

Sur la translation à droite par rapport à un groupe à dimension infinie

Par Jōyō KANITANI.*

Résumé

En fait du groupe de Lie à dimension fini on peut traiter la translation à gauche et celle à droite à peu près de la même manière, mais il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit du groupe de Lie à dimension infinie. Quant à la translation à gauche nous avons donné quelques formules dans un article précédent. Cet article a pour but de déduire des formules concernant la translation à droite, qui sont utiles à traiter le chemin horizontal au dessus d'un chemin contenu dans une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie.

1 Soient S un espace projectif à dimension infinie. L'ensemble \mathcal{G} des transformations projectives normales $S \rightarrow S$ forme un groupe topologique ([2], p. 11). Chacune de ces transformations est attachée à un changement de repère $\mathcal{A}(A_i) \rightarrow \mathcal{A}'(A_i')$. L'ensemble des points $A_i (i \in I)$ qui se nomment les sommets du repère \mathcal{A} forme une base de S . On suppose qu'il possède un bon ordre et que l'ensemble d'indices I lui est équipotent. On désigne par i l'élément le plus petit de I . Soient (p_j^i) ($i, j \in I$) les coordonnées normales de A_j' par rapport au repère \mathcal{A} . Une fois l'indice j fixé, on a $p_j^i = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i et les $p_j^i \neq 0$ se relient au moyen de l'équation $\sum_i |p_j^i| = 1$. L'élément le plus petit de tels indices i se note $i_0(p, j)$. On a $p^{i_0(p, j)} > 0$ d'après la définition des coordonnées normales ([1], p. 5). La transformation projective normale attachée au changement $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ s'exprime par

$$px'^i = \sum_j p_j^i x^j.$$

On prend les $p_j^i (i, j \in I; i \neq i_0(p, j))$ comme coordonnées de cette transformation.

On induit sur \mathcal{G} la topologie du produit S^I en faisant correspondre au graphe fonctionnel F telle que $F(i) \in S (i \in I)$ la transformation projective T dont les coefficients p_j^i sont les coordonnées normales du point $p_j \equiv A_j' = TA_j$ pour chaque j . Or, l'ensemble des cubes projectifs $\mathcal{G}(a, \varepsilon) (a \in S)$ forme une base pour la topologie de S . Donc, si l'on considère l'ensemble $U_{(p, j_0, \varepsilon)}$ des transformations projectives normales $T(\zeta_s^r)$ telles que

$$\zeta_{j_0} (= T\zeta_s^r) A_{j_0} \in \mathcal{G}(p_{j_0}, \varepsilon)$$

la topologie de \mathcal{G} est engendrée par la famille de tels ensembles, car l'ensemble $U_{(p, j_0, \varepsilon)}$ correspond au graphe fonctionnel tel que

* 一般教養教授 数学

$$F(j) \in S, \quad F(j_0) \in \mathcal{G}(p_0, \epsilon).$$

Autrement dit, il est un voisinage du point p .

L'intersection de tels voisinages de nombre fini

$$\mathcal{U}_{(p, \epsilon)} = U_{(p, j_1, \epsilon)} \cap \dots \cap U_{(p, j_l, \epsilon)}$$

se nomme le voisinage élémentaire de p . D'une manière précise, on a pour $\zeta \in \mathcal{U}_{(p, \epsilon)}$

$$\zeta_{j_s} \in \mathcal{G}(p_{j_s}, \epsilon) \quad (s=1, \dots, l), \quad \zeta_j \in S.$$

D'après la convention par rapport au largeur d'un cube projectif, on a

$$0 < \epsilon \leq \min_i (|p_{j_s}^{i'}| \neq 0) \quad (s=1, \dots, l; i \in I).$$

L'ensemble $(\mathcal{U}_{(p, \epsilon)} \mid p \in \mathcal{G})$ forme une base pour la topologie de \mathcal{G} . On désigne par $\tilde{\mathcal{U}}_{(p, \epsilon)}$ l'ensemble des transformations ζ telles que

$$\zeta_{j_s} = \mathcal{G}(p_{j_s}, \epsilon) \quad (s=1, \dots, l), \quad \zeta_j = p_j \quad (j \in I - \{j_1, \dots, j_l\}).$$

On peut prendre les $\zeta_{j_0}^{i'} (i' \neq i_0(p, j_0))$ comme une partie des coordonnées locales de la transformation $\zeta = T(\zeta_j^{i'})$. En effet cela revient à la convention mentionnée plus haut, si l'indice $i_0(p, j_0)$ est le plus petit des indices i tels que $\zeta_{j_0}^i \neq 0$. Au cas contraire, en prenant $\zeta_{j_0}^{i_0'}$ où i_0' est l'indice le plus petit, comme une coordonnée locale on peut écrire

$$\zeta_{j_0}^{i_0} = 1 - \zeta_{j_0}^{i_0'} - \sum_{i \in \mathcal{G}^{i_0, i_0'}} |\zeta_{j_0}^i| > 0,$$

car $\zeta_{j_0}^{i_0}$ est de même signe que $p_{j_0}^{i_0}$.

2. Soit $T(\gamma_j^{i'})$ une transformation projective appartenant à un voisinage $U_{(g, j_0, \sigma)}$ de g . Envisageons la translation à gauche associée à un élément y de \mathcal{G} : $L(y)\gamma = y\gamma$. $y\gamma$ se note p . On a

$$|\gamma_{j_0}^{i'} - g_{j_0}^{i'}| < \sigma, \quad g_{j_0}^{i'} - \sigma < \gamma_{j_0}^{i'} < g_{j_0}^{i'} + \sigma.$$

Comme $\sigma \leq \min_i (|g_{j_0}^{i'}| \neq 0)$ d'après la convention faite par rapport au largeur du cube projectif, on a aussi

$$0 \leq |g_{j_0}^{i'}| - \sigma < |\gamma_{j_0}^{i'}| < |g_{j_0}^{i'}| + \sigma,$$

d'où

$$\sum_{i'} |\gamma_{j_0}^{i'}| < c\sigma \quad (g_{j_0}^{i'} = 0, \gamma_{j_0}^{i'} \neq 0),$$

où $c(>0)$ est le nombre des indices i tels que $g_{j_0}^i \neq 0$. Il vient donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_i y_i^t \gamma_{j_0}^{i'} - p_{j_0}^{i'} \right| &= |y_{i_1}^t \gamma_{j_0}^{i_1} + \dots + y_{i_c}^t \gamma_{j_0}^{i_c} + \sum_{i'} y_i^{t'} \gamma_{j_0}^{i'} \\ &\quad - (y_{i_1}^t g_{j_0}^{i_1} + \dots + y_{i_c}^t g_{j_0}^{i_c})| < 2c\sigma, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(2.1) \quad L(y)U_{(g, j_0, \sigma)} \subset U_{(p, j_0, \epsilon)}$$

$$(\sigma \leq \min(\frac{\varepsilon}{2c}, \frac{1}{2c} (|p_{j_0}^t| \neq 0, |g_{j_0}^t| \neq 0))).$$

Si l'on fait $g=e$, il vient $y=p$, $c=1$,

$$(2. 1)' \quad L(p)U_{(e, j_0, \sigma)} \subset U_{(p, j_0, \sigma)} \quad (\sigma \leq \min(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} (|p_{j_0}^t| \neq 0)))$$

tandis que si l'on fait $p=e$, il vient $y=g^{-1}$,

$$(2. 1)'' \quad L(g^{-1})U_{(g, j_0, \sigma)} \subset U_{(e, j_0, \sigma)} \quad (\sigma \leq \min(\frac{\varepsilon}{2c}, |g_{j_0}^t| \neq 0)).$$

Nous nous occupons ensuite de la translation à droite. Prenons deux éléments y et p de \mathcal{G} . Soit $z=y^{-1}$. Posons $g=zp$. On a

$$D(g)y=yg=yzp=p.$$

Envisageons un voisinage élémentaire

$$\mathcal{U}_{(p, \sigma)} = U_{(p, k_1, \sigma)} \cap \dots \cap U_{(p, k_n, \sigma)} \\ (\sigma \leq \min(|p_{k_v}^t| \neq 0) \quad (v=1, \dots, n))$$

de p . Pour chaque $k_v (1 \leq v \leq n)$, on a $g_{k_v}^j = 0$ sauf pour un nombre fini des indices j . Soit (j_1, \dots, j_m) l'ensemble de tels indices exceptionnels. Prenons un élément η dans le voisinage élémentaire

$$\mathcal{U}_{(y, \sigma)} = U_{(y, j_1, \sigma)} \cap \dots \cap U_{(y, j_m, \sigma)}$$

de y :

$$|\eta_{j_s}^t - y_{j_s}^t| < \sigma \quad (s=1, \dots, m; \sigma \leq \min(|y_{j_s}^t| \neq 0)).$$

On a pour chaque k_v

$$|\eta_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s} - y_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s}| < \sigma |g_{k_v}^{t_s}| \quad \text{ou} \quad \eta_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s} - y_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s} = 0.$$

On en tire

$$|\sum_j \eta_j^t g_{k_v}^j - p_{k_v}^t| = |\sum_s (\eta_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s} - y_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s})| \\ \leq \sum_s |\eta_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s} - y_{j_s}^t g_{k_v}^{j_s}| < \sigma \sum_j |g_{k_v}^j| = \sigma$$

ce qui nous montre que

$$(2. 2) \quad D(g)\mathcal{U}_{(y, \sigma)} \subset \mathcal{U}_{(p, \sigma)} \quad (\sigma \leq \min(|y_{j_s}^t| \neq 0, |p_{k_v}^t| \neq 0)).$$

En particulier, si l'on fait $y=e$, il vient $z=e$, $g=p$: pour le voisinage élémentaire $\mathcal{U}_{(p, \sigma)} \quad (\sigma \leq \min(|p_{k_v}^t| \neq 0))$, il existe le voisinage élémentaire

$$\mathcal{U}_{(e, \sigma)} = U_{(e, j_1, \sigma)} \cap \dots \cap U_{(e, j_m, \sigma)}$$

tel que

$$(2. 2)' \quad D(p)\mathcal{U}_{(e, \sigma)} \subset \mathcal{U}_{(p, \sigma)} \quad (\sigma \leq \min(|p_{k_v}^t| \neq 0)).$$

Si l'on fait $p=e$, il vient $g=z=y^{-1}$: étant donné le voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{(e,e)} = U_{(e,k_1,e)} \cap \dots \cap U_{(e,k_n,e)} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

on peut déterminer le voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{(y,\sigma)} = U_{(y,j_1,\sigma)} \cap \dots \cap U_{(y,j_m,\sigma)}$$

tel que

$$(2. 2)'' \quad D(y^{-1})\mathfrak{U}_{(y,\sigma)} \subset \mathfrak{U}_{(e,\sigma)} \quad (\sigma \leq \min_i (|y_{j_m}^i| \neq 0)).$$

Maintenant, un voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{(e,e)} = U_{(e,l_1,e)} \cap \dots \cap U_{(e,l_a,e)} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

de e étant donné, soit (h_1, \dots, h_f) l'ensemble des indices h tels que $q_{iv}^h \neq 0$ ($q=p^{-1}$) pour au moins un des l_ν ($1 \leq \nu \leq a$), et (i_1, \dots, i_n) l'ensemble des indices i tels que $p_{hu}^i \neq 0$ pour au moins un des indices h_u ($1 \leq u \leq f$). Pour le voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}'_{(p,\sigma)} = U'_{(p,h_1,\sigma)} \cap \dots \cap U'_{(p,h_f,\sigma)} \quad (\sigma \leq \min_i (|p_{hf}^i| \neq 0)),$$

il existe le voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}'_{(e,\sigma)} = U'_{(e,i_1,\sigma)} \cap \dots \cap U'_{(e,i_n,\sigma)}$$

tel que

$$D(p)\mathfrak{U}'_{(e,\sigma)} \subset \mathfrak{U}'_{(p,\sigma)}.$$

De plus on a

$$(l_1, \dots, l_a) \subset (i_1, \dots, i_n),$$

car si un indice l_ν ($1 \leq \nu \leq a$) n'était pas contenu dans (i_1, \dots, i_n) , on aurait pour lui

$$\sum_u p_{u^i}^i q_{iv}^u = 0 \quad (i \in I)$$

ce qui est absurde. Autrement dit, il existe un voisinage élémentaire $\mathfrak{U}'_{(p,\sigma)}$ de p ainsi que celui $\mathfrak{U}'_{(e,\sigma)}$ de e tels que

$$\mathfrak{U}'_{(e,\sigma)} \subset \mathfrak{U}_{(e,e)}, \quad D(p)\mathfrak{U}'_{(e,\sigma)} \subset \mathfrak{U}'_{(p,\sigma)} \\ (\sigma \leq \min_i (\varepsilon, |p_{hu}^i| \neq 0)).$$

En particulier, si l'on choisi σ de telle sorte que

$$(2. 3) \quad 0 < \sigma \leq \min_i (|p_{hu}^i| \neq 0),$$

il vient

$$(2. 4) \quad \mathfrak{U}'_{(e,\sigma)} \subset \mathfrak{U}_{(e,e)}, \quad D(p)\mathfrak{U}'_{(e,\sigma)} \subset \mathfrak{U}'_{(p,\sigma)}.$$

3 Considérons une fonction réelle f définie dans \mathfrak{G} . Soit \tilde{f} la restriction de f sur $\tilde{\mathfrak{U}}_p$. D'après la convention mentionnée plus haut (n°, 1), les ζ_{js}^i ($i, j_s \in I$; $s=1, \dots, l$; $i \neq i_e(p, j_s)$) sont les coordonnées locales de $\zeta = T(\zeta_j^i) \in \tilde{\mathfrak{U}}_p$, car, dans $\tilde{\mathfrak{U}}_p$, les ζ_j^i ($i \in I$,

$j \in I - \{j_1, \dots, j_l\}$ sont les constants p_{j^t} . Il existe donc une fonction $\tilde{f}^*(\zeta_{js^t})$ définie dans \mathbb{U}_p satisfaisant à l'égalité

$$\tilde{f}(\zeta) = \tilde{f}^*(\zeta_{js^t}(\zeta)) \quad (s=1, \dots, l; i \neq i_0(p, j_s)).$$

Lorsque cette fonction est différentiable par rapport à ζ_{js^t} , la fonction f est dite différentiable dans \mathbb{U}_p . Si cela arrive en tout point p dans \mathcal{G} indépendamment du choix de voisinage élémentaire \mathbb{U}_p , elle est dite différentiable dans \mathcal{G} .

Soit F l'ensemble des fonctions continûment différentiables dans \mathcal{G} . L'application qui fait correspondre le nombre réel

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \zeta_{js^t}} \right)_{\zeta=p} \quad (i, j_s \in I; s=1, \dots, l; i \neq i_0(p, j_s))$$

au triplet (p, \mathbb{U}_p, f) se note $\frac{\partial}{\partial p_{js^t}}$. Si $\mathbb{U}'_p \subset \mathbb{U}_p$, on a

$$\frac{\partial}{\partial p_{js^t}}(p, \mathbb{U}_p, f) = \frac{\partial}{\partial p_{js^t}}(p, \mathbb{U}'_p, f).$$

On définit comme d'habitude que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial p_{j'^t}} + \frac{\partial}{\partial p_{j''^t}} \right) (p, \mathbb{U}_p, f) &= \frac{\partial}{\partial p_{j'^t}} (p, \mathbb{U}_p, f) + \frac{\partial}{\partial p_{j''^t}} (p, \mathbb{U}_p, f) \\ (\mathbb{U}_p &\subset U_{(p, j')}, \cap U_{(p, j'')}, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial p_{j^t}} (p, \mathbb{U}_p, f) &= \frac{\partial}{\partial p_{j^t}} (p, \mathbb{U}_p, \alpha f). \end{aligned}$$

Lorsque le point p reste fixé, l'ensemble des combinaisons linéaire de

$$\frac{\partial}{\partial p_{j^t}} \quad (i, j \in I'; i \neq i_0(p, j))$$

forme un espace vectoriel qui se nomme l'espace tangent à \mathcal{G} en point p . Tout vecteur tangent à \mathcal{G} en point p s'écrit sous la forme

$$\sum_{(i \neq i_0(p, j), j)} \lambda_{j^t} \frac{\partial}{\partial p_{j^t}},$$

où $\lambda_{j^t} = 0$ sauf pour un nombre fini des couples $((i, j) \in I \times I)$. Cela peut s'écrire aussi

$$\sum_j \sum_{i \neq i_0(p, j)} \lambda_{j^t} \frac{\partial}{\partial p_{j^t}} \quad \text{ou bien} \quad \sum_i \sum_{j \neq i_0(p, i)} \lambda_{j^t} \frac{\partial}{\partial p_{j^t}},$$

où \sum_j et \sum_i sont étendues à un nombre fini des indices respectifs.

En tenant compte de (2. 1) on déduit, dans $\bar{U}_{(\sigma, j_0, \sigma)}$ ($\sigma \leq \min_i (\epsilon/2c, |g_{j_0^t}|/2c \neq 0)$, de la restriction de f sur $\bar{U}_{(\sigma, j_0, \sigma)}$ la fonction \tilde{f} satisfaisant à l'égalité

$$\tilde{f}(\gamma) = \tilde{f}(L(\gamma)\gamma) \quad (\gamma \in \bar{U}_{(\sigma, j_0, \sigma)}, p = \gamma g).$$

Cela revient à dire que

$$\tilde{f}^*(\dots, \gamma_{j_0}^t, \dots) = \tilde{f}^*(\dots, \sum_i y_i^t \gamma_{j_0}^t, \dots).$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_i y_i^t \gamma_{j_0}^t &= \sum_{i \in i_0(g, j_0)} y_i^t \gamma_{j_0}^t + y_{i_0(g, j_0)}^t (1 - \sum_{i \in i_0(g, j_0)} |\gamma_{j_0}^t|) \\ &= y_{i_0(g, j_0)}^t + \sum_{i \in i_0(g, j_0)} \gamma_{j_0}^t (y_i^t - \sigma_{j_0}^t y_{i_0(g, j_0)}^t), \end{aligned}$$

où $\sigma_{j_0}^t$ est le signe de $\gamma_{j_0}^t$. Or, les $\gamma_{j_0}^t$ et $g_{j_0}^t$ sont de même signe pourvu que $g_{j_0}^t \neq 0$. On peut donc écrire

$$p_{j_0}^t = \sum_i y_i^t g_{j_0}^t = y_{i_0(g, j_0)}^t + g_{j_0}^{h_1} (y_{h_1}^t - \sigma_{j_0}^{h_1} y_{i_0(g, j_0)}^t) + \dots + g_{j_0}^{h_c} (y_{h_c}^t - \sigma_{j_0}^{h_c} y_{i_0(g, j_0)}^t).$$

Remplaçons $\gamma_{j_0}^t (i \in I)$ par $\bar{\gamma}_{j_0}^t$ défini par

$$\bar{\gamma}_{j_0}^t = (1 - \lambda) g_{j_0}^t + \lambda \gamma_{j_0}^t (0 < \lambda \leq 1, i \in I).$$

Comme les $\bar{\gamma}_{j_0}^t$ et $\gamma_{j_0}^t$ sont de même signe que $g_{j_0}^t$ pourvu que $g_{j_0}^t \neq 0$, les $\bar{\gamma}_{j_0}^t$ possèdent toujours le même signe que $\gamma_{j_0}^t$, si $\gamma_{j_0} \neq 0$. On a de plus

$$0 < \bar{\gamma}_{j_0}^{t_0(g, j_0)} = 1 - \sum_{i \in i_0(g, j_0)} |\bar{\gamma}_{j_0}^t|.$$

Fixons maintenant un indice $h (i \neq i_0(g, j_0))$. Supposons que les $\gamma_{j_0}^t (i \in I - i_0(g, j_0))$ sont différents de $g_{j_0}^t$ seulement pour $i = h$. On a alors $\gamma_{j_0}^h \neq 0$, $\bar{\gamma}_{j_0}^h \neq 0$. Soient (i_1, \dots, i_l) l'ensemble des indices i tels que $i \neq i_0(g, j_0)$ et $(y_{h_1}^t$ ou $y_{i_0(g, j_0)}^t) \neq 0$. Il vient alors

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^*(\dots, \bar{\gamma}_{j_0}^h, \dots) - \tilde{f}^*(\dots, g_{j_0}^h, \dots) \\ &= \tilde{f}^*(\dots, y_{i_0(g, j_0)}^t + \bar{\gamma}_{j_0}^h (y_{h_1}^t - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^t), \dots) \\ &\quad \dots, y_{i_l}^t + \bar{\gamma}_{j_0}^h (y_{h_l}^t - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^t), \dots) \\ &- \tilde{f}^*(\dots, y_{i_0(g, j_0)}^t + g_{j_0}^h (y_{h_1}^t - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^t), \dots) \\ &\quad \dots, y_{i_l}^t + g_{j_0}^h (y_{h_l}^t - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^t), \dots). \end{aligned}$$

On en tire ([6], p. 6)

$$\begin{aligned} (3.1) \quad dL(y) \left(\frac{\partial}{\partial g_{j_0}^h} \right) &= \sum_{i \in i_0(g, j_0)} (y_{h_1}^t - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^t) \frac{\partial}{\partial p_{j_0}^t} \\ &(h \neq i_0(g, j_0), L(y) U_{(g, j_0, \sigma)} \subset U_{(p, j_0, \sigma)} \quad (\sigma \leq \min_i (\epsilon/\lambda c, |\gamma_{j_0}^t| \neq 0, \\ &|p_{j_0}^t|/2c \neq 0), \end{aligned}$$

où $\sigma_{j_0}^h$ est le signe d'une coordonnée locale d'un point γ_{j_0} pris arbitrairement dans $\mathbb{G}(g_{j_0}, \sigma)$.

Si l'on fait $g=e$, il vient $y=p$, $i_0(g, j_0)=j_0$, $c=1$,

$$\begin{aligned} (3.1)' \quad dL(p) \left(\frac{\partial}{\partial e_{j_0}^h} \right) &= \sum_{i \in i_0(p, j_0)} (p_{h_1}^t - \sigma_{j_0}^h p_{j_0}^t) \frac{\partial}{\partial p_{j_0}^t} \\ &(h \neq j_0, L(p) U_{(e, j_0, \sigma)} \subset U_{(p, j_0, \sigma)} \quad \sigma \leq \min_i (\epsilon/2, 1/2 |p_{j_0}^t| \neq 0) \end{aligned}$$

tandis que si l'on fait $p=e$, il vient $y=g^{-1}$,

$$(3.1)'' \quad dL(g^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial g_{j_0}^h} \right) = \sum_{i \in \{j_0\}} (q_{h^i} - \sigma_{j_0}^h q_{i_0(v, j_0)}) \frac{\partial}{\partial e_{j_0}^i} \\ (q = g^{-1}, h \neq i_0(g, j_0), L(g^{-1})U_{(v, j_0, v)} \subset U_{(e, j_0, e)} \quad (\sigma \leq \min_i. (\varepsilon/2c, |g_{j_0}^i| \neq 0)).$$

4 Nous allons maintenant nous occuper de la différentielle de la translation à droite. Prenant la restriction \tilde{f} de f sur $\tilde{\mathcal{U}}_{(p, \varepsilon)}$, on définit, dans $\mathcal{U}_{(y, \sigma)}$ ($\sigma \leq \min_i. (\varepsilon, |y_{j_s}^i| \neq 0)$) tel que $D(g)\mathcal{U}_{(y, \sigma)} \subset \mathcal{U}_{(p, \varepsilon)}$, la fonction \tilde{f} en posant

$$\tilde{f}'(\eta) = \tilde{f}(D(g)\eta) \quad (\eta_{j_s} \in \mathcal{U}_{(y, \sigma)} \quad (s=1, \dots, m)),$$

Cela revient à dire que

$$\tilde{f}'^*(\eta_{j_1}^i, \dots, \eta_{j_m}^i) \\ = f^*(1 - \sum_{r \in \{i_0(v, j_1)\}} |\eta_{j_1}^r|) g_{h_u}^{j_1} + \eta_{j_2}^{i_0(v, j_1)} g_{h_u}^{j_2} + \dots \\ \dots + \eta_{j_m}^{i_0(v, j_1)} g_{h_u}^{j_m}$$

sauf pour les indices h_u tels que $i_0(p, h_u) = i_0(y, j_1)$,

$$\eta_{j_1}^{i_0(v, j_2)} g_{h_u}^{j_1} + (1 - \sum_{r \in \{i_0(v, j_2)\}} |\eta_{j_2}^r|) g_{h_u}^{j_2} + \dots \\ \dots + \eta_{j_m}^{i_0(v, j_2)} g_{h_u}^{j_m}$$

sauf pour les indices h_u tels que $i_0(p, h_u) = i_0(p, y, j_2)$,

...

$$\eta_{j_1}^{i_0(v, j_m)} g_{h_u}^{j_1} + \eta_{j_2}^{i_1(v, j_m)} g_{h_u}^{j_2} + \dots \\ \dots + (1 - \sum_{r \in \{i_0(v, j_m)\}} |\eta_{j_m}^r|) g_{h_u}^{j_m},$$

sauf pour les indices h_u tels que $i_0(p, h_u) = i_0(y, j_m)$,

$$\sum_s \eta_{j_s}^i g_{h_u}^{j_s} \quad (i \in \{i_0(y, j_1), \dots, i_0(y, j_m), i_0(p, h_u)\}).$$

Remplaçons-y $\eta_{j_s}^a$ par

$$\bar{\eta}_{j_s}^a = (1 - \lambda) y_{j_s}^a + \lambda \eta_{j_s}^a \quad (\alpha \in I; 0 \leq \lambda \leq 1; s=1, \dots, m)$$

qui se trouve dans $\mathcal{U}_{(y, \sigma)}$. Lorsque $y_{j_s}^a \neq 0$, $\eta_{j_s}^a$ ainsi que $\bar{\eta}_{j_s}^a$ sont de même signe que $y_{j_s}^a$. Donc $\bar{\eta}_{j_s}^a$ possède le même signe que $\eta_{j_s}^a$ pourvu que $\eta_{j_s}^a \neq 0$.

On a de plus

$$0 < \bar{\eta}_{j_s}^{i_0(p, j_s)} = 1 - \sum_{r \in \{i_0(p, j_s)\}} |\bar{\eta}_{j_s}^r|.$$

Il vient donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{f}'^*}{\partial \bar{\eta}_{j_s}^i} = \sum_{u \in \{i_0(p, h_u) \neq i\}} g_{h_u}^{j_s} \left(\frac{\partial \tilde{f}'^*}{\partial e_{h_u}^i} \right)_p \\ - \sum_{u \in \{i_0(p, h_u) = i_0(y, j_s)\}} \sigma_{j_s}^i g_{h_u}^{j_s} \left(\frac{\partial \tilde{f}'^*}{\partial e_{h_u}^{i_0(v, j_s)}} \right)_p \\ (i \in \{i_0(y, j_1), \dots, i_0(y, j_m)\}; \eta_{j_s}^i \neq 0; \sigma_{j_s}^i: \text{le signe de } \eta_{j_s}^i)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \eta_{js}^{i_0(y, j_t)}} = \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq i_0(y, j_t))} g_{hu}^{j_s} \left(\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \eta_{hu}^{i_0(y, j_t)}} \right)_p - \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq i_0(y, j_s))} \sigma_{js}^{i_0(y, j_t)} g_{hu}^{j_s} \left(\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \eta_{hu}^{i_0(y, j_s)}} \right)_p$$

($t \neq s$ ($t, s=1, \dots, m$); $\eta_{js}^{i_0(y, j_t)} \neq 0$; $\sigma_{js}^{i_0(y, j_t)}$: le signe de $\eta_{js}^{i_0(y, j_t)}$)
ce qui nous montre que

$$(4.1) \quad dD(g) \frac{\partial}{\partial y_{js}^t} = \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq t)} g_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial p_{hu}^t} - \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq i_0(y, j_s))} \sigma_{js}^t g_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial p_{hu}^t} i_0(y, j_s) \\ (i \neq i_0(y, j_s), D(g)\mathbb{U}_{(y, \sigma)} \subset \mathbb{U}_{(p, \epsilon)})$$

où les σ_j^t sont les signes des coordonnées locales $\neq 0$ d'un élément η_{js} pris arbitrairement dans $\mathbb{U}_{(y, \sigma)}$.

En particulier, si l'on fait $y=e$, il vient $g=p$, $i_0(y, j_s)=j_s$,

$$(4.1)' \quad dD(p) \frac{\partial}{\partial e_{js}^t} = \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq t)} p_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial p_{hu}^t} - \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq j_s)} \sigma_{js}^t p_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial p_{hu}^t} \\ (i \neq j_s, D(p)\mathbb{U}_{(e, \epsilon)} \subset \mathbb{U}_{(p, \epsilon)})$$

tandis que si l'on fait $p=e$, il vient $g=y^{-1}$, $i_0(p, h_u)=h_u$,

$$(4.1)'' \quad dD(y^{-1}) \frac{\partial}{\partial y_{js}^t} = \sum_{u(h_u \neq t)} (y^{-1})_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial e_{hu}^t} - \sum_{u(h_u \neq i_0(y, j_s))} \sigma_{js}^t (y^{-1})_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial e_{hu}^t} i_0(y, j_s) \\ (i \neq i_0(y, j_s), D(y^{-1})\mathbb{U}_{(y, \sigma)} \subset \mathbb{U}_{(e, \epsilon)})$$

5 Considérons maintenant l'ensemble H des vecteurs tangents

$$c = \sum_{i \neq i_0} \sum_{t \neq i_0} c_{it}^i \frac{\partial}{\partial e_{it}^i} \quad (i=1, \dots, \beta)$$

en élément neutre e , satisfaisant à la condition que

$$\sum_{i \neq i_0} |c_{it}^i| < \lambda < 1$$

pour chaque i . Soit γ l'application $H \rightarrow \mathbb{G}$, qui fait correspondre à un tel élément c la transformation projective normale définie par

$$\rho x^{i'} = \sum_j c_j^i x^j \quad (c_j^i = 1 - \sum_{t \neq j} |c_j^t|)$$

L'image γc se trouve dans la restriction d'un voisinage élémentaire $\mathbb{U}_{(e, \lambda)}$ de l'élément neutre. On induit la topologie \mathbb{G} à γH ainsi qu'à H lui-même.

Grâce à (3.1)', (3.1)'' on a ([6], p.7)

$$(5.1) \quad dL(p^{-1})dL(p)c=c.$$

De même, on tire moyenant (3.1)

$$(5.2) \quad dL(g)dL(y)c=dL(gy)c.$$

Nous nous occupons ensuite de la translation à droite. D'après (2.3), (2.4) on peut choisir le nombre positif λ ainsi que les voisinages élémentaires.

$$\mathbb{U}'_{(e,\lambda)} = U'_{(e,f_1,\lambda)} \cap \dots \cap U'_{(e,f_m,\lambda)}$$

$$\mathbb{U}'_{(e,\lambda)} = U'_{(e,h_1,\lambda)} \cap \dots \cap U'_{(e,h_f,\lambda)}$$

$$(\lambda \leq \text{mini. } |g_{h_u}^t| \neq 0)$$

de manière à avoir

$$\mathbb{U}'_{(e,\lambda)} \subset \mathbb{U}_{(e,\lambda)}, \quad D(g)\mathbb{U}'_{(e,\lambda)} \subset \mathbb{U}'_{(e,\lambda)}.$$

Comme l'image γc se trouve dans $\tilde{\mathbb{U}}_{(e,\lambda)}$, elle se trouve dans $\mathbb{U}'_{(e,\lambda)}$, c'est-à-dire, dans $\mathbb{U}(\delta_{j_v}, \lambda)$ ($s=1, \dots, m$). En faisant l'usage de (4.1)', où $\sigma_{j_v}^t$ est le signe de $c_{j_v}^t$, on tire

$$\begin{aligned} dD(g)c &= \sum_{j_s} \left(\sum_{t \neq j_s} \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq t)} g_{h_u}^{j_s} c_{j_v}^t \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^t} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{t \neq j_s} \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq j_s)} g_{h_u}^{j_s} |c_{j_s}^t| \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^{j_s}} \right) \\ &= \sum_{j_s} \left(\sum_t \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq t)} g_{h_u}^{j_s} c_{j_v}^t \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^t} - \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq j_s)} g_{h_u}^{j_s} \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^{j_s}} \right) \\ &= \sum_t \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq t)} \gamma_{h_u}^t \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^t} - \sum_{\tau} \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq \tau)} g_{h_u}^{\tau} \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^{\tau}} \\ &= \sum_t \sum_{u \in (t_0(g, h_u) \neq t)} (\gamma_{h_u}^t - g_{h_u}^t) \frac{\partial}{\partial g_{h_u}^t} \quad (\gamma_{h_u}^t = \sum_{\tau} c_{\tau}^t g_{h_u}^{\tau}). \end{aligned}$$

On a

$$|\gamma_{h_u}^t - g_{h_u}^t| \leq (c_t^t - 1)g_{h_u}^t + \sum_{\tau \neq t} c_{\tau}^t g_{h_u}^{\tau} < \lambda + \lambda \sum_{\tau} |g_{h_u}^{\tau}| = 2\lambda,$$

c'est-à-dire,

$$(5.3) \quad \gamma_{h_u} \in \mathbb{U}(g_{h_u}, 2\lambda).$$

Prenons ensuite un élément $y \in \mathbb{U}$ et le voisinage élémentaire

$$\mathbb{U}_{(p,\tau)} = U_{(p,h_1,\tau)} \cap \dots \cap U_{(p,h_f,\tau)} \quad (\tau \leq \text{mini. } |p_{h_u}^t| \neq 0)$$

du point $p = yg$. Si l'on fait

$$0 < \lambda \leq \text{mini.} \left(\frac{\tau}{4f}, \frac{1}{4f} (|p_{h_u}^t| \neq 0), \frac{1}{2} |g_{h_u}^t \neq 0 \right),$$

il vient

$$D(g)\mathbb{U}'_{(e,\lambda)} \subset \mathbb{U}'_{(e,\lambda)}, \quad L(y)U_{(e,h_u,\lambda)} \subset U_{(p,h_u,\tau)}.$$

D'ailleurs, en opérant $dL(y)$ à $dD(g)c$ on peut prendre comme $\sigma_{h_u}^t$ le signe de

γ_{hu}^i d'après (5.3). Or, comme γ_{hu}^i est de même que g_{hu}^i si $g_{hu}^i \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} & - \sum_k \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq k)} \sigma_{hu}^k (\gamma_{hu}^k - g_{hu}^k) \\ &= - \sum_u \sum_{k(i_0(p, h_u) \neq k)} (|\gamma_{hu}^k| - |g_{hu}^k|) \\ &= -(1 - \gamma_{hu}^{i_0(p, h_u)} - 1 + g_{hu}^{i_0(p, h_u)}) = \gamma_{hu}^{i_0(p, h_u)} - g_{hu}^{i_0(p, h_u)}. \end{aligned}$$

On obtient donc, grâce (3.1),

$$\begin{aligned} dL(y)dD(g)c &= \sum_u \sum_{k(i_0(p, h_u) \neq k)} \sum_{i(i_0(p, h_u) \neq i)} (\gamma_{hu}^k - g_{hu}^k) \\ & \quad \times (\gamma_{hu}^i - \sigma_{hu}^k \gamma_{hu}^{i_0(p, h_u)}) \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i} \\ &= \sum_u \sum_{i(i_0(p, h_u) \neq i)} \sum_l \gamma_{hu}^l (\gamma_{hu}^i - g_{hu}^i) \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i} \\ &= \sum_u \sum_{i(i_0(p, h_u) \neq i)} \left(\sum_l \sum_r \gamma_{hu}^l c_r^l g_{hu}^r - p_{hu}^i \right) \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i}. \end{aligned}$$

Faisons maintenant

$$0 < \lambda \leq \min_i \left\{ \frac{\tau}{4f}, \frac{1}{4f} (|p_{ju}^i| \neq 0), \frac{1}{2} (|\gamma_{js}^i| \neq 0, |g_{hu}^i| \neq 0) \right\}.$$

Nous avons alors, d'après (2.1)

$$L(y)U'_{(e, j_s, \lambda)} \subset U'_{(v, j_s, 2\lambda)}$$

et, par suite,

$$(5.4) \quad dL(y)c = \sum_{j_s} \sum_{i(i_0(y, j_s) \neq i)} (\xi_{js}^i - \gamma_{js}^i) \frac{\partial}{\partial \gamma_{js}^i} \quad (\xi_{js}^i = \sum_l \gamma_{js}^l c_{j_v}^l)$$

d'après (3.1') où $\sigma_{j_v}^i$ est le signe de $c_{j_v}^i$. De plus, comme

$$\xi_{js} \in \mathbb{C}(y_{js}, 2\lambda) \quad (2\lambda \leq \min_i (|\gamma_{js}^i| \neq 0),$$

ξ_{js}^i est de même signe que γ_{js}^i pourvu que $\gamma_{js}^i \neq 0$.

Donc, en faisant l'usage de (4.1), où σ_{js}^i est le signe de γ_{js}^i on obtient

$$\begin{aligned} dD(g)dL(y)c &= \sum_{j_s} \sum_{i(i_0(y, j_s) \neq i)} \left[\sum_{u(i_0(p, h_u) \neq i)} (\xi_{js}^i - \gamma_{js}^i) g_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq i_0(y, j_s))} g_{hu}^{j_s} (|\xi_{js}^i| - |\gamma_{js}^i|) \frac{\partial}{\partial p_{hu}^{i_0(y, j_s)}} \right] \\ &= \sum_i \sum_{j_s} \sum_{u(i_0(p, h_u) \neq i)} (\xi_{js}^i - \gamma_{js}^i) g_{hu}^{j_s} \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i} \\ &= \sum_u \sum_{i(i_0(p, h_u) \neq i)} \left(\sum_l \sum_r \gamma_{hu}^l c_r^l g_{hu}^r - p_{hu}^i \right) \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (5.5) \quad dL(y)dD(g)c &= dD(g)dL(y)c \\ &= \sum_u \sum_{i(i_0(p, h_u) \neq i)} \left(\sum_l \sum_r \gamma_{hu}^l c_r^l g_{hu}^r - p_{hu}^i \right) \frac{\partial}{\partial p_{hu}^i}. \end{aligned}$$

6 Pour la transformation projective normale T qui laisse invariant le cube projectif $\mathbb{C}_t = \mathbb{C}(A, 1)$, on a

$$p_{i'} = 1, p_{i''} = 0, p_{i'''} = 0 \quad (i' \in I' = I - \{i\})$$

de sorte que son équation s'écrit

$$z^{i'} = \sum_j p_j z^j \quad (i, j \in I'; z^i = \frac{x^i}{z^i}; \sum_j p_j z^j = 1).$$

L'ensemble G_t de telles transformations forme un sous-groupe de \mathbb{G} . La topologie de \mathbb{G} est induite sur G_t .

Soit M une variété deux fois différentiable dont les cartes locales $\varphi_{U_\alpha}(\alpha \in \mathfrak{a})$ sont des applications topologiques de $U_\alpha \subset M$ dans S ([1], p. 10; [6], p. 10). Considérons l'espace fibré principal $B(M, G_t)$. Soit φ_t l'homéomorphisme local $U_t \times G_t \rightarrow \text{proj.}^{-1} U_t$. Prenons, sur M , un chemin $x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$. Nous pouvons le partager en parties de nombre fini dont chacune $x_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < 1$) est contenue dans $U_{\alpha(a)}$. Nous supposons qu'elle est régulière. Il existe, sur l'espace B au dessus de $x_a(t)$, un chemin $b_a(t) = \varphi_{\alpha(a)}(x_a(t), y_a)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$) ([6], p. 13). L'homéomorphisme $d(\varphi_{\alpha(a)}, x_a(t))^{-1}$ applique le vecteur tangent θ en point $b_a(t)$ à un vecteur τ générateur d'un champ de vecteurs possédant la coordonnée $\omega(\theta)$ telle que

$$(6.1) \quad \tau = dL(y_a)\omega(\theta) = dL(y_a)\rho \quad \left(\rho = \sum_\nu \sum_{i \neq l_\nu} \rho_{l_\nu i} \frac{\partial}{\partial e_{l_\nu i}} \right),$$

$$(6.2) \quad \sum_\nu \sum_{i \neq l_\nu} |\rho_{l_\nu i}| < \kappa_a < 1,$$

où la sommation \sum_ν est étendue aux indices $l_1(a), \dots, l_\beta(a)$ tandis que pour chaque l_ν la sommation \sum_i est étendue à un nombre fini des indices $i (\neq l_\nu)$ et $\kappa_a (< 1)$ est un nombre positif qu'on peut choisir volontairement à l'avance.

On peut prendre les coordonnées locales

$$u^i \quad (i \in I'), y_{t^s} \quad (s, t \in I'; s \neq i_0(y, t))$$

d'un point $(x, y) \in U_{\alpha(a)} \times G_t$ comme celles du point $b = \varphi_{\alpha(a)}(x, y)$: pour la fonction f définie dans $\varphi_{\alpha(a)} \times G_t \subset B$, on a

$$f(b) = f^*(u^i, y_{t^s})$$

et le vecteur tangent à B en point b est une combinaison linéaire de

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i \in I'), \frac{\partial}{\partial y_{t^s}} \quad (s, t \in I'; s \neq i_0(y, t)).$$

En particulier, le long du chemin $b_a(t)$ on a

$$f(b(t)) = f^*(u^i(t), (y_{t^s})_a).$$

Comme le chemin $x_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$) est régulière par l'hypothèse, le chemin $b_a(t)$

possède le vecteur tangent θ de la forme

$$\theta = \sum_i \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

7 Tout chemin sur B au dessus de $x_a(t)$, s'écrit

$$\begin{aligned} \overline{b_a(t)} &= D(\gamma(t))b_a(t) \equiv \varphi_{a(a)}(x_a(t), p_a(t)), \\ (p_a(t) &= D(\gamma(t))y_a = y_a \gamma(t), \quad \gamma(t) = (g(t))^{-1} \subset G_i). \end{aligned}$$

Reprenant le vecteur tangent ρ donné par (6. 1), soit (h_1, \dots, h_f) l'ensemble des indices h tels que $g_{iv}^h \neq 0$ pour au moins un des indices l_ν ($1 \leq \nu \leq \beta$) et (j_1, \dots, j_m) l'ensemble des indices j tels que $\gamma_{hu}^j \neq 0$ pour au moins un des indices h_u ($1 \leq u \leq f$). On peut associer au point $p(t)$ le voisinage élémentaire $\Pi_{(p, \sigma)}$ de telle sorte les conditions (2. 3) et (2. 4) soient vérifiées. Maintenant la variété M étant deux fois différentiable par l'hypothèse, on a

$$\frac{d\gamma_{hu}^i}{dt} = 0 \quad (u=1, \dots, f)$$

sauf pour un nombre fini des indices i de sorte que le chemin $\overline{b_a(t)}$ possède le vecteur tangent $\bar{\theta}$ de la forme

$$\bar{\theta} = \sum_i \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{h_u} \sum_{i \in i_0(p, h_u)} \frac{dp_{h_u}^i}{dt} \frac{\partial}{\partial p_{h_u}^i}$$

Considérons une fonction f' définie dans $\varphi_{a(a)}(U_{a(a)} \times G_i)$. Le long du chemin $\overline{b_a(t)}$ on a

$$f'(\overline{b_a(t)}) = f'^*(u^i(t), p_a(t)).$$

Induisons une fonction $f(b_a(t))$ en posant

$$f(b_a(t)) = f'(D(\gamma(t))b_a(t)).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \theta f &= \sum_i \frac{\partial f^*}{\partial u^i} = \sum_i \frac{du^i}{dt} \frac{\partial f'^*}{\partial u^i} \\ &= (dD(\gamma)\theta) f'. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$(\bar{\theta} - dD(\gamma)\theta) = \sum_{h_u} \sum_{i \in i_0(p, h_u)} \frac{dp_{h_u}^i}{dt} \frac{\partial}{\partial p_{h_u}^i}.$$

Le vecteur $\bar{\theta} - dD(\gamma)\theta$ étant ainsi vertical, l'homéomorphisme $d(\varphi_{a(a), x_a(t)})^{-1}$ l'applique à un vecteur tangent à G_i possédant les mêmes coordonnées que lui. Celui-ci n'est autre chose que le vecteur tangent au chemin $(p(t))$. On a donc, en fait de la coordonnée du champ de vecteurs qu'il engendre,

$$(7. 1) \quad \omega(\bar{\theta} - dD(\gamma)\theta) = \sum_{h_u} \sum_{i \in i_0(p, h_u)} \frac{dp_{h_u}^i}{dt} dL(p^{-1}) \frac{\partial}{\partial p_{h_u}^i}.$$

En vertu de (5. 1), (5. 2), (5. 4), (5. 5) on a

$$\begin{aligned}
\omega(dD(\gamma)\theta) &= dL((\gamma_a\gamma)^{-1})dD(\gamma)\tau \\
&= dL(g\gamma_a^{-1})dD(\gamma)dL(\gamma_a)\rho \\
&= dD(\gamma)dL(g)dL(\gamma_a^{-1})dL(\gamma_a)\rho = dD(\gamma)dL(g)\rho \\
&= dD(\gamma)\left(\sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(q,j_s))} (\sum_t g_t^i c_{j_v}^i - g_{j_v}^i) \frac{\partial}{\partial g_{j_s}^i}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$\sum_i |p_{h_u}^i| = 1, \quad \sum_i \frac{d|p_{h_u}^i|}{dt} = 0, \quad p_{h_u}^{i_0(p,h_u)} > 0$$

on a, grâce à (3. 1)'' où σ_h^i est le signe de p_h^i ,

$$\begin{aligned}
&\sum_{h_u} \sum_{i(\neq i_0(p,h_u))} \frac{dp_{h_u}^i}{dt} dL(p^{-1}) \frac{\partial}{\partial p_{h_u}^i} \\
&= \sum_{h_u} \sum_{i(\neq h_u)} \sum_{i(\neq i_0(p,h_u))} \left(\frac{dp_{h_u}^i}{dt} q_i^i - \frac{d|p_{h_u}^i|}{dt} q^{i_{i_0(p,h_u)}} \right) \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i} \quad (q = p^{-1}) \\
&= \sum_{h_u} \sum_{i(\neq h_u)} \sum_{\tau} \frac{dp_{h_u}^{\tau}}{dt} q_{\tau}^i \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i} \quad (p_{h_u}^{\tau} = \sum_s (\gamma_s^{\tau})_a \gamma_{h_u}^s) \quad (\gamma = g^{-1}) \\
&= - \sum_{h_u} \sum_{i(\neq h_u)} \sum_{\tau} \frac{dq_{\tau}^i}{dt} p_{h_u}^{\tau} \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i} \quad (q_{\tau}^i = \sum_t g_t^i (z_{\tau}^t)_a) \quad (z_a = \gamma_a^{-1}) \\
&= - \sum_{h_u} \sum_{i(\neq h_u)} \sum_{\tau} \sum_s \frac{dg_s^i}{dt} (z_{\tau}^s)_a \sum_t (\gamma_t^{\tau})_a \gamma_{h_u}^t \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i} \\
&= - \sum_{h_u} \sum_{i(\neq h_u)} \sum_s \frac{dg_s^i}{dt} \gamma_{h_u}^s \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i}.
\end{aligned}$$

Or, grâce à (4. 1)'' où $\sigma_{j_s}^i$ est le signe de $g_{j_s}^i$, on a

$$\begin{aligned}
dD(\gamma) &\left(\sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(q,j_s))} \frac{dg_{j_s}^i}{dt} \frac{\partial}{\partial g_{j_s}^i} \right) \\
&= \sum_i \sum_{j_s(i_0(q,j_s) \neq i)} \left(\frac{dg_{j_s}^i}{dt} \sum_{h_u(\neq i)} \gamma_{h_u}^{j_s} \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{h_u \neq i_0(q,j_s)} \frac{d|g_{j_s}^i|}{dt} \gamma_{h_u}^{j_s} \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^{i_0(q,j_s)}} \right) \\
&= \sum_i \sum_{h_u(\neq i)} \sum_s \frac{dg_{j_s}^i}{dt} \gamma_{h_u}^s \frac{\partial}{\partial e_{h_u}^i}.
\end{aligned}$$

L'équation (7. 1) s'écrit donc

$$(7. 2) \quad \omega(\bar{\theta}) = dD(\gamma) \left(\sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(q,j_s))} \left(\sum_t g_t^i \rho_{j_s}^i - g_{j_s}^i - \frac{dg_{j_s}^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial g_{j_s}^i} \right).$$

8 Dans un article précédent ([5], pp. 123-136) on a démontré que le système d'équations différentielles

$$(8. 1) \quad \frac{dg_{j_s}^i}{dt} = \sum_{\tau} \rho_{j_s}^{\tau}(t) g_{\tau}^i(t) - g_{j_s}^i(t)$$

aux fonctions inconnues $g_{j_s}^i(t)$ de nombre infini ($(g_{j_s}^i) \in G_n$, $t \in [t_a, t_{a+1}]$) admet un système unique des intégrales qui prennent au point t_a les valeurs initiales données volontairement à l'avance. Dans cette démonstration il y a quelques passages qu'il faut corriger.

On associe au point g_a un voisinage élémentaire

$$\mathbb{I}_{(\mathcal{G}_a, \sigma)} = U_{(\mathcal{G}_a, j_1(a), \sigma)} \cap \cdots \cap U_{(\mathcal{G}_a, j_m(a), \sigma)}.$$

On prend comme κ_a un nombre positif moindre que

$$\frac{1}{4} \min_i (|g^i_{\varepsilon^i}|_a) \neq 0 \quad (i \in I'; j_\varepsilon \in (j_1(a), \dots, j_m(a))).$$

On déduit ([5], p. 130)

$$g^t_{j,1} = (g^t_j)_a + \int_{t_a}^t (\sum_i \rho_j^i(u)(g^i_t)_a - (g^t_j)_a) du \quad (i \neq i_0(g_a, j)),$$

en particulier,

$$g^t_{j,1} = (g^t_j)_a \quad (j \in (j_1(a), \dots, j_m(a)), i \neq i_0(g_a, j)).$$

On définit

$$g_{j,1}^{i_0(\mathcal{G}_a, j)} = 1 - \sum_{i \in i_0(\mathcal{G}_a, j)} |g^i_{j,1}|.$$

On tire

$$g_{j,1}^{i_0(\mathcal{G}_a, j)} > \frac{1}{2} (g^{i_0(\mathcal{G}_a, j)}_a) > 0, \quad g_{j,1}^{i_0} = (g^{i_0}_j)_a \quad (j \in (j_1, \dots, j_m)).$$

On corrige la déduction des inégalités (5. 3), (5. 4), (6. 4) (pp. 131, 133) comme il suit

$$\begin{aligned} |g^{i_0}_{j,1} - (g^{i_0}_j)_a| &\leq \sum_{i \in i_0} |g^i_{j,1} - (g^i_j)_a| \\ &\leq \sum_{i \in i_0} \int_{t_a}^t (|\rho_j^i - 1| \cdot |(g^i_j)_a| + \sum_{k \in j} |\rho_j^k| \cdot |(g^k_i)_a|) du \\ &\leq \int_{t_a}^t (|\rho_j^j - 1| + \sum_{k \in j} |\rho_j^k|) du \\ &< \frac{1}{2} \int_{t_a}^t du = \frac{1}{2} (t - t_a) \leq \frac{1}{2}, \\ |g^{i_0}_{j,1}(v) - g^{i_0}_{j,1}(u)| &\leq \sum_{i \in i_0} \int_u^v (|\rho_j^i - 1| \cdot |(g^i_j)_a| + \sum_{k \in j} |\rho_j^k| \cdot |(g^k_i)_a|) du \\ &< \frac{1}{2} |v - u| \leq \frac{1}{2}, \\ |g^{i_0}_{j,2} - g^{i_0}_{j,1}| &\leq \sum_{i \in i_0} |g^i_{j,2} - g^i_{j,1}| \\ &= \sum_{i \in i_0} |g^i_{j,2} - (g^i_j)_a - (g^i_{j,1} - g^i_j)_a| \\ &\leq \sum_{i \in i_0} \int_{t_a}^t (|\rho_j^i - 1| \cdot |g^i_{j,1} - (g^i_j)_a| + \sum_{k \in j} |\rho_j^k| \cdot |g^i_{j,1} - (g^i_j)_a|) du \\ &< \frac{1}{4} \int_{t_a}^t (t - ta) du = \frac{1}{2} \left[\frac{t - ta}{2} \right]^2 \leq \frac{1}{1.2} \left(\frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

En définissant

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g^t_{j,m} = g^t_j \quad (i \neq i_0(g_a, j)),$$

on déduit

$$\begin{aligned} g^t_j &= (g^t_j)_a + \int_{t_a}^t (\sum_i \rho_j^i(u) g^i_t(u) - g^t_j(u)) du \quad (i \neq i_0(g_a, j)), \\ g^t_j &= (g^t_j)_a \quad (j \in (j_1, \dots, j_m), i \neq i_0(g_a, j)). \end{aligned}$$

On retire les lignes 12~17 du page 134. On corrige le raisonnement du n°7 comme il suit. On déduit d'abord

$$((g_j^i)_a = 0) \Rightarrow (g_j^i(t) = 0) \quad (i \neq i_0(g_a, j))$$

ce qui nous montre que les $g_j^i(t)$ s'annulent pour chaque j , à l'exécution des indices i de nombre fini qui sont contenus dans les indices i tels que $(g_j^i)_a \neq 0$.

On pose

$$g_j^{i_0(g_a, j)} = 1 - \sum_{i \neq i_0(g_a, j)} |g_j^i|.$$

Comme

$$\sum_{i \neq i_0(g_a, j)} |g_j^{i, m}| < 1 - \frac{1}{2} (g_j^{i_0, j})_a,$$

on a

$$\sum_{i \neq i_0(g_a, j)} |g_j^{i, m}| \leq 1 - \frac{1}{2} (g_j^{i_0(g_a, i)})_a.$$

Maintenant on conclut que l'équation ci-dessus qui donne la valeur de $g_j^i (i \neq i_0(g_a, j))$ est vérifiée même quand $i = i_0(g_a, j)$, en tenant compte de ce que la somme $\sum_i \rho_j^i(u) g_i^i(u)$ ainsi que $g_j^i(u)$ sont de même signe que $(g_j^i)_a$, si $(g_j^i)_a \neq 0$.

9 En prenant volontairement les valeurs initiales $(g_j^i)_0$ au point $t_0 (= 0)$ on détermine les intégrales $g_j^i(t, g_0)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$). La translation à droite $D(g(t, g_0))^{-1}$ sur l'espace fibré B applique le chemin $b_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) $\subset B$ sur un chemin horizontal $b_0(t) \cdot (g(t, g_0))^{-1}$ au dessus du chemin $x_0(t) \subset M$. Ensuite, on prend $g_j^i(t_1, g_0)$ comme les valeurs initiales pour les intégrales $g_j^i(t, g_1)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) et ainsi de suite. Quant au voisinage élémentaire associé à l'origine du chemin $g_{a+1}(t)$ ($t_{a+1} \leq t \leq t_{a+2}$) on le prend volontairement quoiqu'il soit défini par

$$\Pi_{(g(t), \sigma)} = U_{(g(t), j_1(a), \sigma)} \cap \dots \cap U_{(g(t), j_m(a), \sigma)}$$

le long du chemin $g_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$).

Le chemin horizontal $b_{a+1}(t) \cdot g(t, g_{a+1})^{-1}$ ($t_{a+1} \leq t \leq t_{a+2}$) devient le prolongement du chemin $b_a(t) \cdot g(t, g_a)^{-1}$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$), car grâce à ([6], p. 11 (9. 2))

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}_{a(a+1), x(t_{a+1})} \varphi_{c(a), x(t_{a+1})} (D((g(t_{a+1}, g_a))^{-1}) y_a) \\ = L(g_{a(a+1), a(a)}(t_{a+1})) (D((g(t_{a+1}, g_a))^{-1}) y_a) \\ = L(g_{a(a+1), a(a)}(t_{a+1})) L(y_a) g(t_{a+1}, g_a)^{-1} \\ = L(g_{c(a+1), c(a)}(t_{a+1})) y_a g(t_{a+1}, g_a)^{-1} \\ = L(y_{a+1}) g(t_{a+1}, g_a)^{-1} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} b_{a+1}(t_{a+1}) \cdot g(t_{a+1}, g_{a+1})^{-1} &= b_a(t_{a+1}) \cdot (g(t_{a+1}, g_a))^{-1} \\ \iff (\varphi_{a(a+1), x(t_{a+1})}, D((g(t_{a+1}, g_{a+1}))^{-1}) y_{a+1} &= \varphi_{a(a), x(t_{a+1})} (D((g(t_{a+1}, g_a))^{-1}) y_a) \\ \iff (D((g(t_{a+1}, g_{a+1}))^{-1}) y_{a+1} &= L(g_{a(a+1), a(a)}(t_{a+1})) D((g(t_{a+1}, g_a))^{-1}) y_a) \\ \iff (L(y_{a+1}) (g(t_{a+1}, g_{a+1}))^{-1} &= L(y_{a+1}) g(t_{a+1}, g_a)^{-1}) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow (g(t_{a+1}, g_{a+1})^{-1} = g(t_{a+1}, g_a)^{-1}) \Longleftrightarrow (g(t_{a+1}, g_{a+1}) = g(t_{a+1}, g_a)).$$

On aboutit ainsi à avoir, au dessus du chemin $x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), un chemin horizontal continue et régulier par morceaux issue d'un point arbitraire du fibre au dessus de $x(0)$.

Références

- [1] J. Kanitani. Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ. (Hino City, Tokyo, Japan), No. 5 (Science and Engineering), 1970, pp. 1-13.
- [2] J. Kanitani. Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 6 (Science and Engineering), 1971, pp. 1-14.
- [3] J. Kanitani. Sur l'espace fibré tensoriel à une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 9 (Science and Engineering), 1973, pp. 1-16.
- [4] J. Kanitani. Sur les champs de vecteurs au dessus d'une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin Meisei Univ, No. 10 (Science and Engineering), 1974, pp. 1-13.
- [5] J. Kanitani. Sur l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles aux fonctions inconnues de nombre infini. Jour. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, No. 1, 1976, pp. 123-136.
- [6] J. Kanitani. Sur un chemin des champs de vecteurs dont les coordonnées se trouvent dans un voisinage assez petit de l'élément neutre. Research Bulletin Meisei Univ. No. 14 (Science and Engineering), 1978, pp. 1-13.

(53 年 9 月 11 日受理)