

相異なる二つの物質より成る扇形の 切口を有する柱の熱伝導⁽¹⁾

小 平 吉 男*

Conduction of Heat in a Cylinder having a Fan-Shaped Cross Section and Composed of Two Parts with Different Physical Constants.

by Yoshio Kodaira

We consider a cylinder whose section is fan shaped as shown in Fig. 1. This cylinder is supposed to be composed of two parts as also shown in Fig. 1. To all physical constants for the central part from $r=0_1$ to $r=a_1$ we attach a suffix 1, and to those for the outer part from $r=a_1$ to $r=a$ we attach a suffix 2.

The temperatures of the two parts u_1 and u_2 satisfy the differential equations (1) and (2) respectively, where κ_1 and κ_2 are the diffusivities. The temperatures are supposed to be independent of z . The boundary conditions at $r=a_1$ are (3) and (4), which mean that the temperatures and the flows of heat are equal where k_1 and k_2 are the conductivities. The temperatures at the two sides of the fan $\theta=0$ and $\theta=\beta$ are zero, which are given by (3), (4), (5) and (6). The initial temperatures of the two parts are given by (9), where $f_1(r, \theta)$ and $f_2(r, \theta)$ are two arbitrary functions of r and θ .

We consider here two cases. In case I the temperature at the outer boundary of the fan is supposed to be zero, which is given by (10).

The elementary solutions of the differential equations are (11) and (12), where n_1, n_2, α_1 and α_2 are determined by the boundary conditions, $A_{n_1}, B_{n_1}, E_{n_2}, F_{n_2}, C_{\alpha_1, n_1}, D_{\alpha_1, n_1}, G_{\alpha_2, n_2}$ and H_{α_2, n_2} are constants which may contain the constants indicated by the suffices.

By using the boundary conditions it can be shown that $n_1=n_2=\frac{m\pi}{\beta}$ ($m=1, 2, 3 \dots$), and $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$. The values of α , which determine the eigenvalues $\kappa_2\alpha_1$ and $\kappa_1\alpha_2$, can be calculated by the equations of the two curves (24), (25).

An example of these curves is shown in Fig. 2. These curves are drawn using some suitable numerical values of the physical constants. From the figure we see that the values of α are infinitely numerous. We denote the s -th positive root of (23) by $\alpha_{n,s}$.

By using $\alpha_{n,s}$ the eigenfunctions are given by $X_s(r)$ and $Z_s(r)$, which are expressed by (35) and (36), where $u_n(r, s)$ is given by (30).

The solutions of the differential equations can be expressed by these eigenfunctions. The next step is to express the arbitrary functions $f_1(r, \theta)$ and $f_2(r, \theta)$ by using the eigenfunctions. This requires some tedious calculations, and finally we obtain such expressions as given by (59) and (60).

By using these expressions of the arbitrary functions in series of eigenfunctions

* 理工学部物理学科教授 物理数学

(1) この論文は本学第10期生高橋健樹君が著者の指導の下に行った卒業論文の不適當な点を正し、且つ体裁を整えたものである。

we obtain the solution of the problem given by (61) and (62).

As the second case of the problem, we take the boundary condition (63). The differential equations and the other boundary and initial conditions are the same as in the first case. The condition (63) means that the time rate of temperature rise of the surface is proportional to the heat added, where c is a constant.

In this case the procedure for obtaining the solutions is similar to that in case I, but the calculation is more complicated and tedious. The values of α are obtained from the equation (67), which is very much complicated than (23).

The values of α are obtained by the intersections of two curves similar in case I. As an example we take (68) and (69), which are obtained by inserting some numerical values of the physical constants in (67). In Fig. 3 these two curves are shown. These curves are similar to those drawn in Fig. 2. As in case I there are infinitely numerous roots of α , and we denote the s -th positive root as $\alpha_{n,s}$.

The solutions of the differential equations can be expressed by means of eigenfunctions, and are given by (77) and (78), where $X_s(r)$ and $Z_s(r)$ are the eigenfunctions given by (79) and (80), and $v_n(r, s)$ by (74).

We are in some difficulties for obtaining the expansions of arbitrary functions in series of eigenfunctions, because the eigenfunctions are not orthogonal, i. e. we cannot obtain the series as in the case of Fourier series, by calculating Fourier coefficients. However we can get such series after some troublesome calculations. They are given by (87) and (88). By means of these expansions the solutions of the problem are given by (101) and (102).

扇形の切口を有する柱を考える。その切口は第一図に示してあるように二つの部分から成っているとする。中心から半径 a_1 までの間は1なる物質、半径 a_1 かまでの間は2なる物質から成るとし、1なる物質に対する物理量には4なる脚符、2なる物質に対する物理量には2なる脚符を附けることとする。

温度を u_1, u_2 を以て表わし、二つの部分に対する熱伝導の微分方程式として極座標 r, θ を用いて夫々、

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \right), \quad [0 < r < a_1], \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right), \quad [a_1 < r < a] \quad (2)$$

が成立するとする。 κ_1^2, κ_2^2 は熱拡散率、 t は時間を表わす。

扇形の拡がりの角を β を以て表わし、その両端 $\theta = 0, \theta = \beta$ に於ける境界条件として、

$$(u_1)_{\theta=0}=0, (u_1)_{\theta=\beta}=0 \quad (3), (4)$$

$$(u_2)_{\theta=0}=0, (u_2)_{\theta=\beta}=0 \quad (5), (6)$$

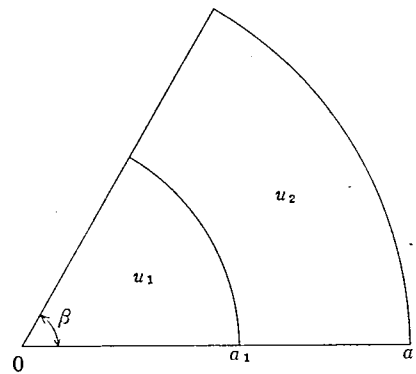
を採る。又 $r = a_1$ なる二つの物質の境界面に於いては

$$(u_1)_{r=a_1} = (u_2)_{r=a_1} \quad (7)$$

$$k_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=a_1} = k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=a_1} \quad (8)$$

が成立するとする。 k_1, k_2 は熱伝導率を表わす。

又初期条件とし



第1図 Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} (u_1)_{t=0} &= f_1(r, \theta), \\ (u_2)_{t=0} &= f_2(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を採用する。 $f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ は r と θ との任意の関数とする。

此処では $r=a$ に於ける境界条件に就て二つの場合を考える。

問題 I

$r=a$ に於ける温度を 0 として

$$(u_2)_{r=a}=0 \quad (10)$$

なる境界条件を用いる。

偏微分方程式 (1), (1) の特解は,

$$u_1 = e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1^2 t} (A_{n_1} \cos n_1 \theta + B_{n_1} \sin n_1 \theta) \{C_{\alpha_1, n_1} J_{n_1}(\kappa_2 \alpha_1 r) + D_{\alpha_1, n_1} Y_{n_1}(\kappa_2 \alpha_1 r)\}, \quad (11)$$

$$u_2 = e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2 t} (E_{n_2} \cos n_2 \theta + F_{n_2} \sin n_2 \theta) \{G_{\alpha_2, n_2} J_{n_2}(\kappa_1 \alpha_2 r) + H_{\alpha_2, n_2} Y_{n_2}(\kappa_1 \alpha_2 r)\} \quad (12)$$

の如く書ける。 $J_{n_1}(\kappa_2 \alpha_1 r)$, $J_{n_2}(\kappa_1 \alpha_2 r)$ は夫々 n_1 次 n_2 次の Bessel 関数, $Y_{n_1}(\kappa_2 \alpha_1 r)$, $Y_{n_2}(\kappa_1 \alpha_2 r)$ は夫々 n_1 次及び n_2 次の Neumann 関数である。 A_{n_1} , B_{n_1} , E_{n_2} , F_{n_2} は夫々 n_1 又は n_2 の関数ではあり得るが, t , θ , r には無関係な積分定数, C_{α_1, n_1} , D_{α_1, n_1} : G_{α_2, n_2} , H_{α_2, n_2} は夫々 α_1 , n_1 又は α_2 , n_2 を含むかも知れないが, t , θ , r には無関係な積分定数である。

(11) に境界条件 (3), (4) を入れれば

$$A_{n_1}=0 \quad \sin n_1 \beta = 0$$

となればよいことが分る。即ちと n_1 しては

$$n_1 = \frac{m\pi}{\beta}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

と採ればよい。同様に (12) に境界条件 (5), (6) を入れば,

$$E_{n_2}=0 \quad n_2 = \frac{m\pi}{\beta}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

とすればよい。 $n_1=n_2=\frac{m\pi}{\beta}$ であるから, 以後

$$n_1=n_2=\frac{m\pi}{\beta}=n$$

と書くこととする。

$m=0$ の場合には

$$u_1=0 \quad u_2=0$$

となるので, この場合を除外して置く。

一般に $J_n(x)$, $Y_n(x)$ を夫々 n 次の Bessel 関数及び n 次の Neumann 関数とすれば

$$J_{-n}(x) = \cot n\pi Y_n(x) - \operatorname{cosec} n\pi J_n(x),$$

$$Y_{-n}(x) = \operatorname{cosec} n\pi J_n(x) - \cot n\pi Y_n(x)$$

なる関係があるので, これから,

$$J_{-n}(x) = \cos n\pi \cot^2 n\pi J_n(x) - \cos n\pi \cot n\pi Y_n(x), \quad (14)$$

$$Y_{-n}(x) = \cos n\pi \cot n\pi J_n(x) + \cos n\pi \cot^2 n\pi Y_n(x) \quad (15)$$

が得られる。

(14), (15) の関係により, Bessel 関数及び Neumann 関数の次数で負の場合には, 正の場合の Bessel 関数及び Neumann 関数を以て置き換えることが出来るので, (11), (12) に於いて $n_1=n_2=n$ が負の場合には積分定数 A_{α_1} , B_{α_1} , $C_{\alpha_1, n}$, $D_{\alpha_1, n}$, $E_{\alpha_1, n}$, F_n , $G_{\alpha_2, n}$,

$H_{a2, n}$ を適当に変えれば u_1 及び u_2 の解を (11), (12) の形にすることが出来る。従って今後 $m > 0$ と考えることとする

(11) に於いては $r=0$ の点を考えると, $J_n(\kappa_2 \alpha_1 r)$ は 0 となるが, $Y_n(\kappa_2 \alpha_1 r)$ は無限大となるので

$$D_{a1, n} = 0$$

としなくてはならない。

以上の考察により, u_1, u_2 は,

$$u_1 = B_n C_{a1, n} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1^2 t} \sin n\theta J_n(\kappa_2 \alpha_1 r), \quad (16)$$

$$u_2 = F_n e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2 t} \sin n\theta \{G_{a2, n} J_n(\kappa_1 \alpha_2 r) + H_{a2, n} Y_n(\kappa_1 \alpha_2 r)\} \quad (17)$$

となる。

(19), (17) が t の如何に関らず成立するために, この二式の t を含む項が等しくなるように採る。即ち

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1^2 = \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2$$

と採るのである。これから

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

が得られる。

境界条件 (7) は (16), (17) から (18) を用いて

$$\begin{aligned} B_n C_{a, n} J_n(\kappa_2 \alpha a_1) \\ = F_n \{G_{a, n}(\kappa_1 \alpha a_1) + H_{a, n} Y_n(\kappa_1 \alpha a_1)\} \end{aligned} \quad (19)$$

なる関係が得られる。

次に境界条件 (18) を満足させなくてはならない。それには $C_n(x)$ を n 次の円柱関数とすると

$$\frac{\partial C_n(x)}{\partial x} = \frac{n}{x} C_n(x) - C_{n+1}(x) \quad (20)$$

なる関係を用いる。この関係により, (8) は

$$\begin{aligned} B_n C_{a, n} \kappa_1 \kappa_2 \alpha \left(\frac{n}{\kappa_2 \alpha a_1} J_n(\kappa_1 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_2 \alpha a_1) \right) \\ = F_n \kappa_2 \kappa_1 \alpha \left\{ G_{a, n} \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} J_n(\kappa_1 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1) \right) \right. \\ \left. + H_{a, n} \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} Y_n(\kappa_1 \alpha a) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1) \right) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。(21) からは $\alpha=0$ がこれを満足するかも知れないという懸念があるが, α は (19) をも満足しなくてはならないが, (19) は $\alpha=0$ では満足されない。従って $\alpha \neq 0$ とする。

境界条件 (10) から

$$G_{a, n} J_n(\kappa_1 \alpha a) + H_{a, n} Y_n(\kappa_1 \alpha a) = 0$$

が得られるがこれは新しい定数 $K_{a, n}$ を用いて,

$$G_{a, n} \frac{K_{a, n}}{J_n(\kappa_1 \alpha a)}, \quad H_{a, n} = -\frac{K_{a, n}}{Y_n(\kappa_1 \alpha a)} \quad (22)$$

と置けば, 満足される。

(22) の関係を用いれば, (19), (21) から

$$\frac{\frac{n}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_2 \alpha a_1} J_n(\kappa_2 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_2 \alpha a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha a)}$$

$$= k_2 k_1 \frac{\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} J_n(\kappa_1 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1)}{J_n(\kappa_1 \alpha a)} - \frac{\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} Y_n(\kappa_1 \alpha a_1) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1)}{Y_n(\kappa_1 \alpha a)} \quad (23)$$

が得られる。この式から α が決定される。

α は,

$$\eta = k_1 k_2 \frac{\frac{n}{\kappa_2 \alpha a_1} J_n(\kappa_2 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_2 \alpha a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha a)}, \quad (24)$$

$$\eta = k_2 k_1 \frac{\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} J_n(\kappa_1 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1)}{J_n(\kappa_1 \alpha a)} - \frac{\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} Y_n(\kappa_1 \alpha a_1) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1)}{Y_n(\kappa_1 \alpha a)} \quad (25)$$

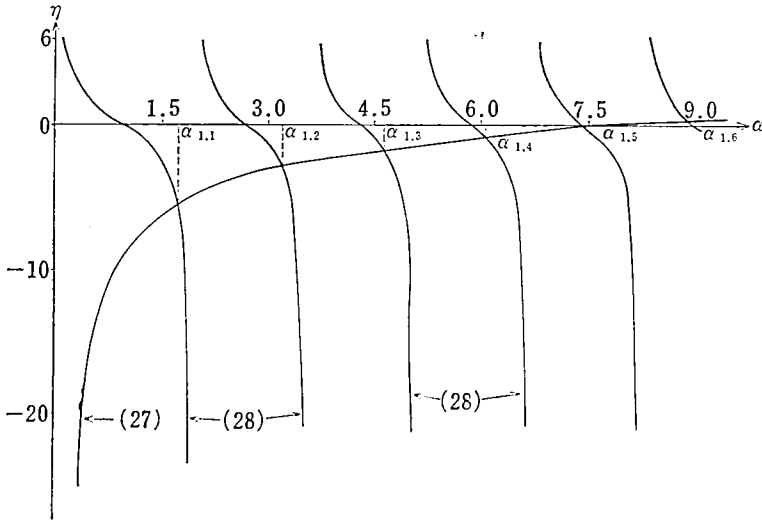
なる二曲線の交点から求められる。

(24), (25) の一例を図示するために, $m=1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\kappa_1=1$, $\kappa_2=2$, $k_1=1$, $k_2=2$, $a_1=2$, $a=1.2$, $n = \frac{m\pi}{\beta} = 2$ と置けば (24), (25) は

$$\eta = \frac{2}{\alpha} - 2 \frac{J_3(2\alpha)}{J_2(2\alpha)}, \quad (26)$$

$$\eta = \frac{2}{\alpha} - 2 \frac{\frac{J_3(\alpha)}{J_2(1.2\alpha)} - \frac{Y_3(\alpha)}{Y_2(1.2\alpha)}}{\frac{J_2(\alpha)}{J_2(1.2\alpha)} - \frac{Y_2(\alpha)}{Y_2(1.2\alpha)}} \quad (27)$$

となる。これを図示すれば, 第2図となる。



第2図 Fig. 2

この図で見ると α の正根は無限に多くあることが分るであろう。 α を大きさの順序に並べて s 番目のものを $\alpha_{m,s}$ と書くこととする。 α は m にも関係するので m なる脚符をつけ

ておく。然るときは、 u_1 , u_2 として m と s についての和を書けば次のようになる：

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} B_n C \alpha_{m,s}, n e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r), \quad (28)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} F_n K \alpha_{m,s}, n e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \times \left(\frac{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} - \frac{Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} \right). \quad (29)$$

簡単のために

$$u_n(r, s) = \frac{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} - \frac{Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} \quad (30)$$

と置く。又、

$$B_n C \alpha_{m,s}, n = \frac{L_{m,s}}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}, \quad (31)$$

$$F_n K \alpha_{m,s}, n = \frac{L_{m,s}}{u_n(a_1, s)} \quad (32)$$

の如く採れば、境界条件 (7) が満足される。この置き方により u_1 , u_2 は次の如く書かれる：

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \frac{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a)}, \quad (33)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \frac{u_n(r, s)}{u_n(a_1, s)}. \quad (34)$$

尚簡単のために

$$X_s(r) = \frac{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}, \quad (35)$$

$$Z_s(r) = \frac{u_n(r, s)}{u_n(a_1, s)} \quad (36)$$

と置けば、これらの関数は円柱関数である。(35), (36) に初期条件 (9) を入れれば、

$$f_1(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta X_s(r), \quad (37)$$

$$f_2(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta Z_s(r) \quad (38)$$

となる。(37), (38) を満足するように $L_{m,s}$ を決定しなくてはならない。

$f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ を先ず θ に関して Fourier 級数に展開すれば次のようになる：

$$f_1(r, \theta) = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \int_0^{\beta} f_1(r, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi d\varphi, \quad (39)$$

$$f_2(r, \theta) = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \int_0^{\beta} f_2(r, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi d\varphi. \quad (40)$$

次に $f_1(r, \varphi)$, $f_2(r, \varphi)$ を r の関数と考えて、

$$\frac{2}{\beta} f_1(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_s(r), \quad (41)$$

$$\frac{2}{\beta} f_2(\alpha, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s Z_s(r) \quad (42)$$

の如き展開を行う。但し

$$\frac{2}{\beta} M_s = L_{m,s}$$

と置いてある。

(41) に $k_1 \kappa_2^2 X_p(r) r$ を掛けて 0 から a_1 まで積分したものに, (42) に $k_2 \kappa_1^2 Z_p(r) r$ を掛けて a_1 から a まで積分したものを加える:

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(r, \varphi) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(r, \varphi) Z_p(r) r dr \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr \right). \end{aligned} \quad (43)$$

この式の右辺を計算しなくてはならない。一般に, $C_m(\alpha x)$, $Z_m(\beta x)$ を二つの m 次の異なる円柱関数とすると,

$$\begin{aligned} \int C_m(\alpha x) Z_m(\beta x) x dx &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \beta x C_m(\alpha, x) Z_{m-1}(\beta x) \\ &\quad - \alpha x C_{m-1}(\alpha x) Z_{m+1}(\beta x) \} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha x C_{m+1}(\alpha x) Z_m(\beta x) - \beta x C_m(\alpha x) Z_{m+1}(\beta x) \} \end{aligned} \quad (44)$$

なる関係がある。この関係により $s \neq p$ の場合には

$$\begin{aligned} & \int_0^{a_1} J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r) J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} r) r dr \\ &= \frac{1}{\kappa_2^2 (\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2)} \left[\kappa_2 \alpha_{m,p} r J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r) J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,p} r) \right. \\ &\quad \left. - \kappa_2 \alpha_{m,s} r J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} r) J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} r) \right]_0^{a_1} \\ &= \frac{\kappa_2 a_1}{\kappa_2^2 (\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2)} \{ \alpha_{m,p} J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1) J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1) \\ &\quad - \alpha_{m,s} J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1) J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1) \} \end{aligned} \quad (45)$$

となる。同様に (30) から得られる $u_n(s, a) = 0$, $u_n(p, a) = 0$ なる関係により

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^a u_n(r, s) u_n(r, p) r dr \\ &= \frac{1}{\kappa_1^2 (\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2)} \left[\kappa_1 \alpha_{m,p} r u_n(r, s) u_{n+1}(r, p) \right. \\ &\quad \left. - \kappa_1 \alpha_{m,s} r u_n(r, p) u_{n+1}(r, s) \right]_{a_1}^a \\ &= \frac{\kappa_1 a}{\kappa_1^2 (\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2)} \{ \alpha_{m,s} u_n(a_1, s) u_{n+1}(a_1, p) \\ &\quad - \alpha_{m,p} u_n(a_1, p) u_{n+1}(a_1, s) \} \end{aligned} \quad (46)$$

が得られる。

(45), (46) により,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr \\
 &= \frac{1}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1) J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)} \int_0^{a_1} J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r) J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} r) r dr \\
 &= \frac{\kappa_2 a_1}{\kappa_2^2 (\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2)} \left(\alpha_{m,p} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)} - \alpha_{m,s} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \right), \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr \\
 &= \frac{1}{a_n(a_1, s) u_n(a_1, p)} \int_{a_1}^a u_n(r, s) u_n(r, p) r dr \\
 &= \frac{\kappa_1 a_1}{\kappa_1^2 (\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2)} \left(\alpha_{m,s} \frac{u_{n+1}(a_1, s)}{u_n(a_1, s)} - \alpha_{m,p} \frac{u_{n+1}(a_1, p)}{u_n(a_1, p)} \right) \quad (48)
 \end{aligned}$$

となる。これから

$$\begin{aligned}
 & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr \\
 &= \frac{k_1 \kappa_2 a_1}{\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2} \left(\alpha_{m,s} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} - \alpha_{m,p} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)} \right) \\
 &\quad - \frac{k_2 \kappa_1 a_1}{\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2} \left(\alpha_{m,s} \frac{u_{n+1}(a_1, s)}{u_n(a_1, s)} - \alpha_{m,p} \frac{u_{n+1}(a_1, p)}{u_n(a_1, p)} \right) \\
 &= \frac{a_1}{\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2} \left\{ \left(k_1 \kappa_2 \alpha_{m,s} \frac{J_{n+1}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)}{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)} - k_2 \kappa_1 \alpha_{m,p} \frac{u_{n+1}(a_1, s)}{u_n(a_1, s)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(k_1 \kappa_2 \alpha_{m,p} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)} - k_2 \kappa_1 \alpha_{m,s} \frac{u_{n+1}(a_1, p)}{u_n(a_1, p)} \right) \right\} \quad (49)
 \end{aligned}$$

が得られるが、境界条件 (8) を (29) に入れ (30) を考慮に入れれば、

$$k_1 \kappa_2 \alpha_{m,s} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_{m,s} \frac{u_{n+1}(a_1, s)}{u_n(a_1, s)} \quad (50)$$

なる関係があることが分る。この式で s を p に変えても同様な関係が成立する。従って次の如くなる：

$$k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr = 0. \quad (51)$$

次に $s = p$ の場合を考える。 $C_n(r)$ を n 次の円柱関数とすると

$$\int [C_n(\alpha r)]^2 r dr = \frac{r^2}{2} \left[\{C_n'(\alpha r)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 r^2}\right) \{C_n(\alpha r)\}^2 \right] \quad (52)$$

なる積分が出来る。これから

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{a_1} \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)\}^2 r dr = \left[\frac{r^2}{2} \{J_n'(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)\}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 r^2}\right) \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)\}^2 \right]_0^{a_1} \\
 &= \frac{a_1^2}{2} \left[\{J_n'(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 a_1^2}\right) \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2 \right] \quad (53)
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_1} X_s^2(r) r dr &= \frac{a_1^2}{\{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2} \int_0^{a_1} \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)\}^2 r dr \\
&= \frac{a_1^2}{\{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2} \left[\{J_n'(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 a_1^2}\right) \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2 \right] \quad (53)
\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^a Z_s^2(r) r dr &= \frac{1}{\{u_n(a_1, s)\}^2} \int_{a_1}^a \{u_n(r, s)\}^2 r dr \\
&= \frac{1}{2\{u_n(a_1, s)\}^2} \left[a^2 \{u_n'(a_1, s)\}^2 - a_1^2 \{u_n'(a_1, s)\}^2 \right. \\
&\quad \left. - a_1^2 \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_1^2 \alpha_{m,s}^2 a_1^2}\right) \{u_n(a_1, s)\}^2 \right] \quad (54)
\end{aligned}$$

を得る。(53), (54) から

$$\begin{aligned}
&k_1^2 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s^2(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s^2(r) r dr \\
&= \frac{k_1 \kappa_2^2 a_1^2}{2\{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2} \left[\{J_n'(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 a_1^2}\right) \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)\}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_2 \kappa_1^2 a_1^2}{2\{u_n(a_1, s)\}^2} \left[a^2 \{u_n'(a_1, s)\}^2 - a_1^2 \{u_n'(a_1, s)\}^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_1^2 \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_1^2 \alpha_{m,s}^2 a_1^2}\right) \{u_n(a_1, s)\}^2 \right] \right] \\
&\equiv V(\alpha_{m,s}) \quad (55)
\end{aligned}$$

を得る (45) の式は複雑であるから $V(\alpha_{m,s})$ と書くこととする。(51) と (55) とにより (43) から,

$$M_s = \frac{1}{V(\alpha_{m,s})} \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\xi, \varphi) X_s(\xi) \xi d\xi + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \varphi) Z_s(\xi) \xi d\xi \right) \quad (56)$$

となるので,

$$\begin{aligned}
f_1(r, \varphi) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_s(r) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{X_s(r)}{V(\alpha_{m,s})} \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f(\xi, \varphi) X_s(\xi) \xi d\xi \right. \\
&\quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \varphi) Z_s(\xi) \xi d\xi \right), \quad (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(r, \varphi) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s Z_s(r) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{Z_s(r)}{V(\alpha_{m,s})} \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f(\xi, \varphi) X_s(\xi) \xi d\xi \right. \\
&\quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \varphi) Z_s(\xi) \xi d\xi \right) \quad (58)
\end{aligned}$$

となる。(57), (58) を夫々 (49), (50) に入れれば $f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ の展開式が得られる:

$$\begin{aligned}
f_1(r, \theta) = & \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{V(\alpha_{m,s})} \frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)} \\
& \times \left(\frac{k_1 k_2^2}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \int_0^{a_1} \int_0^{\beta} f_1(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} \xi) \xi d\xi d\varphi \right. \\
& + \frac{k_2 \kappa_1^2}{\frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} - \frac{Y \frac{m\pi}{\beta}(\alpha_{m,s} a_1)}{Y \frac{m\pi}{\beta}(\alpha_{m,s} a)}} \int_{a_1}^a \int_0^{\beta} f_2(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi \\
& \left. \times \left(\frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} \xi)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} - \frac{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} \xi)}{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} \right) \xi d\xi d\varphi \right), \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(r, \theta) = & \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{V(\alpha_{m,s})} \frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)} - \frac{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)} \\
& \times \left(\frac{k_2 k_2^2}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \int_0^{a_1} \int_0^{\beta} f_1(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} \xi) \xi d\xi d\varphi \right. \\
& + \frac{k_2 \kappa_1^2}{\frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} - \frac{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)}{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)}} \int_{a_1}^a \int_0^a f_2(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi \\
& \left. \times \left(\frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} \xi)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} - \frac{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} \xi)}{Y \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)} \right) \xi d\xi d\varphi \right). \quad (60)
\end{aligned}$$

(59), (60) の如き任意の関数を固有関数の級数に展開することが出来たのでこの問題の解は次のように書かれる・・

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{V(\alpha_{m,s})} \frac{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a)} \\
& \times \left(\frac{k_1 k_2^2}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \int_0^{a_1} \int_0^{\beta} f_1(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} \xi) \xi d\xi d\varphi \right. \\
& \left. + \frac{k_2 \kappa_1^2}{u \frac{m\pi}{\beta}(a, s)} \int_{a_1}^a \int_0^{\beta} f_2(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi u \frac{m\pi}{\beta}(\xi, s) \xi d\xi d\varphi \right), \quad (61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{V(\alpha_{m,s})} \frac{u \frac{m\pi}{\beta}(r, s)}{u \frac{m\pi}{\beta}(a_1, s)} \\
& \times \left(\frac{k_1 k_2^2}{J \frac{m\pi}{\beta}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \int_0^{a_1} \int_0^{\beta} f(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi J \frac{m\pi}{\beta}(r, s) \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{k_2 k_1^2}{u^{\frac{m\pi}{\beta}}(a_1, s)} \int_0^{a_1} \int_0^{\hat{\xi}} f_2(\xi, \varphi) \sin \frac{m\pi}{\beta} \varphi u^{\frac{m\pi}{\beta}}(\xi, s) \xi d\xi d\varphi. \quad (62)$$

問題 II

この問題に於いて問題 I と異なるのは $r=a$ に於ける境界条件 (10) の代りに

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + c \frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (63)$$

を用いるだけである。 c は定数である。

従って問題 I と違うのは $r=a$ に於ける計算だけであるので、他の式は皆問題 I の式を用いることが出来る。 $r=a$ に於ける境界条件 (63) を u_2 に入れれば、

$$\begin{aligned} & -\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha^2 \{G_{a,n} J_n(\kappa_1 \alpha a) + H_{a,n} Y_n(\kappa_1 \alpha a)\} \\ & + c \kappa_1 \alpha \left\{ G_{a,n} \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} J_n(\kappa_1 \alpha a) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right) \right. \\ & \left. + H_{a,n} \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} Y_n(\kappa_1 \alpha a) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (64)$$

或は

$$\begin{aligned} & G_{a,n} \left\{ -\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha J_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} J_n(\kappa_1 \alpha a) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right) \right\} \\ & + H_{a,n} \left\{ -\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha Y_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} Y_n(\kappa_1 \alpha a) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる。これは新しい定数 $K_{a,n}$ を用いて、 $G_{a,n}$ 、 $H_{a,n}$ を次のように採ると満足される：

$$G_{a,n} = \frac{K_{a,n}}{-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha J_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} J_n(\kappa_1 \alpha a) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right)}, \quad (65)$$

$$H_{a,n} = - \frac{K_{a,n}}{-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha Y_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} Y_n(\kappa_1 \alpha a) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right)}. \quad (66)$$

この問題に於いては (71) の $G_{a,n}$ 、 $H_{a,n}$ に (2) の代りに (65)、 (66) を使うことになる。従って (23) の代りに次の関係式を得る：

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{n}{\kappa_2 \alpha a_1} J_n(\kappa_2 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_2 \alpha a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha a_1)} \\ & = k_2 \kappa_1 \left(\frac{\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} J_n(\kappa_1 \alpha a_1) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1)}{-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha J_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} J_n(\kappa_1 \alpha a) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\frac{n}{\kappa_1 \alpha a_1} Y_n(\kappa_1 \alpha a_1) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a_1)}{-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha Y_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} Y_n(\kappa_1 \alpha a) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right)} \right) \\ & \quad \div \left(\frac{J_n(\kappa_1 \alpha a_1)}{-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha J_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} J_n(\kappa_1 \alpha a) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha a) \right)} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{Y_n(\kappa_1 \alpha a_1)}{\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha Y_n(\kappa_1 \alpha a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha a} Y_n(\kappa_1 \alpha a) - Y_{n+1}(\kappa \alpha a) \right)} \quad (67)$$

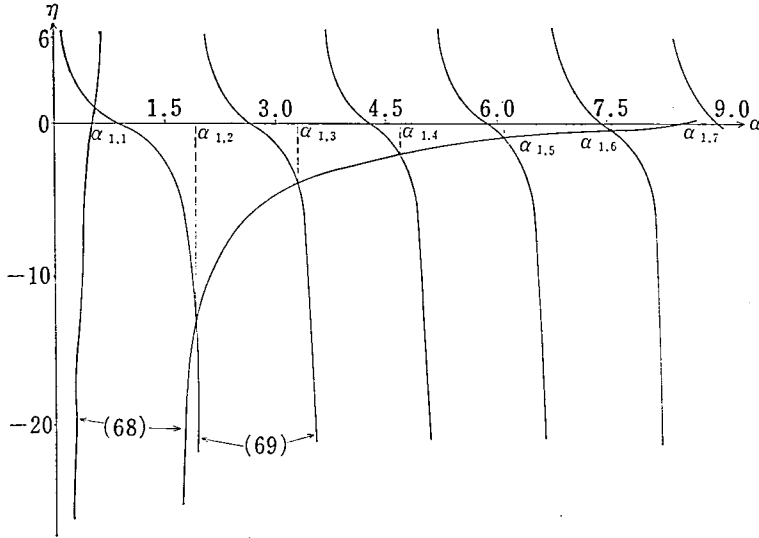
この式から α の値が決定される。 α は二曲線の交点として与えられることは問題 I の場合と同様である。その二曲線は (24), (25) の類似の式である。それを書くことは省略する。

上の二曲線の形を見るために $m=1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\kappa_1=1$, $\kappa_2=2$, $k_1=1$, $k_2=2$, $a=1$, $a_1=1.2$, $c=1$, $n = \frac{m\pi}{\beta} = 2$ と採ることにすれば, これら二曲線は

$$\eta = \frac{2}{\alpha} - 2 \frac{J_3(2\alpha)}{J_2(2\alpha)}, \quad (68)$$

$$\eta = \frac{4}{\alpha} - \left(\frac{J_3(\alpha)}{-2\alpha J_2(1.2\alpha) + \left(\frac{1}{1.2\alpha} J_2(1.2\alpha) - J_3(1.2\alpha) \right)} - \frac{Y_3(\alpha)}{-2\alpha Y_2(1.2\alpha) + \left(\frac{1}{1.2\alpha} Y_2(1.2\alpha) - Y_3(1.2\alpha) \right)} \right) \div \left(\frac{J_2(\alpha)}{-2\alpha J_2(1.2\alpha) + \left(\frac{1}{1.2\alpha} J_2(1.2\alpha) - J_3(1.2\alpha) \right)} - \frac{Y_2(\alpha)}{-2\alpha Y_2(1.2\alpha) + \left(\frac{1}{1.2\alpha} Y_2(1.2\alpha) - Y_3(1.2\alpha) \right)} \right) \quad (69)$$

となる。これを図示したものが第 3 図である。



第 3 図 Fig. 3

この図から分るように α は無限に多くある。 α の正根を大きさの順に並べて s 番目のものを $\alpha_{m,s}$ と書くこととする α は m にも関係するので m なる脚符を附け加えて置く。然るときは u_1 , u_2 は次の如く書ける:

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} B_n C \alpha_{m,s} n e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r), \quad (70)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} F_n K \alpha_{m,s}, n e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \times \left(\frac{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a)}{A_J} - \frac{Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{B_Y} \right). \quad (71)$$

但し

$$A_J = -\kappa_1 \kappa_2 \alpha_{m,s} J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha_{m,s} a} J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) - J_{n+1}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) \right) \\ = \left(-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha_{m,s} + \frac{c n}{\kappa_1 \alpha_{m,s} a} \right) J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) - c J_{n+1}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a), \quad (72)$$

$$B_Y = \left(-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha_{m,s} + c \left(\frac{n}{\kappa_1 \alpha_{m,s} a} Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) - Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) \right) \right) \\ = \left(-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha_{m,s} + \frac{c n}{\kappa_1 \alpha_{m,s} a} \right) Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) - c Y_{n+1}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a) \quad (73)$$

と置いてある。

又

$$u_n(r, s) = \frac{J_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{A_J} - \frac{Y_n(\kappa_1 \alpha_{m,s} r)}{B_Y} \quad (74)$$

と置く。境界条件 (17) により次の如く置く：

$$B_n C \alpha_{m,s}, n = \frac{L_{m,s}}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}, \quad (74)$$

$$F_n K \alpha_{m,s}, n = -\frac{L_{m,s}}{u_n(a_1, s)}. \quad (75)$$

尚,

$$\frac{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} = X_s(r), \quad (77)$$

$$\frac{u_n(r, s)}{u_n(a, s)} = Z_s(r) \quad (78)$$

と書くことにすれば,

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta X_s(r), \quad (79)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 t} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta Z_s(r) \quad (80)$$

と書くことが出来る。

(77), (78) に初期条件 (9) を入れた後の計算は問題 I (37) ~ (43) と全くと同じである。

(77), (78) に初期条件 (9) を入れたものは,

$$f_1(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta X_s(r), \quad (81)$$

$$f_2(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} L_{m,s} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta Z_s(r) \quad (82)$$

となり、問題 I の場合と同様に Fourier 級数を用いて

$$f_1(r, \theta) = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \int_0^{\beta} f_1(r, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda d\lambda, \quad (83)$$

$$f_2(r, \theta) = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{\beta} \theta \int_0^{\beta} f_2(r, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda d\lambda \quad (84)$$

と書けば、

$$f_1(r, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_s(r), \quad (85)$$

$$f_2(r, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s Z_s(r) \quad (86)$$

の如き展開式が出来れば問題が解かれるのは問題 I の場合と同様である。

(83), (84) の展開式の中の M_s を決定するには問題 I と同じに次のような積分を作る：

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(r, \lambda) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(r, \lambda) Z_p(r) r dr \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s (k_2 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr). \end{aligned} \quad (87)$$

最初 $s \neq p$ の場合を考える問題 I の場合の計算から考えて

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr \\ &= \frac{k_1 \kappa_2^2 a_1}{\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2} \left(\alpha_{m,s} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} - \alpha_{m,p} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)} \right) \\ & \quad - \frac{k_2 \kappa_1^2 a_1}{\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2} \left(\alpha_{m,s} \frac{u_{n+1}(a_1, s)}{u_n(a_1, s)} - \alpha_{m,p} \frac{u_{n+1}(a_1, p)}{u_n(a_1, p)} \right) \\ & \quad + \frac{k_2}{(\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2) u_n(a_1, p) u_n(a_1, p)} \\ & \quad \times \left[u_n(r, s) \frac{\partial u_n(r, p)}{\partial r} - u_n(r, p) \frac{\partial u_n(r, s)}{\partial r} \right]_{r=a_1}. \end{aligned} \quad (88)$$

となることが分るであらう。

然るに問題 I の場合と同様に

$$k_2 \kappa_2 \alpha_{m,s} \frac{J_{n+1}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)}{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_{m,s} \frac{u_{n+1}(a_1, s)}{u_n(a_1, s)}$$

が成立し、又 s を p に変えた式も成立する。従って次のようになる：

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_s(r) X_p(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr \\ &= \frac{k_2 \kappa_1^2}{(\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2) u_n(a_1, s) u_n(a_1, p)} \\ & \quad \times \left(u_n(a, s) \frac{\partial u_n(r, p)}{\partial r} - u_n(a, p) \frac{\partial u_n(r, s)}{\partial r} \right)_{r=a_1}. \end{aligned} \quad (89)$$

境界条件 (63) は

$$-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 Z_s(a) + c \left(\frac{\partial Z_s(r)}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (90)$$

である。然るに

$$\frac{\partial Z_s(r)}{\partial r} = \frac{1}{u_n(a_1, r)} \frac{\partial u_n(r, s)}{\partial r}$$

であるから, (90) は

$$-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2 \frac{u_n(a, s)}{u_n(a_1, s)} + \frac{c}{u_n(a_1, s)} \left(\frac{\partial u_n(r, s)}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (91)$$

となる。従って

$$\left(\frac{\partial u_n(r, s)}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2}{c} u_n(a, s) \quad (92)$$

が得られる。

(92) を (89) に代入すれば

$$\begin{aligned} & k_2 \kappa_1^2 \int_a^{a_1} X_3(r) X_p(r) r dr + k_1 \kappa_2^2 \int_{a_1}^a Z_s(r) Z_p(r) r dr \\ &= \frac{k_2 \kappa_1^2}{(\alpha_{m,s}^2 - \alpha_{m,p}^2) a_n(a, s)} u_n(a, p) \\ & \quad \times \left(u_n(a, s) \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,p}^2}{c} u_n(a, p) - u_n(a, p) \frac{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{m,s}^2}{c} u_n(a, s) \right) \\ &= -\frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, s)}{u_n(a_1, s)} \frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, p)} \end{aligned} \quad (93)$$

が得られる。

次に $s=p$ の場合を考える。

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} \{X_p(r)\}^2 r dr &= \frac{a_1^2}{2} \frac{1}{\{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)\}^2} \\ & \quad \times \left\{ \{J_n'(\kappa_2 \alpha_{m,s} a)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,p}^2 a_1^2} \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)\}^2 \right) \right\}, \\ \int_{a_1}^a \{Z_p(r)\}^2 r dr &= \frac{a^2}{2} \frac{1}{u_n(a_1, p)^2} \\ & \quad \times \left\{ \{u_n(a, p)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_1^2 \alpha_{m,s}^2 a_1^2} \right) \{a_n(a_1, p)\}^2 \right\}. \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} \{X_p(r)\}^2 r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a \{Z_p(r)\}^2 r dr \\ &= \frac{1}{\{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)\}^2} \left[\frac{a_1^2}{2} \{J_n'(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)\}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,p}^2 a_1^2} \right) \{J_n(\kappa_2 \alpha_{m,p} a_1)\}^2 \right] \\ & \quad + \frac{1}{\{u_n(a_1, p)\}^2} \frac{a^2}{2} \left\{ \{u_n'(a, p)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,p}^2 a_1^2} \right) \{a_n(a, p)\}^2 \right\} \\ & \quad - \frac{a_1^2}{2} \left\{ \{u_n'(a_1, p)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_2^2 \alpha_{m,p}^2 a_1^2} \right) \{u_n(a_1, p)\}^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\equiv U(\alpha_{m,p}) \quad (94)$$

となる (94) の左辺は複雑なので $U(\alpha_{m,p})$ と書いてある。

(87) に (94) を代入すれば,

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\xi, \lambda) X_p(\xi) \xi d\xi + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \lambda) Z_p(\xi) \xi d\xi \\ &= -\frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, p)} \sum_{s=1}^{\infty} M_s \frac{u_n(a, s)}{u_n(a_1, s)} \\ & \quad + M_p \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \left(\frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, s)} \right)^2 + M_p U(\alpha_{m,p}) \end{aligned} \quad (95)$$

となる。これに

$$\begin{aligned} & \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, p)} f_2(a, \lambda) \\ &= \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, p)} \sum_{s=1}^{\infty} M_s \frac{u_n(a, s)}{u_n(a_1, s)} \end{aligned}$$

を加えると,

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\xi, \lambda) X_p(\xi) \xi d\xi + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \lambda) Z_p(\xi) \xi d\xi \\ & \quad + \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, p)} f_2(a, \lambda) \\ &= M_p \left\{ \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \left(\frac{u_n(a, p)}{u_n(a_1, p)} \right)^2 + U(\alpha_{m,p}) \right\} \\ &\equiv M_p W(\alpha_{m,p}) \end{aligned} \quad (96)$$

となる。(96) の M_p の掛っている括弧内の式は複雑であるので $W(\alpha_{m,p})$ と書いてある。

以上の計算により

$$\begin{aligned} f_1(r, \lambda) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{X_s(r)}{W(\alpha_{m,s})} \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\xi, \lambda) X_s(\xi) \xi d\xi \right. \\ & \quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \lambda) Z_s(\xi) \xi d\xi + \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, s)}{u_n(a_1, s)} f_2(a, \lambda) \right), \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} f_2(r, \lambda) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{Z_p(r)}{W(\alpha_{m,s})} \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\xi, \lambda) X_s(\xi) \xi d\xi \right. \\ & \quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\xi, \lambda) Z_s(\xi) \xi d\xi + \frac{k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_n(a, s)}{u_n(a_1, s)} f_2(a, \lambda) \right) \end{aligned} \quad (98)$$

なる展開式が得られる。

(96), (97) を夫々 (83), (84) に代入すれば, $f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ に対する展開式は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta) &= \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{W(\alpha_{m,s})} \frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_{m,s} r)}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \\ & \quad \times \left(\frac{k_1 \kappa_2^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \int_0^{a_1} \int_0^{\beta} f_1(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_{m,s} \xi)}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_{m,s} a_1)} \xi d\xi d\lambda \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\frac{k_2 \kappa_1^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)}{B_Y}}{A_J - B_Y} \int_{a_1}^a \int_0^{\beta} f_2(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \\ & \times \left(\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s \xi)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s \xi)}{B_Y} \right) \xi d\xi d\lambda, \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} f_2(r, \theta) &= \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{W(\alpha_m, s)} \frac{\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s r)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s r)}{B_Y}}{\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)}{B_Y}} \\ & \times \left(\frac{k_1 \kappa_2^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a_1)} \int_0^{a_1} \int_0^{\beta} f_1(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s \xi)}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a_1)} \xi d\xi d\lambda \right. \\ & + \frac{k_2 \kappa_1^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)} \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)}{B_Y} \int_{a_1}^a \int_0^{\beta} f_2(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \\ & \left. \times \left(\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s \xi)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s \xi)}{B_Y} \right) \xi d\xi d\lambda \right). \end{aligned} \quad (100)$$

但し A_J , B_Y は (72), (73) で与えられる次の式を表わす :

$$A_J = \left(-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha_m, s + \frac{c n}{\kappa_1 \alpha_m, s a} \right) J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a) - c J_{\frac{m\pi}{\beta}+1}(\kappa_1 \alpha_m, s a),$$

$$B_Y = \left(-\kappa_1 \kappa_2^2 \alpha_m, s + \frac{c n}{\kappa_1 \alpha_m, s a} \right) Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a) - c Y_{\frac{m\pi}{\beta}+1}(\kappa_1 \alpha_m, s a).$$

(99), (100) により任意の関数 $f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ の展開式が得られたので, 本問題の解は次のようになることが分るであろう :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_m, s^2 t} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{W(\alpha_m, s)} \frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s r)}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a_1)} \\ & \times \left\{ \frac{k_1 \kappa_2^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a_1)} \int_a^{a_1} \int_0^{\beta} f_1(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s \xi)}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a_1)} \xi d\xi d\lambda \right. \\ & + \frac{\frac{k_2 \kappa_1^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a)} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a)}{B_Y}}{A_J - B_Y} \int_{a_1}^a \int_0^{\beta} f_2(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \\ & \left. \times \left(\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s \xi)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s \xi)}{B_Y} \right) \xi d\xi d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_m, s^2 t} \frac{\sin \frac{m\pi}{\beta} \theta}{W(\alpha_m, s)} \frac{\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s r)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s r)}{B_Y}}{\frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)}{A_J} - \frac{Y_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_m, s a_1)}{B_Y}} \\ & \times \left\{ \frac{k_1 \kappa_2^2}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a)} \int_0^{a_1} \int_0^a f_1(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \frac{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s \xi)}{J_{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_2 \alpha_m, s a)} \xi d\xi d\lambda \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{k_2 \kappa_1^2}{J^{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)} - \frac{Y^{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_{m,s} a_1)}{B_Y}}{A_J} \int_{a_1}^a \int_0^{\beta} f_2(\xi, \lambda) \sin \frac{m\pi}{\beta} \lambda \\
& \times \left(\frac{J^{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_{m,s} \xi)}{A_J} - \frac{Y^{\frac{m\pi}{\beta}}(\kappa_1 \alpha_{m,s} \xi)}{B_Y} \right) \xi d\xi d\lambda \Big\}. \tag{102}
\end{aligned}$$