

Sur un chemin des champs de vecteurs dont les coordonnées se trouvent dans un voisinage assez petit de l'élément neutre

by Jōyō Kanitani*

Résumé

A la démonstration de l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles qui sert à déterminer les chemins horizontaux au dessus d'un chemin contenu dans une variété différentiable M admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie, nous avons profité un chemin sur l'espace tangent $T(e)$ au groupe structural G , en élément neutre e de ce groupe, qui se trouve dans un voisinage assez petit de l'élément neutre de $T(e)$. Cet article a pour but de prouver qu'il existe un tel chemin, pourvu que la variété M soit deux fois différentiable.

1 Soient S l'espace projectif à dimension infinie, $((A_i) (i \in I))$ une base de S . Quant aux repère $\mathfrak{A}(A_i)$ de sommets $(A_i) (i \in I)$, aux coordonnées normales $(x^i) (i \in I, \sum |x^i| = 1)$ d'un point $P(x)$ de S par rapport au repère $\mathfrak{A}(A_i)$, au cube projectif $\mathfrak{C}(a, \lambda)$ (l'ensemble des point x tels que $|x^i - a^i| < \lambda$) et à la transformation projective normale qui s'exprime par

$$\rho x'^i = \sum_j p_j^i x^j \quad (\sum_i |p_j^i| = 1)$$

nous avons fait un sommaire au début de l'article ([4] p. 1). En particulier, pour la transformation projective normale T qui laisse invariant le cube projectif $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}(A_i, 1)$ ainsi que le sommet A_i , on a

$$P_{i'}' = 1, P_{i'} = 0, P_i = 0 \quad (l \in I' = I - \{i\})$$

de sorte que son équation s'écrit

$$z'^i = \sum_j p_j^i z^j \quad (i, j \in I'; z^i = \frac{x^i}{x^i}; \sum_i |p_j^i| = 1).$$

(On suppose que l'ensemble d'indices I possède, conformément le théorème de Zermelo, un bon ordre et on désigne par ι l'élément le plus petit de I).

On définit, dans \mathfrak{C}_i , un vecteur comme une classe d'équivalence des couples de deux points de \mathfrak{C}_i ([3], p. 4). Chaque vecteur peut se représenter par un couple de la forme $(A_i, (1, 0), P(1, z^i))$ de sorte qu'il s'écrit $u(z)$. L'espace de ces vecteurs se note Y_i . Le vecteur (A_i, U_{ik}) se note e_k . On a

$$u(z) = \sum_i z^i e_i.$$

Envisageons un autre repère \mathfrak{A}' de sommets $A_i, A_i' \in \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, (la frontière de \mathfrak{C}_i)

* 一般教養教授 数学

est de points d'unité U_i' ($i \in I \times \dots \times I$). La transformation projective normale T telle que

$$TA_i = A_i, \quad TA_i' = A_i', \quad TU_i' = U_i'$$

est dite attachée au changement de repère $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$. Dans ce cas pour chaque $j \in I'$ les p_j^i ($i \in I'$) sont les coordonnées normales du sommet A_j' par rapport au repère \mathfrak{A} . On a, pour chaque j , $p_j^i = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i et les $p_j^i \neq 0$ se relie au moyen de l'équation $\sum_i |p_j^i| = 1$. Soit $i_0(p, j)$ l'élément le plus petit de ces indices i . On a $p_j^{i_0(p, j)} > 0$ d'après définition. On peut prendre les p_j^i ($i \neq i_0(p, j)$; $i, j \in I'$) comme coordonnées de la transformation projective normale ($T(p_j^i)$ ($i, j \in I'$)).

2 L'ensemble G_i des transformations projectives normales T possédant la propriété dont nous venons de mentionner forme un groupe qui opère à \mathfrak{G}_i comme un automorphisme. On induit sur G_i la topologie du produit $(\mathfrak{B}\mathfrak{G}_i)'$, en faisant correspondre à la graphe fonctionnelle F telle que $F(i) \in (\mathfrak{B}\mathfrak{G}_i)'$ la transformation projective normale qui applique le sommet A_i ($i \in I'$) de \mathfrak{A} sur un point $A_i' \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}_i$.

Etant donné un élément $p = T(p_j^i) \in G_i$, considérons l'ensemble $U(p, j_0, \varepsilon)$ des transformations $T(\zeta_j^i)$ telles que $\zeta_j \in \mathfrak{B}\mathfrak{G}_i$ mais pour un indice $j_0 \in I$

$$\zeta_{j_0} \in \mathfrak{G}(p_{j_0}, \varepsilon) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{G}_i, \quad (p_{j_0} = T(p_j^i)A_{j_0}, \quad \zeta_r = T(\zeta_j^i)A_r).$$

On peut prendre les $\zeta_{j_0}^i$ ($i \neq i_0(p, j_0)$) comme une partie des coordonnées locales de la transformation $\zeta = T(\zeta_j^i)$. En effet, cela revient à la convention mentionnée plus haut, si l'indice $i_0(p, j_0)$ est le plus petit des indices i tels que $\zeta_{j_0}^i \neq 0$. Au cas contraire, en prenant $\zeta_{j_0}^{i_0'}$ où i_0' est l'indice le plus petit, comme une des coordonnées locales on peut écrire

$$\zeta_{j_0}^{i_0} = 1 - \zeta_{j_0}^{i_0'} - \sum_{i \neq i_0, i_0'} |\zeta_{j_0}^i| > 0,$$

car $\zeta_{j_0}^{i_0}$ est de même signe que $p_{j_0}^{i_0}$.

L'ensemble $U(p, j_0, \varepsilon)$ est un voisinage ouvert de G_i (la topologie de G_i est engendrée par la famille de tels ensembles lorsque p parcourt G_i ([2], p. 10; [6], p. 61). L'intersection $\mathfrak{U}_{p, \varepsilon}$ de la forme

$$\mathfrak{U}_{p, \varepsilon} = U(p, j_1, \varepsilon) \cap \dots \cap U(p, j_l, \varepsilon)$$

se nomme le voisinage élémentaire de p . D'une manière précise, on a pour $\zeta \in \mathfrak{U}_{p, \varepsilon}$

$$\begin{aligned} \zeta_{j_s} &\in \mathfrak{G}(p_{j_s}, \varepsilon) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{G}_i \quad (s = 1, \dots, l), \\ \zeta_j &\in \mathfrak{B}\mathfrak{G}_i. \end{aligned}$$

D'après la convention par rapport au largeur d'un cube projectif on a

$$0 < \varepsilon \leq \min_i (|p_{j_s}^i| \neq 0 \quad (s = 1, \dots, l; i \in I')).$$

L'ensemble $((\mathfrak{U}_{p, \varepsilon}) (p \in G_i))$ forme une base pour la topologie de G_i . On désigne par $\tilde{\mathfrak{U}}_{p, \varepsilon}$ l'ensemble des transformations ζ telles que

$$\begin{aligned} \zeta_{j_s} &\in \mathfrak{U}(p_{j_s}, \varepsilon) \cap \mathfrak{B}\mathfrak{G}_i \quad (s = 1, \dots, l), \\ \zeta_j &= p_j \quad (j \in I' - \{j_1, \dots, j_l\}). \end{aligned}$$

3 Soit $T(\gamma_{j^i})$ une transformation appartenant à un voisinage $U_{(g, j_0, \lambda)}$ de g . Envisageons la translation à gauche associée à un élément y de G_i : $L(y)\gamma = y\gamma$. $y\gamma$ se note p . On a

$$|\gamma_{j_0^i} - g_{j_0^i}| < \lambda, \quad g_{j_0^i} - \lambda < \gamma_{j_0^i} < g_{j_0^i} + \lambda.$$

Comme $\lambda \leq \min_i (|g_{j_0^i}| \neq 0)$, on a aussi

$$0 \leq |g_{j_0^i}| - \lambda < |\gamma_{j_0^i}| < |g_{j_0^i}| + \lambda,$$

d'où

$$\sum_{i'} |\gamma_{j_0^{i'}}| < b\lambda \quad (g_{j_0^{i'}} = 0, \gamma_{j_0^{i'}} \neq 0),$$

$b(>0)$ étant le nombre des indices i tels que $g_{j_0^i} \neq 0$. Il vient donc

$$\begin{aligned} |\sum_i y_{i^i} \gamma_{j_0^i} - p_{j_0^i}| &= |y_{i_1^i} \gamma_{j_0^{i_1}} + \dots + y_{i_b^i} \gamma_{j_0^{i_b}} + \sum_{i'} y_{i'^i} \gamma_{j_0^{i'}} \\ &\quad - (y_{i_1^i} g_{j_0^{i_1}} + \dots + y_{i_b^i} g_{j_0^{i_b}})| < 2b\lambda, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(3.1) \quad L(y)U_{(g, j_0, \lambda/2b)} \subset U_{(p, j_0, \lambda)}.$$

Si l'on fait $g = e$, il vient $y = p$, $b = 1$,

$$(3.1)' \quad L(p)U_{(e, j_0, \lambda/2)} \subset U_{(p, j_0, \lambda)}$$

tandis que si l'on fait $p = e$, il vient $y = g^{-1}$,

$$(3.1)'' \quad L(g^{-1})U_{(g, j_0, \lambda/2b)} \subset U_{(e, j_0, \lambda)}.$$

Nous pouvons donc conclure que la translation à gauche opère à G_i comme un automomorphisme, l'ensemble $(L(p)(\mathfrak{U}_e) \ (p \in G_i))$ formant ainsi une base pour la topologie de G_i .

4 Considérons une fonction réelle f définie dans G_i . Prenons un élément $p = T(p_{j^i}) \in G_i$. Soit \tilde{f} la restriction de f sur $\tilde{\mathfrak{U}}_p$. D'après la convention mentionnée plus haut, les $\zeta_{j_s^i}(i, j_s \in I'; s = 1, \dots, l; i \neq i_0(p, j_s))$ sont les coordonnées locales de $\zeta = T(\zeta_{j^i}) \in \tilde{\mathfrak{U}}_p$, car, dans $\tilde{\mathfrak{U}}_p$, les $\zeta_{j^i}(i \in I', j \in I' - \{j_1, \dots, j_l\})$ sont les constants p_{j^i} . Il existe donc une fonction $\tilde{f}^*(\zeta_{j_s^i})$ définie dans $\tilde{\mathfrak{U}}_p$ satisfaisant à l'égalité

$$f(\zeta) = f^*(\zeta_{j_s^i}(\zeta)) \quad (s = 1, \dots, l; i \neq i_0(p, j_s)).$$

Lorsque cette fonction f^* est différentiable par rapport à $\zeta_{j_s^i}$, la fonction f est dite différentiable dans \mathfrak{U}_p . Si cela arrive en tous point p dans G_i , indépendamment du choix de voisinage élémentaire \mathfrak{U}_p , elle est dite différentiable dans G_i .

Soit F l'ensemble des fonctions continuellement différentiable dans G_i . L'application qui fait correspondre le nombre réel

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial \zeta_{j_s^i}} \right)_{\zeta=p} \quad (i, j_s \in I'; s = 1, \dots, l; i \neq i_0(p, j_s); f \in F)$$

au triplet (p, \mathfrak{U}_p, f) se note $\frac{\partial}{\partial p_{j_s^i}}$. Si $\mathfrak{U}_p' \subset \mathfrak{U}_p$, on a

$$\frac{\partial}{\partial p_{j_s^i}}(p, \mathfrak{U}_p, f) = \frac{\partial}{\partial p_{j_s^i}}(p, \mathfrak{U}_p', f).$$

On définit comme l'habitude que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial p_{j'^i}} + \frac{\partial}{\partial p_{j''^i}} \right) (p, \mathbb{I}_p, f) &= -\frac{\partial}{\partial p_{j'^i}} (p, \mathbb{I}_p, f) + \frac{\partial}{\partial p_{j''^i}} (p, \mathbb{I}_p, f) \\ &(\mathbb{I}_p \subset U_{(p,j')} \cap U_{(p,j'')}, \\ \alpha \frac{\partial}{\partial p_{j^i}} (p, \mathbb{I}_p, f) &= \frac{\partial}{\partial p_{j^i}} (p, \mathbb{I}_p, \alpha f). \end{aligned}$$

Lorsque le point p reste fixé, l'ensemble des combinaisons linéaires des

$$\frac{\partial}{\partial p_{j^i}} \quad (i, j \in I'; \quad i \neq i_0(p, j))$$

forme un espace vectoriel qui se nomme l'espace tangent à G_i en point p . Tout vecteur tangent à G_i en point p s'écrit

$$\sum_{(i \neq i_0(p, j), j)} \lambda_{j^i} \frac{\partial}{\partial p_{j^i}}$$

où $\lambda_{j^i} = 0$ sauf pour un nombre fini des couple $((i, j) \in I' \times I')$. Cela peut s'écrire aussi

$$\sum_j \sum_{i \neq i_0(p, j)} \lambda_{j^i} \frac{\partial}{\partial p_{j^i}} \quad \text{ou bien} \quad \sum_i \sum_{j(i_0(p, j) \neq i)} \lambda_{j^i} \frac{\partial}{\partial p_{j^i}},$$

où \sum_j et \sum_i sont étendues à un nombre fini des indices respectifs.

De la restriction \tilde{f} de f sur $\tilde{U}_{(p, j_0, \lambda)}$ on définit, dans $U_{(g, j_0, \lambda/2b)}$ tel que $L(y)U_{(g, j_0, \lambda/2b)} \subset U_{(p, j_0, \lambda)}$, la fonction \tilde{f}' satisfaisant à l'égalité

$$\tilde{f}'(\gamma) = \tilde{f}(L(y)\gamma) \quad (\gamma \in U_{(g, j_0, \lambda/2b)}).$$

Cela revient à dire que

$$\tilde{f}'^*(\dots, \gamma_{j_0^i}, \dots) = \tilde{f}^*(\dots, \sum_i y_{i^i} \gamma_{j_0^i}, \dots).$$

Remplaçons-y $\gamma_{j_0^\alpha}$ ($\alpha \in I$) par $\bar{\gamma}_{j_0^\alpha}$ défini par

$$\bar{\gamma}_{j_0^\alpha} = (1 - \rho)g_{j_0^\alpha} + \rho\gamma_{j_0^\alpha} \quad (\alpha \in I, 0 \leq \rho \leq 1).$$

Comme $\gamma_{j_0} \in \mathcal{G}(g_{j_0}, \lambda/2b)$, $\gamma_{j_0^\alpha}$ ainsi que $\bar{\gamma}_{j_0^\alpha}$ sont de même signe que $g_{j_0^\alpha}$, si $g_{j_0^\alpha} \neq 0$. Donc les $\gamma_{j_0^\alpha}$ et $\bar{\gamma}_{j_0^\alpha}$ sont toujours de même signe. On a de plus

$$0 < \bar{\gamma}_{j_0^{i_0(g, j_0)}} = 1 - \sum_{i \neq i_0(g, j_0)} |\bar{\gamma}_{j_0^i}|$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \sum_i y_{i^i} \bar{\gamma}_{j_0^i} &= \sum_{i \neq i_0(g, j_0)} y_{i^i} \bar{\gamma}_{j_0^i} + y_{i_0(g, j_0)} (1 - \sum_{i \neq i_0(g, j_0)} |\bar{\gamma}_{j_0^i}|) \\ &= y_{i_0(g, j_0)} + \sum_{i \neq i_0(g, j_0)} \bar{\gamma}_{j_0^i} (y_{i^i} - \sigma_{j_0^i} y_{i_0(g, j_0)}), \end{aligned}$$

où $\sigma_{j_0^i}$ est le signe de $\gamma_{j_0^i} (\neq 0)$.

Fixons maintenant un indice $h (\neq i_0(g, j_0))$. Supposons que les $\gamma_{j_0^i} (i \neq i_0(g, j_0))$ sont différents de $g_{j_0^i}$ seulement pour $i = h$. Soient (i_0, \dots, i_l) l'ensemble des indices tels que $i \neq i_0(p, j_0)$ et $(y_{h^i}$ ou $y_{i_0(g, j_0)}^i) \neq 0$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\bar{\gamma}_{j_0}^h - g_{j_0}^h} \{ \tilde{f}'^*(\dots, \bar{\gamma}_{j_0}^h, \dots) - \tilde{f}'^*(\dots, g_{j_0}^h, \dots) \\
&= \frac{1}{\bar{\gamma}_{j_0}^h - g_{j_0}^h} \{ \tilde{f}^*(\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \\
&\quad \dots \\
&\quad , \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \\
&\quad - \tilde{f}^*(\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \dots \\
&\quad \dots \\
&\quad , \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \} \\
&= \frac{1}{\bar{\gamma}_{j_0}^h - g_{j_0}^h} \{ \tilde{f}^*(\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \\
&\quad \dots \\
&\quad , \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \\
&\quad - \tilde{f}^*(\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \\
&\quad \dots \\
&\quad , \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_{l-1}} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_{l-1}} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_{l-1}}), \\
&\quad \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \\
&\quad + \tilde{f}^*(\quad \text{idem} \quad) \\
&\quad \dots \\
&\quad + \tilde{f}^*(\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \\
&\quad \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_2} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_2} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_2}), \\
&\quad \dots \\
&\quad \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \\
&\quad - \tilde{f}^*(\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \\
&\quad \dots \\
&\quad \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \} \\
&= (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}) \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \bar{\gamma}_{j_0}^{i_l}} (\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + \bar{\gamma}_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \\
&\quad \dots \\
&\quad , \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l} + (g_{j_0}^h + \theta_m (\bar{\gamma}_{j_0}^h - g_{j_0}^h)) (\mathcal{Y}_h^{i_l} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_l}), \dots) \\
&\quad \dots \\
&+ (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}) \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \bar{\gamma}_{j_0}^{i_1}} (\dots, \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1} \\
&\quad + (g_{j_0}^h + \theta_1 (\bar{\gamma}_{j_0}^h - g_{j_0}^h)) (\mathcal{Y}_h^{i_1} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_1}), \\
&\quad \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_2} + g_{j_0}^h (\mathcal{Y}_h^{i_2} - \sigma_{j_0}^h \mathcal{Y}_{i_0(\mathcal{G}, j_0)}^{i_2}), \\
&\quad \dots) \\
&(0 < \theta_1, \dots, \theta_m < 1).
\end{aligned}$$

Si l'on y fait $\rho \rightarrow 0$ et, par suite, $\bar{\gamma}_{j_0}^h \rightarrow g_{j_0}^h$, il vient

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \gamma_{j_0}^h} \right)_g = \sum_{i(\approx i_0(p, j_0))} (y_{j_0}^i - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^i) \left(\frac{\partial f^*}{\partial \zeta_{j_0}^i} \right)_p.$$

Cela revient à dire que

$$(4.1) \quad dL(y) \left(\frac{\partial}{\partial g_{j_0}^h} \right) = \sum_{i(\approx i_0(p, j_0))} (y_{j_0}^i - \sigma_{j_0}^h y_{i_0(g, j_0)}^i) \frac{\partial}{\partial p_{j_0}^i} \\ (h \neq i_0(g, j_0), \quad L(y)U_{(g, j_0, \lambda/2b)} \subset U_{(p, i_0, \lambda)}),$$

où $\sigma_{j_0}^h$ est le signe d'une coordonnée locale d'un point γ_{j_0} pris arbitrairement dans $\mathcal{U}(g_0, \lambda/2b)$.

Si l'on fait $g=e$, il vient $y=p$, $i_0(g, j_0)=j_0$, $b=1$,

$$(4.1)' \quad dL(p) \left(\frac{\partial}{\partial e_{j_0}^h} \right) = \sum_{i(\approx i_0(p, j_0))} (p_{j_0}^i - \sigma_{j_0}^h p_{j_0}^i) \frac{\partial}{\partial p_{j_0}^i} \\ (h \neq j_0, \quad L(p)U_{(e, j_0, \lambda/2)} \subset U_{(p, j_0, \lambda)}),$$

tandis que si l'on fait $p=e$ il vient $y=g^{-1}$,

$$(4.1)'' \quad dL(g^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial g_{j_0}^h} \right) = \sum_{i \neq j_0} (q_{j_0}^i - \sigma_{j_0}^h q_{i_0(g, j_0)}^i) \frac{\partial}{\partial e_{j_0}^i} \\ (q=g^{-1}, \quad h \neq i_0(g, j_0), \quad L(g^{-1})U_{(g, j_0, \lambda/2b)} \subset U_{(e, j_0, \lambda)}).$$

5 Considérons maintenant l'ensemble H des vecteurs tangents en e

$$c = \sum_{i(\approx j)} c_j^i \frac{\partial}{\partial e_{j_0}^i} = \sum_j \sum_{i(\approx j)} c_j^i \frac{\partial}{\partial e_{j_0}^i} = \sum_i \sum_{j(\approx i)} c_j^i \frac{\partial}{\partial e_{j_0}^i}$$

satisfaisant à la condition que $\sum_{i(\approx j)} |c_j^i| < 1$ pour chaque j . Soit γ l'application $H \rightarrow G$, qui fait correspondre à un tel vecteur c la transformation projective normale définie par

$$\rho x'^i = \sum_j c_j^i x^j \quad (c_j^j = 1 - \sum_{s(\approx j)} |c_j^s|).$$

L'image γH se trouve dans la restriction d'un voisinage élémentaire de l'élément neutre. On induit la topologie de G , à γH ainsi qu'à l'ensemble H lui-même.

Supposons maintenant que

$$c = \sum_{s=1}^m \sum_{i(\approx j_s)} c_{j_s}^i \frac{\partial}{\partial e_{j_s}^i}$$

et que pour chaque j_s

$$\sum_{i(\approx j_s)} |c_{j_s}^i| < \frac{\lambda}{4b} < \frac{1}{4b},$$

où b est le nombre des indices i tels que $p_{j_s}^i \neq 0$ pour au moins un des j_s ($1 \leq s \leq m$). Alors, comme $c_{j_s} \in \mathcal{U}(\delta_{j_s, \lambda/4b})$ on peut prendre comme $\sigma_{j_s}^h$ le signe de $c_{j_s}^h$ en appliquant (4.1)'. Cela étant fait, il vient

$$(5.1) \quad dL(p)(c) = \sum_{j_s} \sum_{h(\approx j_s)} c_{j_s}^h dL(p) \left(\frac{\partial}{\partial e_{j_s}^h} \right) \\ = \sum_{j_s} \sum_{h(\approx j_s)} \sum_{i(\approx i_0(p, j_s))} (c_{j_s}^h p_{j_s}^i - |c_{j_s}^h| p_{j_s}^i) \frac{\partial}{\partial p_{j_s}^i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\approx i_0(p, j_s))} (\sum_h p_h^i c_{j_s^h} - p_{j_s^i}) \frac{\partial}{\partial p_{j_s^i}} \\
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\approx i_0(p, j_s))} (\xi_{j_s^i} - p_{j_s^i}) \frac{\partial}{\partial p_{j_s^i}} \quad (\xi_{j_s^i} = \sum_h p_h^i c_{j_s^h}).
\end{aligned}$$

Or, on a

$$|\xi_{j_s^i} - p_{j_s^i}| \leq \left| \sum_{h(\approx j_s)} |p_h^i| |c_{j_s^h}| + |p_{j_s^i}| (1 - c_{j_s^j}) \right| < \frac{\lambda}{2b},$$

c' est-à-dire, $\xi_{j_s} \in \mathcal{E}(p_{j_s}, \lambda/2b)$ de sorte, qu'on peut prendre comme $\sigma_{j_s^h}$ le signe de $\xi_{j_s^h}$ en appliquant (4.1), les $\xi_{j_s^h}$ et $p_{j_s^h}$ étant de même signe, si $p_{j_s^h} \neq 0$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad dL(p^{-1})dL(p)(c) &= \sum_{j_s} \sum_{h(\approx i_0(p, j_s))} \sum_{i(\approx j_s)} (\xi_{j_s^h} - p_{j_s^h}) \\
&\quad \times (q_h^i - \sigma_{j_s^h} q_{i_0(p, j_s)^i}) \frac{\partial}{\partial e_{j_s^i}} \\
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\approx j_s)} \sum_{h(\approx i_0(p, j_s))} (\xi_{j_s^h} - p_{j_s^h}) q_h^i \\
&\quad - (|\xi_{j_s^h}| - |p_{j_s^h}|) q_{i_0(p, j_s)^i} \frac{\partial}{\partial e_{j_s^i}} \\
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\approx j_s)} \left(\sum_h (\xi_{j_s^h} - p_{j_s^h}) q_h^i \right) \frac{\partial}{\partial e_{j_s^i}} \\
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\approx j_s)} \sum_h \sum_k q_h^i p_k^h c_{j_s^k} \frac{\partial}{\partial e_{j_s^i}} = \sum_{j_s} \sum_{i(\approx j_s)} c_{j_s^i} \frac{\partial}{\partial e_{j_s^i}} = c.
\end{aligned}$$

6 Soit M une variété différentiable dont les cartes locales $\varphi_{U_\alpha}(\alpha \in \mathcal{A})$ sont des applications topologiques de $U_\alpha \subset M$ dans S ([1], p. 10). Prenons un point $\xi \in M$. Il existe un U_α contenant ξ . Soient

$$\sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} \xi, \quad S(\sigma_0) = A_h \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m} \quad (h < i_1 < \dots < i_m)$$

et T_h la transformation projective normale qui permute A_h avec A_i , U_{hi} avec U_{ih} et qui laisse invariant les autres sommets ainsi que les autres points d'unité du repère \mathcal{A} . On peut prendre un cube projectif $\mathcal{E}(u_0, \lambda)$ contenu dans $T_h \varphi_{U_\alpha}(U_\alpha)$ ($u_0 = T_h \sigma_0$). Soit $V_\xi = (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathcal{E}(u_0, \lambda)$. Prenons un point $x \in V_\xi$. Soient u^i ($i \in I$) les coordonnées du point $T_h \varphi_{U_\alpha} x$. On a $u^i > 0$ d'après la convention mentionnée plus haut. On prend les u^i ($i \in I' = I - \{i\}$) comme coordonnées locales du point x . Considérons l'ensemble F des fonctions réelles différentiables définies dans V_ξ . Pour une fonction $f \in F$ il existe une fonction différentiable $f^*(\dots, u^i, \dots)$ définie dans $\mathcal{E}(u_0, \lambda)$ telle que

$$f(x) = f^*(\dots, u^i(x), \dots).$$

Soit $\frac{\partial}{\partial u^i}$ l'application qui fait correspondre le nombre réel

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial u^i} \right)_{u(x)}$$

au couple (x, f) . L'ensemble $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) (i \in I') \right)$ engendre un espace vectoriel T_x

qui se nomme l'espace tangent à M en point x ([1], p. 11).

7 Nous pouvons toujours supposer que l'ensemble des domaines de cartes locales possède un bon ordre et que l'ensemble d'indices α lui est équipotent. Alors, l'ensemble des indices pour les domaines qui contiennent un point $\xi \in M$ étant une partie de α , il admet un élément α le plus petit. Soit $\xi \in (U_\alpha \cap U_\beta)$ et

$$V_\xi = (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathbb{G}(u_0, \lambda) \cap (T_h' \varphi_{U_\beta})^{-1} \mathbb{G}(v_0, \mu).$$

Les deux systèmes $((u^i), (v^j) \ (i, j \in I'))$ de coordonnées locales d'un point $x \in V_\xi$, qui sont les coordonnées normales de $u = T_h \varphi_{U_\alpha} x$, $v = T_h' \varphi_{U_\beta} x$ se relient au moyen d'equations de la forme

$$(7.1) \quad w^j = \Gamma^j(\dots, u^i, \dots), \quad u^i = \Phi^i(\dots, v^j, \dots).$$

Posons

$$\Gamma_j^h = \frac{\partial \Gamma^h}{\partial u^j}, \quad \Phi_j^k = \frac{\partial \Phi^k}{\partial v^j}.$$

D'après l'hypothèse de ce que la variété M est différentiable nous avons, un indice j une fois fixé,

$$(7.2) \quad \Gamma_j^h = 0, \quad \Phi_j^k = 0$$

sauf pour un nombre fini des indices $h, k \in I'$ ([1], p. 13). Nous avons aussi ([3], p. 8; [4] p. 13).

$$(7.3) \quad \sum_s \Gamma_s^i \Phi_j^s = \sum_s \Phi_s^i \Gamma_j^s = \delta_j^i,$$

$$(7.4) \quad \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_s \Phi_j^s \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_s \Gamma_s^i \frac{\partial}{\partial v^s}.$$

Soient $\chi_{\alpha, x}$ et $\chi_{\beta, x}$ les bijections $Y_i \rightarrow T_x$ qui fait correspondre respectivement les vecteurs tangents

$$\sum_s z^s \frac{\partial}{\partial u^s} \quad \text{et} \quad \sum_s \frac{z^s}{\sum_m |\Phi_s^m|} \frac{\partial}{\partial v^s}$$

au vecteur $\alpha(z) \in Y_i$. La composée $g_{\beta\alpha} = \chi_{\beta, x}^{-1} \chi_{\alpha, x}$ devient un automorphisme $Y_i \rightarrow Y_i$. Soit $g_{\beta\alpha} \alpha(z) = b(z')$. Il vient alors, grâce à (7.4)

$$\begin{aligned} \chi_{\beta, x} b(z') &= \sum_s \frac{z'^s}{\sum_m |\Phi_s^m|} \frac{\partial}{\partial v^s} \\ &= \chi_{\alpha, x} \alpha(z) = \sum_r z^r \frac{\partial}{\partial u^r} = \sum_r \left(\sum_s z^r \Gamma_r^s \frac{\partial}{\partial v^s} \right), \end{aligned}$$

où la sommation \sum_r est étendue à un nombre fini des indices r et pour chacun de ces indices r la sommation \sum_s est étendue, d'après (7.2), à un nombre fini des indices s de sorte qu'on peut échanger l'ordre de ces sommations. Ainsi l'automorphisme $g_{\beta\alpha}$ s'exprime par

$$(7.5) \quad z'^i = \sum_j p_j^i z^j,$$

où

$$(7.6) \quad p_j^i = \sum_m |\Phi_i^m| \Gamma_j^i.$$

On peut donc regarder $g_{\beta\alpha}$ comme une transformation projective qui applique, dans \mathbb{C} , le point $(0, z')$ sur le point $(0, z'^i)$.

Si l'on pose

$$(7.7) \quad q_i^j = \frac{\phi_i^j}{\sum_m |\phi_i^m|}$$

on a, grâce à (7.3),

$$\sum_s q_s^i p_j^s = \sum_s \phi_s^i \Gamma_j^s = \delta_j^i.$$

Au moyen de cette relation on tire de (7.6)

$$\sum_s q_s^k z'^s = z^k$$

ce qui exprime l'inverse $g_{\alpha\beta}$ de la transformation $g_{\beta\alpha}$ donnée par (7.5). Or, on a

$$\sum_k |q_i^k| = \sum_k \left| \frac{\phi_i^k}{\sum_m |\phi_i^m|} \right| = \frac{\sum_k |\phi_i^k|}{\sum_m |\phi_i^m|} = 1 \quad (i \in I').$$

On peut donc regarder $g_{\alpha\beta}$ comme une transformation projective appartenant à G_i . Il en est donc de même pour $g_{\beta\alpha}$.

Envisageons ensuite deux cartes locales dont les domaines U_{β} et U_{γ} contiennent ξ . Soit

$$W_{\xi} = (T_h \varphi_{U_{\alpha}})^{-1} \mathcal{U}(u_0, \lambda) \cap (T_{h'} \varphi_{U_{\beta}})^{-1} \mathcal{U}(v_0, \mu) \cap (T_{h''} \varphi_{U_{\gamma}})^{-1} \mathcal{U}(w_0, v).$$

Il existe alors la relation de la forme

$$u^i = \bar{\Psi}^i(\dots, w^k, \dots) \quad (w \in T_{h''} \varphi_{U_{\gamma}} x),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial w^k} = \sum_s \bar{\Psi}_k^s \frac{\partial}{\partial u^s} \quad \left(\bar{\Psi}_k^i = \frac{\partial \bar{\Psi}^i}{\partial w^k} \right).$$

Soit χ_{γ}, x la bijection $Y_i \rightarrow T_x$ qui fait correspondre le vecteur tangent

$$\sum_s \frac{z'^s}{\sum_m |\bar{\Psi}_s^m|} \frac{\partial}{\partial w^s}$$

au vecteur $\alpha(z) \in Y_i$ (lorsque $\gamma = \alpha$ on a $u^i = w^i$, $\bar{\Psi}_k^i = \delta_k^i$, $\sum_m |\bar{\Psi}_k^m| = 1$). On a alors

$$g_{\gamma\beta} = \chi_{\gamma}, x^{-1} \chi_{\beta}, x = \chi_{\gamma}, x^{-1} \chi_{\alpha}, x \chi_{\alpha}, x^{-1} \chi_{\beta}, x = g_{\gamma\alpha} g_{\alpha\beta}.$$

On peut donc regarder $g_{\gamma\beta}$ comme un élément de G_i .

8 Envisageons, sur M , un chemin $x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$. Comme ce chemin est compact nous pouvons extraire de son recouvrement ouvert $((V_{\xi}) \ (\xi \in M))$ un recouvrement fini de sorte que nous obtenons une subdivision de $x(t)$ en parties de nombre fini dont chacune $x_{\alpha}(t)$ ($t_{\alpha} \leq t \leq t_{\alpha+1}$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < 1$) est contenue dans $V_{\xi(\alpha)} \subset U_{\alpha(\alpha)} \cap U_{\beta(\alpha)}$. Supposons maintenant que chaque chemin $x_{\alpha}(t)$ est régulier. D'une manière précise, les u^i ($i \in I'$) étant les coordonnées locales de $x \in V_{\xi(\alpha)}$, on suppose que les fonctions $u^i(t)$ sont continuellement différentiables et que pour chaque valeur $k \in [t_{\alpha}, t_{\alpha+1}]$ la borne inférieure de $|u'^i(k)| \neq 0$

est positive, à moins que les $u'^i(k)$ ne soient tous nuls. Dans ce cas les $u'^i(k)$ s'annulent sauf pour un nombre fini des indices i ([4], p. 8).

En portant $u^i(t)$ ($t \in [t_a, t_{a+1}]$) à (7.6), on obtient, sur G_i , un chemin $p_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$). Maintenant en supposant que les p_j^i sont continuellement différentiables posons

$$\frac{\partial p_j^i}{\partial u^r} = p_{jr}^i, \quad \sum_r p_{jr}^i u'^r(t) = (p_j^i)'(t).$$

D'après ce que nous venons de remarquer, la sommation \sum_r est étendue à un nombre fini des indices s .

Le chemin $p_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$) est dit régulier si, l'indice j une fois fixé, pour chaque valeur $k \in [t_a, t_{a+1}]$ la borne inférieure ρ de

$$((p_j^i)'(k) \neq 0 \quad (i \in I'))$$

est positif à moins que les $(p_j^i)'(k)$ ne soient tous nuls. Dans ce cas, l'indice j une fois fixé, les $(p_j^i)'(k)$ s'annulent sauf pour un nombre fini des indices i . En effet les $p_j^i(t)$ étant continuellement différentiables dans $[t_a, t_{a+1}]$ par l'hypothèse il existe, pour un nombre positif ϵ donné à l'avance, un nombre positif δ telle que

$$|t'' - t'| < \delta \implies |(p_j^i)(t'') - (p_j^i)(t')| < \epsilon \quad (t', t'' \in [t_a, t_{a+1}]).$$

Donc, l'indice j une fois fixé, on a un nombre positif δ tel que, pour tout indice i satisfaisant à $(p_j^i)'(k) \neq 0$,

$$|t - k| < \delta \implies |(p_j^i)'(t) - (p_j^i)'(k)| < \frac{\rho}{2} \implies |(p_j^i)'(t)| > \frac{\rho}{2}.$$

Or,

$$p_j^i(\dots, u^r(t), \dots) - p_j^i(\dots, u^r(k), \dots) = (t - k)(p_j^i)'(t_1),$$

où t_1 est un nombre entre t et k . D'ailleurs, grâce à (7.2), on a $p_j^i(t) - p_j^i(k) = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i , une fois que l'indice j soit fixé. Il faut donc qu'il en soit de même pour $(p_j^i)'(k)$.

Pour que cela arrive indépendamment du choix de chemin $x(t)$, de sous-chemin $x_a(t)$ et de valeur k , il faut et il suffit qu'un couple $(j, r) \in I' \times I'$ une fois fixé, les dérivées du second ordre Γ_{jr}^i et Φ_{jr}^i s'annulent sauf pour un nombre fini des indices i . Lorsque cette condition est vérifiée indépendamment du choix de $\xi \in M$ et de $U_\xi \ni \xi$ la variété M est dite deux fois différentiable.

Associions maintenant à chaque valeur $k \in [t_a, t_{a+1}]$, non seulement le point $p(k)$, mais aussi un voisinage élémentaire

$$\mathfrak{U}_{p(k)} = U_{(p(k), j_1(k))} \cap \dots \cap U_{(p(k), j_l(k))}$$

de $p(k)$ et considérons, étant donné une fonction différentiable $f(t)$ définie dans G_i , sa restriction \tilde{f} sur $\mathfrak{U}_{p(k)}$. Posons

$$\tilde{f}'(t) = \tilde{f}(p(t)).$$

Si la variété M est deux fois différentiable, comme nous le supposons désormais, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\tilde{f}'}{dt}\right)_k &= \left(\frac{d}{dt}\tilde{f}^*(\dots, p_{j_s}^t(\dots, u^r(t), \dots), \dots)\right)_k \\
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(p, j_s))} (p_{j_s}^t)'(k) \left(\frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial \xi_{j_s}^i}\right)_{\xi=p(k)} \\
&= \sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(p, j_s))} (p_{j_s}^t)'(k) \left(\frac{\partial}{\partial p_{j_s}^i}(p, \mathbb{U}_p, f)\right)_k,
\end{aligned}$$

où la sommation \sum_{j_s} est étendue à $(j_1(k), \dots, j_i(k))$ tandis que la sommation \sum_i est étendue à un nombre des indices $i(\neq i_0(p(k), j_s(k)))$. Or, si l'on regarde l'intervalle $[0, 1]$ comme une variété différentiable, tout vecteur tangent à cette variété s'exprime sous la forme $\lambda \frac{d}{dt}$. Ainsi la différentielle de l'application

$$k \in [t_a, t_{a+1}] \longrightarrow (p(k), \mathbb{U}_{p(k)})$$

obténue par l'association susdite applique $\lambda \frac{d}{dt}$ sur le vecteur tangent

$$\lambda \sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(p, j_s))} (p_{j_s}^t)'(k) \frac{\partial}{\partial p_{j_s}^i}$$

à G , en point $p(k)$. Celui-ci se nomme le vecteur tangent au chemin $p_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$) en ce point.

9 En prenant un élément $y_0 = (y_j^t)_0 \in G$, posons d'abord

$$\eta(t) = L(p_0(t))y_0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Soit

$$y_1 = L(g_{\alpha(1), \alpha(0)}(t_1))y_0.$$

Posons ensuite

$$\eta(t) = L(p_1(t))y_1 \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

et ainsi de suite. On a en générale,

$$(9.1) \quad \eta(t) = L(p_a(t))y_a \quad (t_a \leq t \leq t_{a+1}).$$

$$(9.2) \quad y_a = L(g_{\alpha(a), \alpha(a-1)}(t_a))y_{a-1}.$$

Maintenant en associant à y_a un voisinage élémentaire

$$\mathbb{U}_{y_a} = U_{(y_a, j_1(a))} \cap \dots \cap U_{(y_a, j_l(a))},$$

associons à chaque valeur $k \in [t_a, t_{a+1}]$, non seulement le point $\eta(k)$ mais aussi un voisinage élémentaire

$$\mathbb{U}_{\eta(k)} = U_{(\eta(k), j_1(a))} \cap \dots \cap U_{(\eta(k), j_l(a))}.$$

Soit π l'application $k \in [t_a, t_{a+1}] \longrightarrow (\eta(k), \mathbb{U}_{\eta(k)})$. On a

$$(\eta_{j_s}^t)'(k) = \sum_r (p_r^t)'_a(k) (y_{j_s}^r)_a.$$

D'après le raisonnement mentionnée plus haut, on tire

$$d\pi\left(\lambda \frac{d}{dt}\right) = \lambda \sum_{j_s} \sum_{i(\neq i_0(p, j_s))} (\eta_{j_s}^t)'(k) \frac{\partial}{\partial \eta_{j_s}^i},$$

où la sommation \sum_{j_s} est étendue aux indices $(j_1(a), \dots, j_l(a))$ tandis que pour chaque j_s la sommation \sum_i est étendue à un nombre fini des indices $i(\neq i_0(\eta, j_s))$.

Maintenant, étant donné un nombre positif κ_a moindre que 1, définissons le vecteur tangent le long du chemin $\eta(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$) en faisant

$$\lambda = \frac{\kappa_a}{4(1 + \sum_s \sum_i |(\eta_{js}^i)'(t)|)}.$$

Le vecteur tangent σ en point $\eta(k)$ engendre alors, sur G_s , un champ de vecteur dont la coordonnée s'écrit

$$(9.4) \quad \rho = \sum_{js} \sum_{i(\in j_s)} \rho_{js}^i \frac{\partial}{\partial e_{js}^i} \quad (\rho_{js}^i = \lambda \sum_r (\eta_{js}^r)' \mu_r^i, \quad \mu = \eta^{-1}),$$

grâce à (4.1)" où σ_{js}^h est le signe de η_{js}^h . En effet, comme

$$\sum_i |\eta_{js}^i| = 1, \quad \sum_i \frac{d|\eta_{js}^i|}{dt} = 0$$

on a

$$\sum_{h(\in i_0(\gamma, js))} \left((\eta_{js}^h)' \mu_h^i - \frac{d|\eta_{js}^h|}{dt} \mu_{i_0(\gamma, js)}^i \right) = \sum_r (\eta_{js}^r)' \mu_r^i.$$

On obtient ainsi une bijection de l'intervalle $[t_a, t_{a+1}]$ au chemin ρ sur T_e , satisfaisant à l'inégalité

$$(9.5) \quad \sum_{js} \sum_{i(\in j_s)} |\rho_{js}^i| < \frac{\kappa_a}{4} < \frac{1}{4},$$

car

$$\sum_i \left| \sum_r (\eta_{js}^r)' \mu_r^i \right| \leq \sum_i \left| \sum_r |(\eta_{js}^r)'| |\mu_r^i| \right| = \sum_r |(\eta_{js}^r)'|.$$

10 Envisageons maintenant l'espace fibré principal $B(M, G_s)$, où les fonctions $g_{\tau\beta}$ définies au n° 7 sont prises comme les fonctions de transition. Soit φ_τ l'homéomorphisme local $U_\tau \times G_s \rightarrow (\text{proj.})^{-1}U_\tau$. Reprenons le voisinage $V_{\xi(a)} \subset U_{\alpha(a)} \cap U_{\beta(a)}$ du point $\xi(a) \in M$. L'application $\varphi_{\beta(a)}$ induit, sur l'espace B , un chemin

$$b_0(t) = \varphi_{\beta(a)}(x_0(t), \eta(t)) \quad (0 = t_0 \leq t \leq t_1).$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta(a)}(x_0(t), \eta(t)) &= \varphi_{\beta(a)}(x_0(t) \times L(p_0(t))y_0) \\ &= \varphi_{\beta(a)}(x_0(t), (g_{\beta(a), \alpha(a)}(t))y_0) \\ &= \varphi_{\alpha(a)}(x_0(t), y_0). \end{aligned}$$

De même, l'application $\varphi_{\beta(1)}$ induit

$$b_1(t) = \varphi_{\beta(1)}(x_1(t), \eta(t)) = \varphi_{\alpha(1)}(x_1(t), y_1) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

et ainsi de suite. En vertu de (9.2), on a

$$b_0(t_1) = b_1(t_1),$$

en générale,

$$b_a(t_{a+1}) = b_{a+1}(t_{a+1}).$$

Nous obtenons ainsi, sur B , un chemin $b(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) continu et différentiable par morceau, qui se trouve au dessus du chemin $x(t) \subset M$.

L'homéomorphisme $d\varphi_{\beta(a), x_a(t)}$ applique le vecteur tangent σ en point $\eta(k)$ sur le vecteur tangent θ au chemin $b_a(t)$ ($t_a \leq t \leq t_{a+1}$) en point $b_a(k)$ tandis que l'homéomorphisme $d(\varphi_{a(a), x_a(t)})^{-1}$ applique θ sur un vecteur tangent τ à G_i en point y_a . D'après (9.1) les vecteurs σ et τ engendrent, sur G_i le même champ de vecteurs. Autrement dit, l'homéomorphisme $d(\varphi_{a(a), x_a(t)})^{-1}$ applique θ sur un vecteur générateur du champ de vecteurs dont la coordonnée est donnée par (9.4). Le vecteur tangent le long du chemin $b_a(t) = \varphi_{a(a)}(x_a(t), y_a)$ engendre donc un chemin $\rho(t)$ sur $T(e)$ satisfaisant à l'inégalité (9.5). C'est le chemin dont l'existence s'est énoncé au début.

Références

- [1] J. Kanitani. Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ. (Hino City, Tokyo, Japan), No. 5 (Science and Engineering), 1970, pp. 1—13.
- [2] J. Kanitani. Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 6 (Science and Engineering), 1971, pp. 1—14.
- [3] J. Kanitani. Sur l'espace fibré tensoriel à une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No. 9 (Science and Engineering), 1973, pp. 1—16.
- [4] J. Kanitani. Sur les champs de vecteurs au dessus d'une variété différentiable admettant les homéomorphismes locaux à l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin Meisei Univ., No. 10 (Science and Engineering), 1974, pp. 1—13.
- [5] J. Kanitani. Sur l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles aux fonctions inconnues de nombre infini. Jour. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, No. 1, 1976, pp. 123—136.