ₂₁₂
	1 ₂₁₄ 1 ₂₁₈ 0 ₂₂₇ 0 ₂₃₀ 0 ₂₃₂ 1 ₂₃₄ 1 ₂₄₁ 0 ₂₄₅ 0 ₂₅₁ 0 ₂₅₃ -----
1 0	0 ₉ 0 ₁₃ 0 ₁₉ 1 ₂₂ 1 ₂₄ 0 ₂₇ 0 ₃₆ 0 ₃₉ 1 ₄₅ 1 ₄₇ 0 ₅₀ 0 ₅₄ 0 ₆₀ 1 ₆₃ 1 ₆₅ 0 ₇₀ 0 ₇₇ 0 ₈₀ 1 ₈₆ 1 ₈₈ 0 ₉₁ 0 ₉₇ 0 ₁₀₃ 1 ₁₀₆ 1 ₁₀₈
	0 ₁₁₁ 0 ₁₁₈ 0 ₁₂₁ 1 ₁₂₇ 1 ₁₂₉ 0 ₁₃₄ 0 ₁₃₈ 0 ₁₄₄ 1 ₁₄₇ 1 ₁₄₉ 0 ₁₅₂ 0 ₁₆₁ 0 ₁₆₄ 1 ₁₇₀ 1 ₁₇₂ 0 ₁₇₅ 0 ₁₇₉ 0 ₁₈₅ 1 ₁₈₈ 1 ₁₉₀ 0 ₁₉₅ 0 ₂₀₂ 0 ₂₀₅ 1 ₂₁₁ 1 ₂₁₃
	0 ₂₁₆ 0 ₂₂₂ 0 ₂₂₅ 1 ₂₃₁ 1 ₂₃₃ 0 ₂₃₆ 0 ₂₄₃ 0 ₂₄₆ 1 ₂₅₂ -----
1 1	1 ₆ 1 ₇ 0 ₈ 0 ₁₂ 0 ₂₆ 1 ₃₃ 1 ₃₄ 0 ₃₅ 0 ₄₉ 0 ₅₃ 1 ₆₇ 1 ₆₈ 0 ₆₉ 0 ₇₆ 0 ₉₀ 1 ₉₄ 1 ₉₅ 0 ₉₆ 0 ₁₁₀ 0 ₁₁₇ 1 ₁₃₁ 1 ₁₃₂ 0 ₁₃₃ 0 ₁₃₇ 0 ₁₅₁
	1 ₁₅₈ 1 ₁₅₉ 0 ₁₆₀ 0 ₁₇₄ 0 ₁₇₈ 1 ₁₉₂ 1 ₁₉₃ 0 ₁₉₄ 0 ₂₀₁ 0 ₂₁₅ 1 ₂₁₉ 1 ₂₂₀ 0 ₂₂₁ 0 ₂₃₅ 0 ₂₄₂ -----

00000 11110 01100 00010 01010 11000 00111 10010 00001 01011
00110 00001 00101 01111 00000 11001 00000 10101 10011 11000
00100 10101 10000 01100 10000 01010 11110 01100 00010 01010
11000 00111 10010 00001 01011 00110 00001 00101 01111 00000
11001 00000 10101 10011 11000 00100 10101 10000 01100 10000
01010 -----

[3-c] 3-free

0 0 0	<p>01 02 03 14 14 022 023 024 125 132 045 047 048 149 157 051 052 053 164 165 090 091 092 193 197</p> <p>0116 0117 0118 1119 1127 0134 0135 0136 1137 1151 0161 0162 0163 1164 1165 0167 0168 0169 1190 1155 0199 0200 0201 1202 1221</p> <p>0201 0232 0233 1234 1241 0255 0256 0257 1258 1265 0270 0271 0272 1273 1282 0297 0298 0299 1300 1304 0325 0326 0327 1328 1336</p> <p>0343 0344 0345 1346 1360 0358 0359 0370 1371 1373 0395 0397 0398 1399 1404 0408 0409 0410 1411 1430 0438 0439 0440 1441 1448</p> <p>0462 0463 0464 1465 1475 0479 0480 0481 1482 1501 0506 0507 0508 1509 1513 0532 0533 0534 1535 1545 0552 0553 0554 1555 1569</p> <p>0577 0578 0579 1580 1584 0583 0604 0605 1606 1611 0615 0616 0617 1618 1639 0647 0648 0649 1650 1657 0671 0672 0673 1674 1682</p> <p>0686 0687 0688 1689 1710 0715 0716 0717 1718 1722 0741 0742 0743 1744 1752 0759 0760 0761 1762 1776 0786 0787 0788 1789 1793</p> <p>0812 0813 0814 1815 1820 0824 0825 0826 1827 1846 0856 0857 0858 1859 1866 0880 0881 0882 1883 1891 0895 0896 0897 1898 1917</p> <p>0922 0923 0924 1925 1929 0950 0951 0952 1953 1951 0958 0959 0970 1971 1985 0993 0994 0995 1996 11000 01021 01022 01023 11024 11029</p> <p>01033 01034 01035 11036 11055 01063 01064 01065 11066 11073 01087 01088 01089 11090 11105 01104 01105 01106 11107 11126 01131 01132 01133 11134 11135</p> <p>01157 01158 01159 11160 11170 01177 01178 01179 11180 11184 01202 01203 01204 11205 11206 01228 01229 01230 11231 11236 01240 01241 01242 11243 ---</p>
0 0 1	<p>15 115 026 033 039 142 150 058 059 072 175 186 094 098 0164 1169 1120 0125 0138 0144 1147 1152 0165 0169 0176</p> <p>1179 1191 0196 0203 0209 1214 1222 0235 0242 0248 1251 1255 0267 0274 0281 1284 1293 0301 0305 0311 1316 1329 0337 0347 0353</p> <p>1356 1361 0372 0376 0383 1386 1400 0405 0412 0418 1423 1431 0442 0449 0455 1458 1466 0476 0483 0489 1493 1502 0510 0514 0520</p> <p>1525 1536 0545 0556 0562 1565 1570 0581 0585 0592 1595 1607 0612 0619 0625 1630 1640 0651 0658 0664 1667 1675 0683 0690 0697</p> <p>1700 1711 0719 0723 0729 1734 1745 0753 0763 0769 1772 1777 0793 0794 0801 1804 1816 0821 0825 0834 1839 1847 0850 0867 0873</p> <p>1876 1884 0892 0899 0906 1809 1818 0926 0930 0936 1841 1854 0952 0972 0978 1851 1866 0997 01001 01008 11011 11025 01030 01037 01043</p> <p>11045 11056 01067 01074 01080 11083 01101 01101 01106 01115 11116 11127 01135 01136 01145 11150 11151 01171 01181 01187 11190 11195 01206 01210 01217</p> <p>11220 11232 01237 01244 01250 -----</p>
0 1 0	<p>012 020 127 134 040 055 059 166 168 070 073 095 199 1105 0107 0114 0125 1129 1135 0145 0159 0166 1170 1172 0174</p> <p>0177 0197 1204 1210 0212 0219 0229 1235 1243 0249 0264 0268 1275 1277 0279 0282 0302 1306 1312 0314 0323 0334 1338 1348 0354</p> <p>0366 0373 1377 1379 0381 0384 0405 1412 1419 0421 0425 0436 1443 1450 0456 0473 0477 1484 1485 0488 0491 0511 1515 1521 0523</p> <p>0530 0543 1547 1557 0563 0575 0582 1585 1588 0590 0593 0613 1620 1626 0628 0637 0645 1652 1659 0665 0669 0684 1691 1693 0695</p> <p>0698 0720 1724 1730 0732 0739 0750 1754 1764 0770 0784 0791 1795 1797 0799 0802 0822 1829 1835 0837 0844 0854 1861 1868 0874</p> <p>0889 0893 1900 1902 0904 0907 0927 1931 1937 0939 0948 0959 1963 1973 0979 0981 0985 11002 11004 01006 01009 01031 11035 11044 01046</p> <p>01053 01061 11065 11075 01081 01095 01102 11105 11111 01113 01116 01136 11140 11145 01145 01155 01158 11172 11182 01185 01200 01207 11211 11213 01215</p> <p>01216 01228 11245 11251 -----</p>
0 1 1	<p>16 116 029 036 043 151 176 082 087 0101 1110 1121 0131 0141 0145 1153 1160 0164 0192 0206 1215 1223 0238 0245 0252</p> <p>1260 1265 0269 0294 0308 1317 1330 0340 0350 0357 1362 1357 0393 0401 0415 1424 1432 0445 0452 0459 1467 1494 0465 0503 0517</p> <p>1526 1537 0549 0559 0565 1571 1586 0590 0598 0622 1631 1641 0654 0661 0665 1676 1701 0707 0712 0726 1735 1746 0756 0766 0773</p> <p>1785 1805 0809 0817 0831 1840 1843 0863 0870 0877 1885 1910 0914 0919 0933 1942 1955 0965 0975 0982 1987 11012 01016 01026 01040</p> <p>11045 11057 01070 01077 01084 11082 11119 01123 01128 01142 11151 11162 01174 01184 01191 11196 11221 01225 01235 01247 -----</p>

[3-d] 4-free

→

0 0 0 0	0 ₁ 0 ₂ 0 ₃ 1 ₄ 1 ₂₂ 0 ₃₅ 0 ₃₉ 0 ₄₀ 1 ₄₁ 1 ₅₆ 0 ₈₀ 0 ₈₁ 0 ₈₂ 1 ₈₃ 1 ₉₅ 0 ₁₀₂ 0 ₁₀₃ 0 ₁₀₄ 1 ₁₀₅
0 0 0 1	1 ₅ 1 ₂₃ 0 ₄₂ 0 ₅₇ 0 ₇₁ 1 ₇₅ 1 ₈₄ 0 ₉₆ 0 ₁₀₆ 0 ₁₁₆ 1 ₁₂₂
0 0 1 0	1 ₁₇ 1 ₃₃ 0 ₄₃ 0 ₅₈ 0 ₇₂ 1 ₉₀ 1 ₉₇ 0 ₁₀₇ 0 ₁₁₀ 0 ₁₁₃ 1 ₁₁₇
0 0 1 1	1 ₆ 1 ₂₄ 0 ₄₆ 0 ₆₁ 0 ₇₆ 1 ₈₅ 1 ₁₂₃ 0 ₁₃₄
0 1 0 0	0 ₂₀ 0 ₃₆ 1 ₄₄ 1 ₅₉ 0 ₇₃ 0 ₉₃ 0 ₁₀₀ 1 ₁₀₈ 1 ₁₁₁ 0 ₁₁₄ 0 ₁₂₀
0 1 0 1	0 ₁₈ 0 ₃₄ 1 ₅₀ 1 ₆₅ 0 ₉₁ 0 ₉₈ 0 ₁₁₈ 1 ₁₂₉
0 1 1 0	0 ₁₄ 0 ₃₀ 1 ₄₇ 1 ₆₂ 0 ₇₇ 0 ₁₃₁
0 1 1 1	1 ₇ 1 ₂₅ 0 ₅₂ 0 ₆₇ 0 ₈₆ 1 ₁₂₄
1 0 0 0	0 ₂₁ 0 ₃₇ 0 ₅₅ 1 ₇₀ 1 ₇₄ 0 ₇₉ 0 ₉₄ 0 ₁₀₁ 1 ₁₁₅ 1 ₁₂₁
1 0 0 1	0 ₁₆ 0 ₃₂ 1 ₄₅ 1 ₆₀ 0 ₈₉ 0 ₁₀₉ 0 ₁₁₂ 1 ₁₃₃
1 0 1 0	0 ₁₉ 0 ₃₅ 1 ₄₉ 1 ₆₄ 0 ₉₂ 0 ₉₉ 0 ₁₁₉ 1 ₁₂₈
1 0 1 1	0 ₁₃ 0 ₂₉ 1 ₅₁ 1 ₆₆ 0 ₁₃₀
1 1 0 0	1 ₁₅ 1 ₃₁ 0 ₅₄ 0 ₆₉ 0 ₇₈ 1 ₈₈ 1 ₁₃₂
1 1 0 1	1 ₁₂ 1 ₂₈ 0 ₄₈ 0 ₆₃ 0 ₁₂₇
1 1 1 0	1 ₁₁ 1 ₂₇ 0 ₅₃ 0 ₆₈ 0 ₈₇ 1 ₁₂₆
1 1 1 1	1 ₈ 1 ₉ 1 ₁₀ 0 ₂₆ 0 ₁₂₅

→

00000	00111	11101	10010	10000	11110	11001
01000	00001	00110	10111	00001	00110	10111
00010	00110	00000	01110	01010	00010	10000
00010	01001	00010	10001	11101	01100	110-----

第5節 n 項順列 π_n のつながり性

定義

$(n-1)$ 項順列を π_{n-1} , その π_{n-1} のあとに 0, 1 をつけ足してできる n 項順列を $\pi_{n-1} 0$, $\pi_{n-1} 1$ で表わし, $(n-1)$ 項順列 π_{n-1} の前に 0, 1 をつけ足してできる n 項順列を $0 \pi_{n-1}$, $1 \pi_{n-1}$ で表わす。また $(n-2)$ 項順列 π_{n-2} は, π_{n-1} の末尾の項を取り除いてできた順列とし, 一般に $(n-i)$ 項順列 π_{n-i} は, π_{n-i-1} の末尾の項を取り除いてできた順列とする。

定理

n -free 系列中には, 0, 1 の 2^n 個の n 項順列 π_n のいずれもが必ず現われてくる。

<注意> 系列中の n 項順列は, 互いに $(n-1)$ 項を共有するように overlap して数える。

<証明>

n 項順列 $\pi_{n-1} 1$ が, 系列の中に現われないと仮定する。そうすると, n 項順列 $0 \pi_{n-1}$, $1 \pi_{n-1}$ のどれもが系列の中に入らないということになる。なぜならば $0 \pi_{n-1}$, $1 \pi_{n-1}$ のうち

のどれか一つが系列に入っていればそのあとに1がつけられて、 $\pi_{n-1}1$ が現われたはずだからである。

つぎに $0\pi_{n-1}$ が系列の中に現われないということは、順列 $00\pi_{n-2}$, 順列 $10\pi_{n-2}$ が系列中に現われないということである。また $1\pi_{n-1}$ が系列中に現われないということは、順列 $01\pi_{n-2}$ と $11\pi_{n-2}$ が系列中に現われないことである。なぜならば、 $00\pi_{n-2}$, $10\pi_{n-2}$, $01\pi_{n-2}$, $11\pi_{n-2}$ のうちのどれかが現われたとすると、そのあとに1か0のどれかがつけられて $0\pi_{n-1}$, $1\pi_{n-1}$ のどれかが、その循環中に現われたはずだからである。

同様に $00\pi_{n-2}$, $10\pi_{n-2}$, $01\pi_{n-2}$, $11\pi_{n-2}$ のどれもが系列中に現われないということとは、 $000\pi_{n-3}$, $010\pi_{n-3}$, $100\pi_{n-3}$, $110\pi_{n-3}$, $001\pi_{n-3}$, $011\pi_{n-3}$, $101\pi_{n-3}$, $111\pi_{n-3}$, すなわち可能な3項順列を π_{n-3} の前に置いて出来る n 項順列のどれもが現われないことになる。

さらに同じ考えをつづけるとすべての n 項順列が系列に入っていないことになる。これは不合理である。したがって π_{n-1} が $(n-1)$ 項順列のどれであろうとも、 n 項順列 $\pi_{n-1}1$ が系列中に入ってくる。同じことは n 項順列 $\pi_{n-1}0$ についてもいえる。それゆえ 2^n 個の n 項順列は、互いに $(n-1)$ 項を共有して一列につながせられる。

上述のことより、 π_{n-1} をどのような $(n-1)$ 項順列としようとも、 n 項順列が必ず系列中に入ってくる。そして $0\pi_{n-2}0$ と $1\pi_{n-2}0$ のあとに0と1をつけるのであるから、 $\pi_{n-2}00$, $\pi_{n-2}01$ の型の n 項順列が必ず系列中に入ってくる。同様に $0\pi_{n-2}1$ と $1\pi_{n-2}1$ に対応して $\pi_{n-2}10$, $\pi_{n-2}11$ の型の n 項順列が、必ず系列中に入ってくる。同様に、 $\pi_{n-3}000$, $\pi_{n-3}001$, $\pi_{n-3}010$, $\pi_{n-3}011$, $\pi_{n-3}100$, $\pi_{n-3}101$, $\pi_{n-3}110$, $\pi_{n-3}111$ なる型の n 項順列が系列中に入ってくるといえる。同様の考えを続けると、あらゆる型の n 項順列が必ず系列中に入ってくるといえる。

またどの n 項順列 π_n に対しても、 m 回ごとのうち r 回は0をつけ、 $(m-r)$ 回は1をつけるのであるから、系列を十分長くすれば、作られた無限系列の初めの項を取り去っても、無限系列全体 α において ${}_aF(0) = \frac{r}{m}$ である。 n -free 系列の作り方の手順は限りなく繰返すことができるから、作られる無限系列 α は、 ${}_aF(0) = \frac{r}{m}$ なる n -free 系列である。

したがって、 2^n 個の順に隣り合う n 項順列 π_n が、互いに $(n-1)$ 項を共有して、すなわち overlap して、かつ n -free であるように一列につながる。

第6節 n -free ならば $(n-1)$ -free である

定義

1. 系列 α の第1項から第 n 項まで、第2項から第 $n+1$ 項まで、第3項から第 $n+2$ 項まで、…、というようにとり、それを順に並べた系列を α にもとづく overlapping sequence とよび、記号 $\alpha_{(n)}$ で表わす。 $\alpha_{(n)}$ では、隣り合う各項は、もとの系列 α の $(n-1)$ 項が重っている。

2. 数列 α の第1項から第 n 項まで、第 $n+1$ 項から第 $2n$ 項まで、第 $2n+1$ 項から第 $3n$ 項まで、……というようにとり、それらをそのままの順に並べた系列を α にもとづく adjoining sequence とよび、記号 α_n で表わす。 α_n では隣り合う各項は、もとの α 系列の項は、共有せず overlap していない。

定理

無限 0, 1 系列 α が, n -free であるならば α は $(n-1)$ -free である。

この定理より, n -free が検証されれば, n より小さい整数 K についての K -free をいちいち検証する必要がなくなる。

<証明>

α を n -free 無限 0, 1 系列とすると, この系列には, 0 と 1 からなる n 項順列 π_n がすべて含まれているので, 系列 α に含まれる任意特定の n 項順列 π_n の頻度を ${}_aF(\pi_n)$ で表わし, $\alpha_{(n)}$, α_n に含まれる π_n の頻度を, それぞれ $\alpha_{(n)}F(\pi_n)$, $\alpha_nF(\pi_n)$ で表わすことにする。

ここで α において Predecessor π_n の直後が 0 である頻度を ${}_aF(\pi'_n \cdot 0)$ とすると,

$${}_aF(\pi'_n \cdot 0) = \alpha_{(n+1)}F(\pi_n 0).$$

$$\text{また } {}_aF(\pi'_n \cdot 0) = \alpha_{(n)}F(\pi_n) \cdot {}_aF(0 | \pi_n).$$

系列 α は, n -free であるから

$${}_aF(0 | \pi_n) = {}_aF(0)$$

ゆえに

$$(1) \quad \alpha_{(n+1)}F(\pi_n 0) = \alpha_{(n)}F(\pi_n) \cdot {}_aF(0)$$

(1) が成りたてば

$$(2) \quad \alpha_{(n+1)}F(\pi_n 1) = \alpha_{(n)}F(\pi_n) \cdot {}_aF(1)$$

も成りたつことが分かる。

したがって α が n -free であるということは, (1) または (2) が成りたつことである。

また系列 α が, n -free であれば, $(n-1)$ -free であるということは, (1) が成りたつとき, (1) における n と同じ n に対して,

$$\left\{ \begin{array}{l} (3) \quad \alpha_{(n)}F(\pi_{n-1} 0) = \alpha_{(n-1)}F(\pi_{n-1}) \cdot {}_aF(0) \\ \text{または} \\ (4) \quad \alpha_{(n)}F(\pi_{n-1} 1) = \alpha_{(n-1)}F(\pi_{n-1}) \cdot {}_aF(1) \end{array} \right.$$

を示せばよい。

可能な n 項順列のすべてからなる集合は, $0\pi_{n-1}$ 型のもものと $1\pi_{n-1}$ 型のものに分けられるから, α が n -free であるというのは, (1), (2) より

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{(n+1)}F(0\pi_{n-1}0) = \alpha_{(n)}F(0\pi_{n-1}) \cdot {}_aF(0) & (\pi_n = 0\pi_{n-1} \text{ のとき}) \\ \alpha_{(n+1)}F(1\pi_{n-1}0) = \alpha_{(n)}F(1\pi_{n-1}) \cdot {}_aF(0) & (\pi_n = 1\pi_{n-1} \text{ のとき}) \\ \alpha_{(n+1)}F(0\pi_{n-1}1) = \alpha_{(n)}F(0\pi_{n-1}) \cdot {}_aF(1) & (\pi_n = 0\pi_{n-1} \text{ のとき}) \\ \alpha_{(n+1)}F(1\pi_{n-1}1) = \alpha_{(n)}F(1\pi_{n-1}) \cdot {}_aF(1) & (\pi_n = 1\pi_{n-1} \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

が成りたつことである。

また, $\alpha_{(n)}$ における $0\pi_{n-1}$, $1\pi_{n-1}$ は, いずれも $\alpha_{(n-1)}$ において, π_{n-1} として数えられる。 $\alpha_{(n-1)}$ における π_{n-1} は, $\alpha_{(n)}$ では, $0\pi_{n-1}$, $1\pi_{n-1}$ のどれかとして数えられる。ここで $\alpha_{(n)}$ の初項が π_{n-1} である場合を除く。 α は無限系列としているから, そのようにしても $\alpha_{(n-1)}F(\pi_{n-1})$ には影響ない。

したがって n がどのような整数でも

$$(6) \quad {}_{\alpha(n)}F(0\pi_{n-1}) + {}_{\alpha(n)}F(1\pi_{n-1}) = {}_{\alpha(n-1)}F(\pi_{n-1}) \text{ となるから}$$

$$(7) \quad \begin{cases} {}_{\alpha(n+1)}F(0\pi_{n-1}0) + {}_{\alpha(n+1)}F(1\pi_{n-1}0) = {}_{\alpha(n)}F(\pi_{n-1}0) \\ {}_{\alpha(n+1)}F(0\pi_{n-1}1) + {}_{\alpha(n+1)}F(1\pi_{n-1}1) = {}_{\alpha(n)}F(\pi_{n-1}1) \end{cases}$$

したがって (5) より

$$(8) \quad \begin{cases} {}_{\alpha(n+1)}F(0\pi_{n-1}0) + {}_{\alpha(n+1)}F(1\pi_{n-1}0) = \{{}_{\alpha(n)}F(0\pi_{n-1}) + {}_{\alpha(n)}F(1\pi_{n-1})\} \cdot {}_{\alpha}F(0) \\ {}_{\alpha(n+1)}F(0\pi_{n-1}1) + {}_{\alpha(n+1)}F(1\pi_{n-1}1) = \{{}_{\alpha(n)}F(0\pi_{n-1}) + {}_{\alpha(n)}F(1\pi_{n-1})\} \cdot {}_{\alpha}F(1) \end{cases}$$

(6), (7), (8) より

$$\begin{cases} {}_{\alpha(n)}F(\pi_{n-1}0) = {}_{\alpha(n-1)}F(\pi_{n-1}) \cdot {}_{\alpha}F(0) \\ {}_{\alpha(n)}F(\pi_{n-1}1) = {}_{\alpha(n-1)}F(\pi_{n-1}) \cdot {}_{\alpha}F(1) \end{cases}$$

よって (3), (4) が成り立つ。

以上二項系列について、 n -free なる概念を基礎に Popper による after effect についての問題が論ぜられた。実は after effect に関しては、これに先立ち、一般の標識系列について、H. Reichenbach が考察した業績があり、これを結びつけて前節までの考察を補完することも意味があると思われるので以下に少しこれをのべることにする。

第7節 after effect から自由

ランダム系列の一つの特性として、after effect から自由であるということが望ましく、Popper の n -free は、このことを実現する一つ的手段であった。ところが、Popper の作った方法は長さ 2^{n+1} でもとにもどり、以後はこの循環節のくり返しになる。第5節で行なった方法も同様(長さ m^{n+1})、このような数学系列は、その循環が十分に長ければ、その最初の部分をとって十分ランダムと考えられる有限系列に近似できるであろうが、これを無限に循環させては周期的になるというランダムとしては不適格な性質をもつことになる。これを解決するために、上記 Reichenbach の業績を参照し、そして彼が normal 系列とよんだものを参考にした。よってこれを説明する。

任意の標識による系列 A が、normal 系列であるという第一の条件は、系列 A の項のいかなる結合をとろうとも、それを Predecessor とする項位選出から得られる部分系列においての B の頻度が、もとの系列における B の頻度 $P(A, B)$ と等しいという条件を満たすことである。これを $P(A, B, B^1)$ と表わすことにし、またこのような量を Phase probability とよぶ。ここに記号 $P(A, B, B^1)$ は、 A 系列の中で B を predecessor とする項位選出を行なったとき、その部分系列において B の頻度を表わす。ここに B^1 は B と同じ配列であるが、predecessor として考慮される B の次に現われる B という意味で、superscript 1 をつけたのである。

そして、例えば

$$P(A, B, B^1) = P(A, B)$$

のような関係を使って第1の条件が表示される。Phase probability は連続する項の組合せの頻度と密接に関係している。一般的な乗法定理を適用して、組合せ BB の頻度、 BBB

の頻度は,

$$(1) \quad P(A, B, B^1) = P(A, B) \cdot P(A, B, B^1)$$

$$(2) \quad P(A, B, B^1, B^2) = P(A, B, B^1) \cdot P(A, B, B^1, B^2) \\ = P(A, B) \cdot P(A, B, B^1) \cdot P(A, B, B^1, B^2)$$

のようになる。

定義

系列のあらゆる phase probability が, もとの系列の頻度に等しいとき, このような系列は, 「after effect から自由」という。

すなわち, 次の関係を得る。

$$(3) \quad P(A, B^1_{i_1} \dots B^{v-1}_{i_{v-1}}, B^v_{i_v}) = P(A, B_{i_v})$$

また (1) に従う組合せの頻度は (3) を使って

$$(4) \quad P(A, B^1_{i_1} \dots B^v_{i_v}) = P(A, B^1_{i_1} \dots B^{v-1}_{i_{v-1}}) \cdot P(A, B^1_{i_1} \dots B^{v-1}_{i_{v-1}}, B^v_{i_v}) \\ = P(A, B^1_{i_1} \dots B^{v-1}_{i_{v-1}}) \cdot P(A, B_{i_v})$$

を得る。

右辺の最初の項に同じ手順を適用して, $v-1$ ステップのあとに次のような結果を得る。

$$(5) \quad P(A, B^1_{i_1} \dots B^v_{i_v}) = P(A, B_{i_1}) \dots P(A, B_{i_v})$$

したがって, after effect から自由な系列, すなわち normal 系列は, その項の連続に対してこのような特殊な乗法定理を満足する特徴がある。また (1) あるいは (5) の左辺において subscript i はつねに一つの結合によって数える操作に関係する。それゆえに, 例えばグループ BBB は, \underline{BBB} で示される二つの重複した組合せになり, この数え方を「重複した数え方」とよぶ。

先にサイコロを 2000 回投げて得た表 1 の系列は, ランダム性の特徴を示した。したがって「重複した数え方」に対して, 上述の特別な乗法定理を満足する。実際 表 1 における 1 を B として考えると次のようになる。

$$P(A, B, B^1) = \frac{485}{2000},$$

$$P(A, B) = \frac{991}{2000},$$

$$P(A, B, B^1) = \frac{485}{989}$$

であるから

$$P(A, B, B^1) = P(A, B) \cdot P(A, B, B^1)$$

となる。したがって表 1 の系列において, 式 (1) が成り立っていることが確認された。

また

$$P(A, B, B^1, B^2) = \frac{216}{2000},$$

$$P(A, B, B^1, B^2) = \frac{216}{485}$$

であるから

$$P(A, B, B^1, B^2) = P(A, B) \cdot P(A, B, B^1) \cdot P(A, B, B^1, B^2)$$

となり、表1の系列において式(2)が成りたつことが確認された。

第8節 Normal 系列

つぎに Reichenbach は、normal 系列の第2の条件を考えた。「after effect から自由」という性質は、ランダム系列であるというためには必要であるが十分ではない。normal 系列の十分条件を、考えるために、規則的分割 (the regular division) (例えば、あらゆる7番目の項 y_i の選択) によって、もとの系列より項位選択 (この選択を S とする) された部分系列における B の頻度を考え、それを

$$P(A, S, B)$$

とかくことにする。

そして、原系列から得られた部分系列における B の頻度 $P(A, S, B)$ が、原系列における B の頻度 $P(A, B)$ と等しいことを第2の条件とした。

例えば

$$P(A, S, B) = P(A, B)$$

$$P(A, S, B, B^1) = P(A, B, B^1)$$

$$P(A, S^1, B, B^1) = P(A, B, B^1)$$

が成りたつ。

すなわち、第2の条件は、次のように定義する。

定義

$$P(A, S, B_i) = P(A, B_i) \text{ ならば}$$

$$(6) \quad P(A, S^\alpha, B^1_{i_1} \cdots B^{\nu-1}_{i_{\nu-1}}, B^\nu_{i_\nu}) = P(A, B^1_{i_1} \cdots B^{\nu-1}_{i_{\nu-1}}, B^\nu_{i_\nu})$$

$$(1 \leq \alpha \leq \nu)$$

である。

つぎにもとの系列 (Major sequence) を規則的分割によって部分系列

$$S_{1\lambda}, S_{2\lambda}, \dots, S_{i\lambda}$$

に分割する。そして、その部分系列のすべての項 y_i は、 $S_{i\lambda}$ に属し、次の条件がある。

$$i = \kappa + (m-1)\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ (部分系列の項の数)}$$

$$\kappa = 1, \text{ or } 2, \text{ or } \dots, \text{ or } = \lambda$$

例えば、系列 $y_1, y_6, y_{15}, y_{22}, y_{29}, \dots$ は、Selection $S_{1\lambda}$ によって決定され、結果として、 $\lambda=7, \kappa=1$ となる。

これらの概念を使って normal 系列を次のように定義する。

定義

もし系列 A が「after effect から自由」、すなわち、 $P(A, B^1_{i_1} \cdots B^{\nu-1}_{i_{\nu-1}}, B^\nu_{i_\nu}) = P(A, B_{i_\nu})$ であり、かつ次の (7), (8)

$$(7) \quad P(A, S_{i_k}, B_i) = P(A, B_i)$$

$$(8) \quad P(A, S_{i_k}^a, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\nu-1}}^{\nu-1}, B_{i_\nu}^\nu) \\ = P(A, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\nu-1}}^{\nu-1}, B_{i_\nu}^\nu) \\ = P(A, B_{i_\nu})$$

(ここで $1 \leq \alpha \leq \nu, 1 \leq i \leq \lambda$ である)

を満たすとき, 系列 A を Normal 系列であるという。

第9節 Section による数え方

式 (5) は「重複して数える」場合に正当であると示したが, 式 (7), (8) の組合せは, 違った数え方である。すなわち式 (7), 式 (8) は, 重複しない長さ λ がつぎつぎに接続する「Section による数え方」である。

Section による数え方は, 規則的分割を使って公式化する。たとえばその系列の最初から, 長さ λ 個づつ分割し, おこる Section $B_{i_1}^1 \cdots B_{i_\lambda}^\lambda$ はつぎの表現で数えられる。

すなわち

$$(9) \quad P(A, S_{i_1}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_\lambda}^\lambda)$$

例えば, ある系列の項の最初から $\lambda=2$ 個づつ分けてできた Section の中から組合せ BB は, $P(A, S_{i_1}^1, B_{i_1}^1, B_{i_2}^2)$ の表現で数えられる。同様に, 系列の1番目の項をすてたあと, 起る BB は, $P(A, S_{i_2}^1, B_{i_1}^1, B_{i_2}^2)$ の表現で数えられる。したがって, (9) で $S_{i_1}^1$ のかわりに, 一般的な $S_{i_k}^1$ を使って section を区切ることは, 系列の最初の $(k-1)$ 項を取り消したあとと始まるという可能性を表現することができる。(7), (8) の結果として, Normal 系列は, Section の数え方の頻度に対して, 次のような特別な乗法定理を満足する。

$$(10) \quad P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_\lambda}^\lambda) = P(A, B_{i_1}) \cdots P(A, B_{i_\lambda})$$

<証明>

(4) より

$$P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_\lambda}^\lambda) = P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-1}}^{\lambda-1}) \cdot P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-1}}^{\lambda-1}, B_{i_\lambda}^\lambda) \\ = P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-1}}^{\lambda-1}) \cdot P(A, B_{i_\lambda}), \quad 1 \leq k \leq \lambda$$

ここで (7), (8) を $P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-1}}^{\lambda-1}, B_{i_\lambda}^\lambda)$ に適用する。その手順を繰り返して次の式を得る。

$$P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-1}}^{\lambda-1}) \\ = P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-2}}^{\lambda-2}) \cdot P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-2}}^{\lambda-2}, B_{i_{\lambda-1}}^{\lambda-1}) \\ = P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_{\lambda-2}}^{\lambda-2}) \cdot P(A, B_{i_{\lambda-1}})$$

もう一度最後の段階は, (8) によってカバーされる。その手順をさらにくり返すことによって次の結果を得る。

$$P(A, S_{i_k}^1, B_{i_1}^1 \cdots B_{i_\lambda}^\lambda) = P(A, B_{i_1}) \cdots P(A, B_{i_\lambda}).$$

このようにして Normal 系列は「Section で数える事に対して, 特別な乗法定理を満足することが分った。また Normal 系列は前述の通り, その定義が「after effect から自由」という条件より「重複して数える」ことに対して成り立った式 (5) も満足する。

これらの Section による数え方に対して、先にあげたサイコロ投げ 2000 回の表 1 について 1 を B として計算した結果は、つぎのようになった。

$$P(A, S_{21}, B^1, B^2) = \frac{228}{1000}$$

$$P(A, S_{22}, B^1, B^2) = \frac{237}{999}$$

$$P(A, S_{23}, B^1, B^2) = \frac{236}{999}$$

$$P(A, S_{24}, B^1, B^2) = \frac{227}{998}$$

となり、それは $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ に近い。

したがって、この点からいうと、表 1 の系列は、Normal 系列の特徴を示していると確認できた。

末筆ながら本研究に際し、いろいろご助言を下された日本数学教育学会名誉会長・明星大学教授佐藤良一郎先生、また本論文において終始ご指導を賜った日大大学院教授宇野利雄先生に対し深謝致します。

参 考 文 献

1. Popper, Karl R.: The Logic of Scientific Discovery, Hutchinson of London, 1975.
2. von Mises, Richard: Wahrscheinlichkeit Statistik und Wahrheit, Springer, Wien, 1951.
3. Hans Reichenbach: The Theory of Probability, 1949.
4. 林知己夫: 「集団と個」『数理科学』 March 1975.
5. Wald, A. "Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, Heft 8. Wien, 1937.
6. 松下嘉米男: 「ゲーム, 偶然, ランダム系列」『科学基礎論研究』, Vol. 9, August, 1969.
7. 石田正次: 「モンテカルロ法と乱数」『科学基礎論研究』 Vol. 7, February, 1965.
8. A. N. Kolmogorov: "On tables of random numbers". Sankhya {A}. 25, 1963.
9. Naylor, T. H. & Balintfy, J. L. & Burdick, D. S. 共著, 水野幸男, 小柳芳雄共訳: 『コンピュータシミュレーション』昭和49年.

(昭和53年3月25日受理)