

待ち行列の近似式と機械組立工程の 中間在庫量の算定

高 城 重 道*

The Calculation of the Stock on the Machine Assembly Line with the Quene GI/G/s Approximation

by Shigemichi Taki

This study is concerned in the machine assembly line with variable operation times. In order to analyze the assembly line, we approach the line as each station is independent, and as the arrival time and the service time are independent respectively, and regard it as the queue GI/G/s.

Using the approximate value of the queue GI/G/s, the number of operators and stocks between the work stations are calculated. This approach is effective for the production planning. To demonstrate the validity of the model, an existing line was analysed in detail. And calculated the quene GI/G/s approximation.

1. はじめに

この研究は待ち行列 GI/G/s の近似式を用いて機械組立工程（タンデム型）の工程間で次の工程のサービスを受けるために待っているジョブの台数（中間在庫量）を算定しようとするものである。

従来、各工程での作業時間が安定しているものに対して、線形計画法による最適計画が論じられている¹⁾²⁾³⁾。しかしながら作業の難易度、作業者の技能、部品の加工精度のバラツキなどによっても作業時間は異ってくる。この様な一連の組立工程について調査した結果、次のことが判った⁴⁾。

(1) ジョブの到着分布は指数分布による近似が可能である。ただし前工程の退去時刻を次工程の到着時刻とする。

(2) 各工程の作業時間の分布は特定の分布で近似することは困難である。

また、本研究では次のことを前提とする。

(1) 各ジョブの1つの工程における作業時間は互いに独立で同一分布に従う。

(2) 各ジョブのそれぞれの工程からの退去時間間隔の分布もまた互いに独立で同一分布に従う。

2. 待ち行列の近似式

工程間のジョブの平均待ち台数 (L_q) を求めるために、系 GI/G/s について考察する。

* 理工学部機械工学科講師 生産工学

待ち行列 GI/G/s の平均待ち台数を求める理論解はまだ発表されていないが近似解法として E. Page の近似式がある⁵⁾。

これは $\rho(=\lambda/(s\mu))$ を固定したとき、到着間隔、サービス時間の変動係数 Ca , Cs , 系 M/M/s, 系 M/D/s, 系 D/M/s の列の長さの平均から近似的に系 GI/G/s の列の長さの平均を求めるもので、次式で示めされる。

$$Lq^{GI/G/s} \simeq Ca^2 \cdot Cs^2 \cdot Lq^{M/D/s} + Ca^2(1 - Cs^2)Lq^{M/D/s} + (1 - Ca^2)Cs^2 \cdot Lq^{D/M/s} \quad \dots\dots(2 \cdot 1)$$

ここで

$Lq^{M/D/s}$: 系 M/D/s の列の長さの平均

$Lq^{D/M/s}$: 系 D/M/s の列の長さの平均

$Lq^{GI/G/s}$: 系 GI/G/s の列の長さの平均

Ca : 系 GI/G/s の到着時間間隔の変動係数

Cs : 系 GI/G/s のサービス時間の変動係数

s : サービス窓口数

式 (2・1) の右辺の第 2 項は

$$Lq^{M/D/s} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i\lambda} \left[\sum_{j=is}^{\infty} \frac{(i\lambda)^j}{j!} - \frac{s}{\lambda} \sum_{j=is+1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^j}{j!} \right] \quad \dots\dots(2 \cdot 2)$$

ここで

λ : 到着率

で与えられるが、式 (2・2) は $e^{-i\lambda}$ の $i=1$ から ∞ までの各項に $(i\lambda)^j/j!$ を $j=is$ から ∞ まで合計したものの積が含まれているので簡単に収束しない。従って、この近似式として、次式を利用する⁶⁾。

$$Lq^{M/G/s} \simeq \frac{1}{2} Lq^{M/M/s} \{1 + Cs^2\} \quad \dots\dots(2 \cdot 3)$$

ここで

Cs : 系 M/G/s のサービス時間の変動係数

また式 (2・3) で、サービス時間の分布が一定型であると考え、 $Cs=0$ となるから

$$Lq^{M/D/s} \simeq \frac{1}{2} Lq^{M/M/s} \quad \dots\dots(2 \cdot 4)$$

が得られる。

ここで式 (2・1) に式 (2・4) を代入して整理すると、式 (2・1) を修正した近似式 ($Lq^{GI/G/s}$) が得られる。

$$Lq^{GI/G/s} \simeq \frac{1}{2} Ca^2(1 + Cs^2)Lq^{M/M/s} + (1 - Ca^2)Cs^2Lq^{D/M/s} \quad \dots\dots(2 \cdot 5)$$

式 (2・5) は $\rho > 0.5$ では十分な精度であることが確かめられている⁴⁾。

さて、 $Lq^{GI/G/s}$ を利用するためには $Lq^{M/M/s}$, $Lq^{D/M/s}$ の値が必要となる。

まず $Lq^{M/M/s}$ は次式で求められる。

$$Lq^{M/M/s} = \frac{\lambda \mu a^2}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot p_0 \quad (2 \cdot 6)$$

ここで

$$a = \lambda/\mu, \quad \rho = a/s, \quad \rho < 1$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{(s-1)!(s-a)} \right]^{-1}$$

また $Lp^{D/M/s}$ は次式で求められる⁹⁾。

$$Lp^{D/M/s} = \frac{\rho \cdot w_0}{\gamma_0(1-w_0)^2} \quad \dots\dots(2 \cdot 7)$$

ここで

w_0 は $w = e^{-\frac{1-w}{\rho}}$ の根

$$\gamma_0 = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^k A_{k,i} + \frac{w}{1-w_0}$$

$$A_{k+1,0} = -\frac{s-k}{k+1-sw_0} A_{k,0}, \quad A_{0,0} = w_0$$

$$A_{k+1,i} = -\frac{s-k}{k-i+1} A_{k,i} \quad (1 \leq i \leq k \leq s-1)$$

$$A_{k+1,k+1} = \sum_{i=1}^k e^{\mu \cdot \frac{1}{\lambda}(s-i)} A_{k,i} + \sum_{i=1}^k \frac{s-k}{k-i+1} A_{k,i}$$

表2-1 $Lq^{M/M/s}$

ρ	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
0.50	0.50	0.33	0.23	0.17	0.13	0.09	0.17	0.05	0.04	0.03
0.55	0.67	0.47	0.35	0.27	0.21	0.17	0.14	0.11	0.09	0.07
0.60	0.90	0.67	0.53	0.43	0.35	0.29	0.24	0.20	0.17	0.15
0.65	1.20	0.95	0.78	0.65	0.56	0.48	0.42	0.36	0.32	0.28
0.70	1.63	1.34	1.14	1.00	0.67	0.78	0.70	0.63	0.57	0.51
0.75	2.25	1.92	1.70	1.52	1.38	1.26	1.16	1.07	0.99	0.91
0.80	3.20	2.84	2.58	2.38	2.17	2.07	1.94	1.83	1.72	1.63
0.85	4.81	4.42	4.13	3.90	3.70	3.53	3.38	3.24	3.11	3.00
0.90	8.10	7.67	7.35	7.08	6.86	6.66	6.47	6.31	6.16	6.01
0.95	18.05	17.58	17.23	16.93	16.67	—	—	—	—	—

表2-2 $Lq^{D/M/s}$

ρ	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$
0.50	0.12	0.06	0.03	0.02	0.01				
0.55	0.19	0.11	0.06	0.04	0.02	0.01			
0.60	0.28	0.18	0.12	0.08	0.06	0.04	0.03		
0.65	0.41	0.28	0.20	0.15	0.12	0.09	0.07	0.05	
0.70	0.61	0.45	0.35	0.28	0.23	0.19	0.15	0.13	0.11
0.75	0.91	0.74	0.60	0.51	0.43	0.38	0.32	0.29	0.23
0.80	1.35	1.13	0.98	0.87	0.77	0.70	0.63	0.56	0.52
0.85	2.16	1.91	1.74	1.58	1.47	1.37	1.36	1.19	1.13
0.90	3.73	3.45	3.24	3.07	2.89	2.81	2.69	2.59	2.49
0.95	9.01	8.70	8.46	8.26	8.09	7.94	7.80	7.69	7.59

$$+\left(\frac{1}{w_0}+\frac{s-k}{k+1-szw_0}\right)A_{k,0} \quad (1 \leq k \leq s-1)$$

$$A_{1,1}=\frac{1}{1-szw_0}$$

式(2・6), 式(2・7)を計算することによって, $L_q^{M/M/s}$, $L_q^{D/M/s}$ は求められる。計算結果の一部を表2-1, 表2-2, 図2-1によって示す。

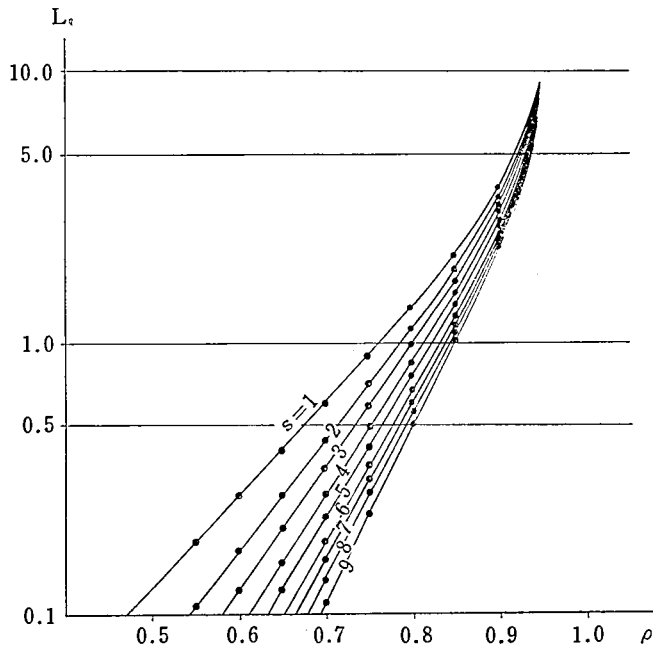


図2-1 $L_q^{D/M/s}$

3. 機械組立ラインのモデル

n 個の組立工程 (work station) からなるタンデム型の組立ラインを考える。各工程には s 人のサーバがあり, その平均作業時間を \bar{t} とする。 i 工程に作業員 j がいるとき, 作業員数, 平均作業時間をそれぞれ記号 S_{ij} , \bar{t}_i で示す。ジョブは第1工程から順に第2, 第3工程へ流れるものとする。第1工程では常に待ちが存在し, 第2工程以降は前工程の退去時間間隔が次工程の到着時間間隔となるものとする。また各工程における退去時間間隔は j 人のサーバ S_{ij} の作業完了時刻 t_i を同一時間軸上に時刻の早いものから順に並べ, その差を退去時間間隔とする。組立ラインのモデルを図3-1, 退去時間間隔を図3-2に示す。

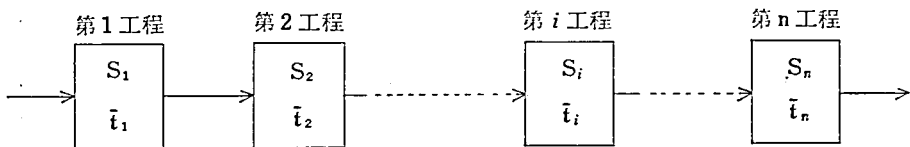


図3-1 組立ラインのモデル

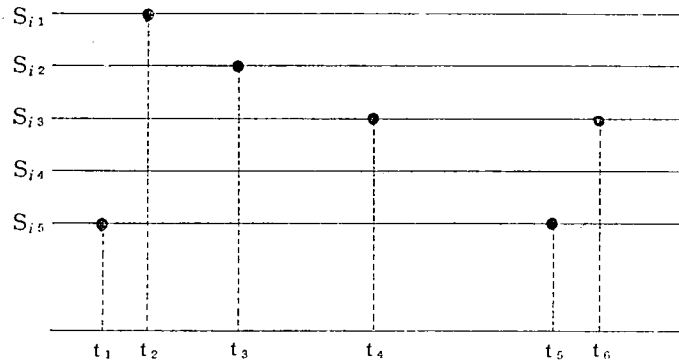


図3-2 退去時間間隔

4. 平均中間在庫の計算

モデルの例として、電子計算機の周辺機器を製造しているA社の組立ラインについて、調査（1975年7月～9月）を行なった。その結果、各工程の退去時間間隔、作業時間について、表4-1、表4-2を得た。

ここで \bar{t}_a : 平均退去時間間隔
 λ : 退去率
 σ_a : 退去時間間隔の標準偏差
 C_a : 退去時間間隔の変動係数
 \bar{t}_s : 平均サービス時間
 μ : サービス率
 σ_s : サービス時間の標準偏差
 C_s : サービス時間の変動係数

表4-1 退去時間間隔

工程	\bar{t}_a	λ	σ_a	C_a
1	44.13[分]	0.0227	44.24	1.002
2	48.60	0.0206	56.94	1.171
3	45.08	0.0222	33.27	0.738
4	41.91	0.0239	39.03	0.931
5	38.91	0.0257	37.43	0.962
6	48.92	0.0204	54.61	1.116
7	38.76	0.0258	38.19	0.985

表4-2 作業時間（サービス時間）

工程	\bar{t}_s	μ	σ_s	C_s
1	74.10[分]	0.0135	49.31	0.665
2	153.33	0.0065	49.99	0.326
3	191.01	0.0052	47.86	0.250
4	153.57	0.0062	84.73	0.551
5	53.61	0.0187	29.71	0.554
6	447.15	0.0022	133.55	0.298
7	367.02	0.0027	200.91	0.547

これらの結果をもとに、組立工程の順序に従って、到着率 λ （前工程の退去率が次工程の到着率となる）、サービス率 μ 、到着率 λ とサービス率の比 $\rho (= \lambda / \mu)$ を求め、これから系が平衡状態を実現するための条件

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1 \quad \rho : \text{利用率}$$

を満足するように、最小必要窓口数 s を決定する。これにより工程 i の必要人員の算定が

可能となる。

また求められた s に対して、その利用率 ρ を計算し、 $Lq^{M/M/s}$ 、 $Lq^{D/M/s}$ を表 2-1、表 2-2 または図 2-1 より求め、式 (2・3) に代入すれば、工程間の平均中間在庫量が求められる。この結果を表 4-3 に示す。

表 4-3 平均中間在庫量 $Lq^{G1/G/s}$

工程	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{G1/G/s}$
2	4	0.87	4.94	2.05	2.74
3	5	0.79	2.05	0.74	1.47
4	4	0.85	4.06	1.58	1.66
5	2	0.63	0.88	0.22	0.52
6	13	0.89	5.84	2.20	2.95
7	8	0.94	16.60	7.65	12.88

5. 例題

第 4 章でとりあげた機械組立ラインにおいては、各工程からの退去時間間隔の平均値は 43.76 [分] である。1 ケ月の平均就業時間を 11250 [分] (=25 日×450 分) とすると 1 ケ月の平均生産台数は 263.10 台となる。さて生産計画の問題として、1 ケ月の生産台数を 150 台、200 台、250 台、300 台、400 台と変化させた場合、各工程の作業人数および平均中間在庫量を算定せよ。ただし各工程の作業時間の変動係数は変らないものとする。

〔解〕まず到着間隔の変動係数 Ca について検討する。到着時間間隔の平均値を $E(X)$ 、分散を $Var(X)$ とすれば、任意の数 a に対して

$E(aX) = aE(X)$ 、 $Var(aX) = a^2Var(X)$ が成立つ、従って変動係数の定義より

$$Ca = \frac{\sqrt{Var(aX)}}{E(aX)} = \frac{\sqrt{a^2Var(X)}}{aE(X)} \quad \dots\dots(5 \cdot 1)$$

となり、平均値が変わっても変動係数は変らない。これは生産計画によって到着時間間隔の平均値が倍になっても各工程の変動係数はその工程の特徴を表わす定数で変化しないと考えてよい。

さて、1 ケ月の平均就業時間は 11250 分であるから生産台数 N に対する平均到着時間間隔 \bar{t}_a 、到着率 λ を求めると表 5-1 を得る。

表 5-1

N	\bar{t}_a	λ
150	75.00	0.0133
200	56.25	0.0178
250	45.00	0.0222
300	37.50	0.0267
350	32.14	0.3111
400	28.13	0.0356

また各工程のサービス率 μ 、変動係数 Ca 、 Cs を表 4-1、表 4-2 より求める。

次に利用率 $\rho \leq 0.95$ の範囲で作業人数 s_i を決定する。(0.95 < ρ < 1 の範囲では工程間の待ちが増大し実用的でない。)

最後に与えられた s_i , ρ に対して, それぞれの $Lq^{M/M/s}$, $Lq^{D/M/s}$ を求め修正した近似式 (2・3) に代入すれば, 工程間の平均中間在庫量が推定できる。

以下にその計算値を表 5-2 ~ 表 5-7 で示す。

表 5-2 $N=150$ [台], $\bar{t}=75.0$ [分], $\lambda=0.0133$

工程	λ/μ	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{GI/G/s}$
2	2.046	3	0.68	1.01	0.29	0.53
3	2.557	3	0.85	4.28	1.75	3.08
4	2.042	3	0.68	1.01	0.29	0.40
5	0.711	1	0.71	1.74	0.64	1.01
6	6.045	7	0.86	3.72	1.45	1.88
7	4.925	6	0.82	2.47	0.90	1.93

表 5-3 $N=200$ [台], $\bar{t}=56.25$ [分], $\lambda=0.0178$

工程	λ/μ	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{GI/G/s}$
2	2.788	3	0.91	8.86	2.85	5.39
3	3.433	4	0.86	4.12	1.75	2.96
4	2.738	3	0.91	8.86	2.85	3.54
5	0.951	2	0.47	0.28	0.05	0.16
6	8.090	9	0.90	6.16	2.50	3.12
7	6.592	7	0.94	15.8	6.2	12.8

表 5-4 $N=250$ [台], $\bar{t}=45.00$ [分], $\lambda=0.0222$

工程	λ/μ	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{GI/G/s}$
2	3.415	4	0.85	3.91	1.58	2.38
3	4.269	5	0.85	3.78	1.47	2.27
4	3.415	4	0.85	3.91	1.58	1.61
5	1.187	2	0.59	0.64	0.18	0.37
6	10.090	11	0.92	8.07	3.5*	0.4
7	8.222	9	0.91	6.58	2.9*	5.1

* は図表より推定

表 5-5 $N=300$ [台], $\bar{t}=37.00$ [分], $\lambda=0.0267$

工程	λ/μ	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{GI/G/s}$
2	4.107	5	0.82	2.82	0.98	1.71
3	5.134	6	0.86	1.36	1.55	0.96
4	4.107	5	0.82	2.82	0.98	1.34
5	1.427	2	0.71	1.50	0.50	0.87
6	12.136	13	0.93	10.92	4.5*	5.53
7	9.888	11	0.90	5.44	2.4*	4.23

表5－6 N=350〔台〕, $\bar{t}=32.14$ 〔分〕, $\lambda=0.0311$

工程	λ/μ	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{GI/G/s}$
2	4.784	6	0.80	2.11	0.70	1.28
3	5.980	7	0.85	3.53	1.37	2.54
4	4.784	6	0.80	2.11	0.70	0.85
5	1.663	2	0.83	2.49	1.60	1.48
6	14.136	15	0.94	14.13	4.0*	7.1
7	11.518	13	0.89	5.76	2.0*	4.5

表5－7 N=400〔台〕, $\bar{t}=28.13$ 〔分〕, $\lambda=0.0356$

工程	λ/μ	s	ρ	$Lq^{M/M/s}$	$Lq^{D/M/s}$	$Lq^{GI/G/s}$
2	5.476	6	0.91	8.10	3.30	4.92
3	6.846	8	0.86	4.04	1.25	2.92
4	5.476	6	0.91	8.10	3.30	3.34
5	1.903	3	0.64	0.76	0.10	0.44
6	16.18	18	0.90	4.85	2.0*	2.4
7	13.18	14	0.94	14.50	5.5*	11.3

以上の表を工程全体として整理する。工程間の平均待ち時間 Wq はリトルの公式により

$$Wq = \frac{1}{\lambda} Lq^{GI/G/s} \qquad \cdots \cdots (5 \cdot 2)$$

で与えられる。またジョブが第1工程から最終工程の作業を完了してラインから搬出されるまでの時間を T , i 工程の平均サービス時間を \bar{t}_i , 平均待ち時間を Wqi , 工程数を n で表わすと次式が得られる。

$$T = \bar{t}_{s1} + \sum_{i=2}^n (\bar{t}_i + Wqi) \qquad \cdots \cdots (5 \cdot 3)$$

これより表5－8が得られる。

表5－8 組立時間と待ち時間の合計

N	$\sum s$	$\sum Lq^{GI/G/s}$	$\sum Wq$	T
150	23〔人〕	8.83〔台〕	663.91〔分〕	2103.7〔分〕
200	28	27.80	1571.35	3011.1
250	35	16.11	733.33	2173.1
300	42	14.64	548.31	1988.1
350	49	17.82	572.99	2012.7
400	55	25.42	714.04	2153.8

6. 考 察

- (1) 近似式 $Lq^{GI/G/s}$ を用いることによって不安定な作業時間を含む機械組立工程の必要作業人数, 中間在庫量が推定でき, 生産計画に, 非常に有効な手段となる。
- (2) $Lq^{GI/G/s}$ の近似値と事例のジョブの平均中間在庫量の比較検討について, 一例では

あるが、事例の一工程の平均待ち時間を調査したところ 548.75 [分] (データ84) であった $\lambda=0.0204$ として台数にすれば 11.19 台である。一方、 $Lq^{GI/G/s}=12.88$ (台) となり、これは非常によい近似を裏付けている。

(3) 近似式 $Lq^{GI/G/s}$ の理論的根拠について、系 $GI/G/s$ で J. F. C. Kingman は $\rho < 1$ で ρ が 1 に近いときは、次式が近似的に成立つことを示している⁷⁾。

$$Lq^{GI/G/s} \simeq \frac{Ca^2 + Cs^2 \cdot \rho}{2(1-\rho)} \quad \dots\dots(6 \cdot 1)$$

また D. Gross は系 $GI/G/s$ の種々のシミュレーションの結果、 Lq に影響する最も大きな要因は変動係数であることを示している⁸⁾。以上のことから $Lq^{GI/G/s}$ の近似式は十分成立つものと思われる。

終りに工場の調査に心よく了承かつ御協力していただいた東京重機工業(株)取締役関三夫氏ならびに管理部主任酒本昌行氏、また近似式について種々の御意見をいただいた工学院大学の加藤ライジ先生、山崎源治先生、博士課程の山城光雄氏に感謝とお礼を申し上げます。

参考文献

- 1) MANNE, A. S.; MANAGE. SCIE., 4—2 (1958), 115.
- 2) LEVITAN, R. E.; MANAGE. SCIE., 5—3 (1959), 332.
- 3) 人見; 生産の計画理論, pp.67—87, 有斐閣, 昭和50年
- 4) 高城, 山崎, 山城; 待ち行列 $GI/G/s$ を用いた工程解析, 工学院大学研究報告, No.41, 1976
- 5) PAGE, E; Queuing Theory in OR, pp.80—81, Butterworths, 1972.
- 6) 国沢, 本間; 応用待ち行列事典, pp.72—73, 広川書店, 昭和46年
- 7) J. F. C. KINGMAN; The heavy traffic approximation in the theory of queues, Proceeding of the symp. on congestion theory, 137—169 (1964), North Carolina Press.
- 8) D. Gross; Sensitivity of queueing model to the assumption of exponentiality, (1976), NR 347020.
- 9) 本間; 待ち行列の理論, pp.144—145, 理工学社, 1973 (第4版)