

相異なる物質の二つの 部分より成る円板の熱伝導¹⁾

小 平 吉 男*

Conduction of Heat in a Thin Circular Disc Composed of Two Parts with Different Physical Constants

by *Yoshio KODAIRA*

We consider a thin circular disc composed of two parts with different physical constants: the inner circular disc of radius a_1 and the other circular ring of radii a_1 and a as shown in Fig. 1. To all physical constants for the inner circular disc we attach a suffix 1, and to those for the outer ring a suffix 2.

We assume that heat escapes from the circular disc proportionally to the difference of the temperature of the disc and that of the surrounding air which is supposed to be zero. The differential equations for the conduction of heat are given by (1) and (2) for the two parts respectively, κ_1^2 and κ_2^2 being the diffusivities and c_1^2 and c_2^2 are the proportionality constants of the heat escape from the surfaces. The boundary conditions at the boundary $r=a_1$ are given by (3) and (4), where k_1 and k_2 are the conductivities. The initial conditions are given by (5) and (6), where $f_1(r)$ and $f_2(r)$ are two arbitrary functions of r .

We consider here two cases. In case I we take the condition (7), which implies that the temperature at the outer boundary $r=a$ is zero.

The solutions of the differential equations (1) and (2) are given in the form (8) and (9), where A_{a_1} and B_{a_1} are two integration constants of the differential equation (1) which may include α_1 , and C_{a_2} and D_{a_2} are two integration constants of the differential equation (2), which may include α_2 . $J_0(\kappa_2\alpha_1r)$, $J_1(\kappa_2\alpha_1r)$, $J_0(\kappa_1\alpha_2r)$ and $J_1(\kappa_1\alpha_2r)$ are Bessel functions and $Y_0(\kappa_1\alpha_2r)$ and $Y_1(\kappa_1\alpha_2r)$ are Neumann functions.

Putting the time factors in (1) and (2) equal, we get the condition (10).

Inserting the boundary conditions (3), (4), (7) in (8) and (9) we get (16). From

* 理工学部物理学科教授 物理数学

1) この論文は本学第8期生森英一君が著者の指導の下に行った卒業論文の不適當な点を正し、体裁を整えたものである

(10) and (16) we can determine eigenvalues $\kappa_2\alpha_1$ and $\kappa_1\alpha_2$. If we draw the graphs (10) and (16) taking α_1 and α_2 as the coordinates, we get the intersections of these two curves as shown in Fig. 2. These intersections determine α_1 and α_2 satisfying (10) and (16). We denote the s th positive roots of α_1 and α_2 as $\alpha_{1,s}$ and $\alpha_{2,s}$, from which we can calculate the eigenvalues $\kappa_2\alpha_{1,s}$ and $\kappa_1\alpha_{2,s}$.

By using these eigenvalues, the eigenfunctions $X_{1,s}(r)$ and $X_{2,s}(r)$ are given by (22) and (23).

The expansions of the arbitrary functions in series of eigenfunctions are obtained in the form (44) and (45), where $V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$ is given by (42).

Using these expansions, the solution of the problem is given by the expressions (46) and (47).

Next we consider the second case II in which the boundary condition at $r=a$ is given by (48). This means that the heat supplied from the outer boundary of the ring raises the temperature of the thin film on the boundary.

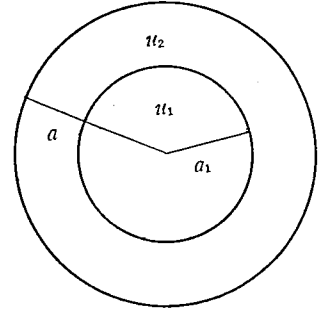
The other conditions are same as in case I.

In this case the values of α_1 and α_2 are calculated by (10) and (50). These two curves are shown in Fig. 3. The intersections of these curves give the values of α_1 and α_2 , which determine the eigenvalues of the problem. Denoting the s th positive roots of α_1 and α_2 by $\alpha_{1,s}$ and $\alpha_{2,s}$ respectively, we get the eigenfunctions $X_{1,s}(r)$ and $X_{2,s}(r)$ given by (56) and (57).

The expansions of the two arbitrary functions $f_1(r)$ and $f_2(r)$ are given by (73) and (74), where $u_n(r, s)$ is given by (60) and $U(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$ by (72).

The solution of the problem is given by (75) and (76).

半径 a の薄い円板があり、その中の半径 a_1 なる部分が他の物質より成っているとする (図 1)。半径 a_1 までの部分は 1 なる物質、半径 a_1 から a までの間は 2 なる物質より成るとし、これらの物質に関する物理的の量には脚符に 1 又は 2 を附けて、夫々それらの量に対するものであることを示すこととする。温度を u_1, u_2 を以て表わし、板の両面から板の温度に比例する熱の放散があるとすれば、二つの部分に対する熱伝導の微分方程式は



第 1 図 Fig. 1

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - c_1^2 u_1, [0 < r < a_1], \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - c_2^2 u_2, [a_1 < r < a] \quad \dots\dots\dots (2)$$

の如く書くことができる。温度は平面内の極座標 r, θ を用いて表わしているの、(1), (2) は温度は θ 方向には無関係であると仮定している。 t は時間、 κ_1^2, κ_2^2 は熱拡散係数、 c_1^2, c_2^2 は熱の放散の度合を示す常数である。

二つの物質の境界 $r=a_1$ においては

$$(u_1)_{r=a_1}=(u_2)_{r=a_1}, \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=a_1} = k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=a_1} \quad \dots\dots\dots(4)$$

なる境界条件が成立するとする。 k_1, k_2 は二つの物質に対する熱伝導度である。又初期条件としては、次の如く与えられるとする：

$$(u_1)_{t=0}=f_1(r), \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(u_2)_{t=0}=f_2(r). \quad \dots\dots\dots(6)$$

この論文では二つの問題を取扱うこととする。

問題 I 先づ第一の問題として $r=a_1$ なる境界に於ける温度は 0 であるとし、

$$(u_2)_{r=a}=0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

とする。

偏微分方程式 (1), (2) の特解は

$$u_1 = e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1^2)t} \{A_{\alpha_1} J_0(\kappa_2 \alpha_1 r) + B_{\alpha_1} Y_0(\kappa_2 \alpha_1 r)\}, \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$u_2 = e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2)t} \{C_{\alpha_2} J_0(\kappa_1 \alpha_2 r) + D_{\alpha_2} Y_0(\kappa_1 \alpha_2 r)\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

なる形に書ける。 α_1, α_2 は境界条件から決定される固有値、 $J_0(\kappa_2 \alpha_1 r)$, $J_0(\kappa_1 \alpha_2 r)$ は 0 次の Bessel 関数、 $Y_0(\kappa_2 \alpha_1 r)$, $Y_0(\kappa_1 \alpha_2 r)$ は 0 次の Neumann 関数を表わし、 A_{α_1} , B_{α_1} , C_{α_2} , D_{α_2} は夫々 α_1, α_2 を含む積分常数である。

u_1 は $r=0$ で有限でなくてはならないから、(8) において $B_{\alpha_1}=0$ でなくてはならない。

境界条件は如何なる時刻に対しても成立すべき条件であるから、(8), (9) に於ける時を含む係数が同じでなくてはならない、即ち

$$c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1^2 = c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

が成立する。

境界条件 (7) から

$$C_{\alpha_2} J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + D_{\alpha_2} Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) = 0$$

が成立しなくてはならない。これは新しい定数 E_{α_2} を用いて

$$C_{\alpha_2} = \frac{E_{\alpha_2}}{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)}, \quad D_{\alpha_2} = -\frac{E_{\alpha_2}}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} \quad \dots\dots\dots(11)$$

と置けば、満足される。

$B_{\alpha_1}=0$, 及び (11) により (8), (9) は

$$u_1 = A_{\alpha_1} e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1^2)t} J_0(\kappa_2 \alpha_1 r), \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$u_2 = E_{\alpha_2} e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2)t} \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2 r)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 r)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right) \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。

境界条件 (3), (4) は $J_0'(x) = -J_1(x)$, $Y_0'(x) = -Y_1(x)$ なる関係を用いて

$$A_{\alpha_1} J_0(\kappa_2 \alpha_1 a) = E_{\alpha_2} \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right), \quad \dots\dots\dots(14)$$

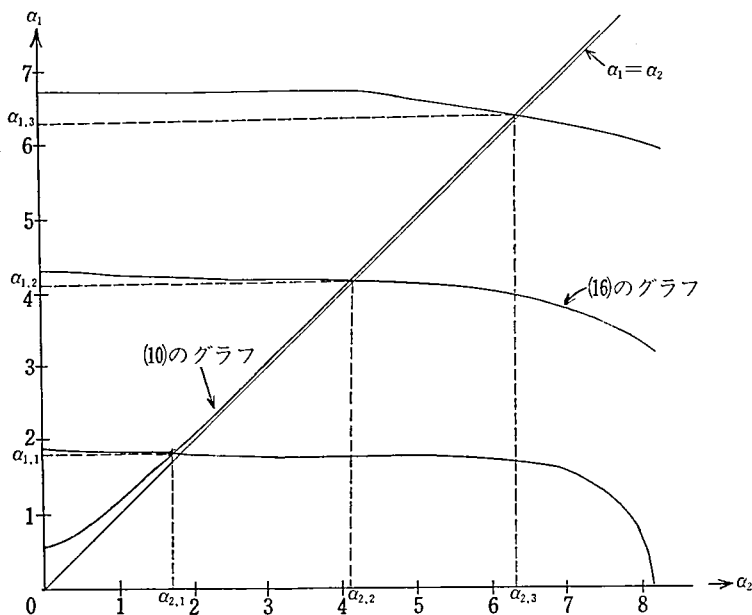
$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 A_{\alpha_1} J_1(\kappa_2 \alpha_1 a) = k_2 \kappa_1 \alpha_2 E_{\alpha_2} \left(\frac{J_1(\kappa_1 \alpha_2 a)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

と書ける。これら二つの関係から

$$k_1 k_2 \alpha_1 \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_1 a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_1 a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_2 \frac{\frac{J_1(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)}}{\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a)}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。

この式から固有値 $\kappa_2 \alpha_1$, $\kappa_1 \alpha_2$ が決定される。(16) においては $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ もあり得る際が、この前の論文²⁾ において示したように、このような場合を考える必要はない。この場合を除き α_1 , α_2 の凡その値を示す図を作ってみると第2図のようになる。(10) は双曲線である。(16) は複雑な曲線であるが、同じような形の曲線が何個も原点を取巻いている。これら二曲線の交点から α_1 , α_2 が決定される。このような正根は無限に多くあることが分るであろう。(図には $k_1=1$, $k_2=2$, $\kappa_1=1$, $\kappa_2=1.2$, $a_1=1$, $a=1.2$, $c_1=1$, $c_2=1.2$ としてある。)



第2図 Fig. 2

(10) と (16) とから得られる α_1 , α_2 の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを夫々 $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ と書くこととすれば, u_1 , u_2 は次のように書かれる:

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} A_{\alpha_1, s} e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{1, s}^2) t} J_0(\kappa_2 \alpha_{1, s} r), \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} D_{\alpha_2, s} e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2, s}^2) t} \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} r)}{J_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} r)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} a)} \right). \quad \dots\dots\dots (18)$$

境界条件(3)から得られる関係により,

$$A_{\alpha_1, s} J_0(\kappa_2 \alpha_{1, s} a_1) = D_{\alpha_2, s} \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2, s} a)} \right) \equiv M_s \quad \dots\dots\dots (19)$$

2) 小平吉男: 相異なる物質の二つの部分より成る円柱の熱伝導, 第4頁参照, 明星大学研究紀要(理工学部)第12号, 1頁-14頁, 昭和51年1月

とおく。これより

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1, s^2)t} \frac{J_0(\kappa_2 \alpha_1, s r)}{J_0(\kappa_2 \alpha_1, s a_1)}, \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2)t} \frac{\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)}}{\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

と書くことができる。

更に又

$$\frac{J_0(\kappa_2 \alpha_1, s r)}{J_0(\kappa_2 \alpha_1, s a_1)} = X_{1,s}(r), \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\frac{\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)}}{\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)}} = X_{2,s}(r) \quad \dots\dots\dots(23)$$

と置くと、境界条件を満足する微分方程式(1), (2)は次のように書かれる:

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1, s^2)t} X_{1,s}(r), \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2)t} X_{2,s}(r). \quad \dots\dots\dots(25)$$

(24), (25)に夫々初期条件(5), (6)を入れると

$$f_1(r) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{1,s}(r), \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$f_2(r) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{2,s}(r) \quad \dots\dots\dots(27)$$

となる。 M_s は(26), (27)を満足するように決定されなくてはならない。 M_s を決めるには m を正の整数とし(26)に $k_1 \kappa_2^2 X_{1,m}(r)r$ を掛けて 0 から a_1 まで積分したものに(27)に $k_2 \kappa_1^2 X_{2,m}(r)r$ を掛けて a_1 から a まで積分したものを加え合わせる:

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(r) X_{2,m}(r) r dr \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr \right). \quad \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

尚

$$\frac{J_n(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_n(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} = u_n(r, s) \quad \dots\dots\dots(29)$$

の如く書くことをすれば,

$$\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} = u_0(a_1, s), \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\frac{J_1(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_1(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a)} = u_1(a_1, s) \quad \dots\dots\dots(31)$$

となる。又(16)の α_1, α_2 の代りに $\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}$ を入れたものは

$$k_1 \kappa_2 \alpha_{1,s} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_{2,s} \frac{u_1(a_1, s)}{u_0(a_1, s)} \quad \dots\dots\dots(32)$$

と書かれ,

$$X_{2,s}(r) = \frac{u_0(r,s)}{u_0(a,s)} \quad \dots\dots\dots(33)$$

と書くことができる。

まづ $s \neq m$ とする

$$\int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr = \frac{1}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} \alpha_1) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)} \int_0^{a_1} J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) r dr$$

となる。 $C_n(\alpha x)$, $Z_n(\beta x)$ を円柱関数とすれば

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int x C_n(\alpha x) Z_n(\beta x) dx = \beta x C_n(\alpha x) Z_{n-1}(\beta x) - \alpha x C_{n-1}(\alpha x) Z_n(\beta x) \quad \dots\dots\dots(34)$$

なる関係がある。これに $J_{-1}(x) = -J_1(x)$, $J_1(0) = 0$ であることを考慮に入れると

$$\begin{aligned} & \int_0^{a_1} J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) r dr \\ &= \frac{\left[\kappa_2 \alpha_{1,m} r J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_{-1}(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) - \kappa_2 \alpha_{1,s} r J_{-1}(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) \right]_0^{a_1}}{\kappa_2^2 (\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2)} \\ &= \frac{\left[-\kappa_2 \alpha_{1,m} r J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) + \kappa_2 \alpha_{1,s} r J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) \right]_0^{a_1}}{\kappa_2^2 (\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2)} \\ &= \frac{-\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1 J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1) + \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)}{\kappa_2^2 (\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2)} \end{aligned}$$

となる。次に

$$\int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr = \frac{1}{u_0(a,s) u_0(a,m)} \int_{a_1}^a u_0(r,s) u_0(r,m) r dr$$

を計算する。

$$u_0(r,s) = \frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} r)}{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} r)}{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)}$$

であるから, $u_0(a,s) = 0$ である。同様に $u_0(a,m) = 0$ であることも容易にわかるであらう。

$J_{-1}(x) = -J_1(x)$, $Y_{-1}(x) = -Y_1(x)$ であるから $u_{-1}(r,s) = -u_1(r,s)$ が成立する。

これらの関係により

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^a u_0(r,s) u_0(r,m) r dr \\ &= \frac{\left[\kappa_1 \alpha_{2,m} r u_0(r,s) u_{-1}(r,m) - \kappa_1 \alpha_{2,s} r u_{-1}(r,s) u_0(r,m) \right]_{a_1}^a}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \\ &= \frac{\left[\kappa_1 \alpha_{2,m} r u_0(r,s) u_1(r,m) + \kappa_1 \alpha_{2,s} r u_1(r,s) u_0(r,m) \right]_{a_1}^a}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \\ &= \frac{\kappa_1 \alpha_{2,m} a_1 u_0(a,s) u_1(a_1, m) - \kappa_1 \alpha_{2,s} a_1 u_1(a_1, s) u_0(a_1, m)}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \end{aligned}$$

となる。以上の計算により

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr \\ &= \frac{a_1}{\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2} \left(-k_1 \kappa_2 \alpha_{1,m} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)} + k_1 \kappa_2 \alpha_{1,s} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)} \right) \\ & \quad + \frac{a_1}{\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2} \left(k_2 \kappa_1 \alpha_{2,m} \frac{u_1(a_1, m)}{u_0(a_1, m)} - k_2 \kappa_1 \alpha_{2,s} \frac{u_1(a_1, s)}{u_0(a_1, s)} \right) \quad \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

となる。然るに(10)から

$$\begin{aligned} c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{1,s}^2 &= c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2, \\ c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{1,m}^2 &= c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,m}^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2 = \alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2 \quad \dots\dots\dots(36)$$

である。又(32)から

$$k_1 \kappa_2 \alpha_{1,s} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{2,s} a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_{2,s} \frac{u_1(a_1, s)}{u_0(a_1, s)}, \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$k_1 \kappa_2 \alpha_{1,m} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)}{J_0(\kappa_1 \alpha_{1,m} a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_{2,m} \frac{u_1(a_1, m)}{u_0(a_1, m)} \quad \dots\dots\dots(38)$$

なる関係が成立することが分る。(36), (37), (38)により(35)の右辺は0となる。即ち $s \neq m$ の場合には,

$$k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr = 0 \quad \dots\dots\dots(39)$$

であることが言われる。

次に $s = m$ の場合を考える。

$$\int_0^{a_1} X_{1,m}^2(r) r dr = \frac{1}{\{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \int_0^{a_1} \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r)\}^2 r dr$$

である。一般に

$$\int x \{C_n(\alpha x)\}^2 dx = \frac{x^2}{2} \left[\{C_n'(\alpha x)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right) \{C_n(\alpha x)\}^2 \right] \quad \dots\dots\dots(40)$$

であるので、今の場合 $x=r$, $n=0$, $C_0(\alpha x) = J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r)$ とすれば,

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} X_{1,m}^2(r) r dr &= \frac{1}{\{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \left[\frac{r}{2} \{ \{J_0'(\kappa_2 \alpha_{1,m} r)\}^2 + \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r)\}^2 \} \right]_0^{a_1} \\ &= \frac{1}{\{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \frac{a_1^2}{2} \left[\{J_0'(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 + \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 \right] \end{aligned}$$

が得られる。同様に $u_0(a, m) = 0$ なることを考慮に入れて

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^a X_{2,m}^2(r) r dr &= \frac{1}{\{u_0(a, m)\}^2} \int_{a_1}^a \{u_0(r, m)\}^2 r dr \\ &= \frac{1}{\{u_0(a, m)\}^2} \left[\frac{r^2}{2} \{ \{u_0'(r, m)\}^2 + \{u_0(r, m)\}^2 \} \right]_{a_1}^a \\ &= \frac{1}{\{u_0(a, m)\}^2} \left[\frac{a^2}{2} \{u_0'(a, m)\}^2 - \frac{a_1^2}{2} \{ \{u_0'(a, m)\}^2 + \{u_0'(a, m)\}^2 \} \right] \end{aligned}$$

が得られる。上の計算により $s = m$ の場合には $J_0'(x) = -J_1(x)$, $u_0'(a, x) = -u_1(a, x)$ なることを考慮に入れて

$$\begin{aligned} &k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,m}^2(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,m}^2(r) r dr \\ &= \frac{k_1 \kappa_2^2 a_1^2}{2 \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \left[\{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 + \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 \right] \\ &\quad + \frac{k_2 \kappa_1^2}{2 \{u_0(a, m)\}^2} \left[a^2 \{u_1(a, m)\}^2 - a_1^2 \{ \{u_1(a, m)\}^2 + \{u_0(a, m)\}^2 \} \right] \quad \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

$$\equiv V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}) \quad \dots\dots\dots(42)$$

なる結果が得られる。(41)の右辺は複雑であるので簡単のために $V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m})$ と書いてある。

上の計算によって(28)は

$$k_1\kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) X_{1,m}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2\kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,m}(\lambda) \lambda d\lambda = M_m V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}) \quad \dots\dots\dots(43)$$

となる。これにより $M_m(m=1, 2, \dots)$ が計算された。

(26), (27) に此処で得られた M_s の値を代入すれば任意の関数 $f_1(r)$, $f_2(r)$ の展開式は次のようになる:

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{1,s}(r) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{X_{1,s}(r)}{V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})} \left(k_1\kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) X_{1,s}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2\kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,s}(\lambda) \lambda d\lambda \right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)} \left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)} \int_0^{a_1} f_1(\lambda) J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda) \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1, s)} \int_{a_1}^a f_2(\lambda) u_0(\lambda, s) \lambda d\lambda \right), \quad \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{2,s}(r) \\ &= \frac{X_{2,s}(r)}{V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})} \left(k_1\kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) X_{1,s}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2\kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,s}(\lambda) \lambda d\lambda \right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u_0(r, s)}{u_0(a_1, s)} \left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)} \int_0^{a_1} f_1(\lambda) J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda) \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1, s)} \int_{a_1}^a f_2(\lambda) u_0(\lambda, s) \lambda d\lambda \right). \quad \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

(44), (45)によって本問題に必要な任意の関数の展開式が得られたから、本問題の解は次のように書かれる:

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-c_1^2 t} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{1,s}^2 t} \frac{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)} \left\{ \frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}a_1)} \int_0^{a_1} f_1(\lambda) J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda) \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2\kappa_1^2}{\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} - \frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}} \int_{a_1}^a f_2(\lambda) \left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} - \frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} \right) \lambda d\lambda \right\}, \quad \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-c_2^2 t} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2 t} \frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} - \frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_{2,s}a_1)} \int_0^{a_1} f_1(\lambda) J_0(\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda) \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2\kappa_1^2}{\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} - \frac{Y_0(\kappa_2\alpha_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)}} \int_{a_1}^a f_2(\lambda) \left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} - \frac{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_{2,s}a)} \right) \lambda d\lambda \right\}. \quad \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

問題Ⅱ 第二の問題として境界条件に時の微係数を含む場合を考える。即ち境界条件(7)の代りとして

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + c \frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots(48)$$

を採る。 c は新しい定数である。微分方程式及び他の境界条件及び初期条件は上の場合と同じであるとする。

微分方程式(2)の解(9)に上の境界条件(48)を入れれば、

$$(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) \{C_{\alpha_2} J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + D_{\alpha_2} Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) \\ - c \kappa_1 \alpha_2 \{C_{\alpha_2} J_0'(\kappa_1 \alpha_2 a) + D_{\alpha_2} Y_0'(\kappa_1 \alpha_2 a)\}\} = 0$$

となる。或はこれは

$$C_{\alpha_2} \{c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2\} J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 J_1(\kappa_1 \alpha_2 a) \\ + D_{\alpha_2} \{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(49)$$

となる。この関係は新しい定数 E_{α_2} を用いて

$$C_{\alpha_2} = \frac{E_{\alpha_2}}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 J_1(\kappa_1 \alpha_2 a)}, \\ D_{\alpha_2} = -\frac{E_{\alpha_2}}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)}$$

と置けば満足される。

上の置き方により境界条件(3), (4)は

$$A_{\alpha_1} J_0(\kappa_2 \alpha_1 a_1) \\ = E_{\alpha_2} \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 J_1(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right. \\ \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right), \quad \dots\dots\dots(50)$$

$$A_{\alpha_1} k_1 \kappa_2 \alpha_1 J_1(\kappa_2 \alpha_1 a_1) \\ = D_{\alpha_2} k_2 \kappa_1 \alpha_2 \left(\frac{J_1(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 J_1(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right. \\ \left. - \frac{Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)} \right) \quad \dots\dots\dots(51)$$

となる。これら2式から

$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_1 a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_1 a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_2 \\ \times \frac{\frac{J_1(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 J_1(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_1(\kappa_2 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)}}{\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 J_1(\kappa_1 \alpha_2 a)} - \frac{Y_0(\kappa_2 \alpha_2 a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2 a) + c \kappa_1 \alpha_2 Y_1(\kappa_1 \alpha_2 a)}} \quad \dots\dots\dots(52)$$

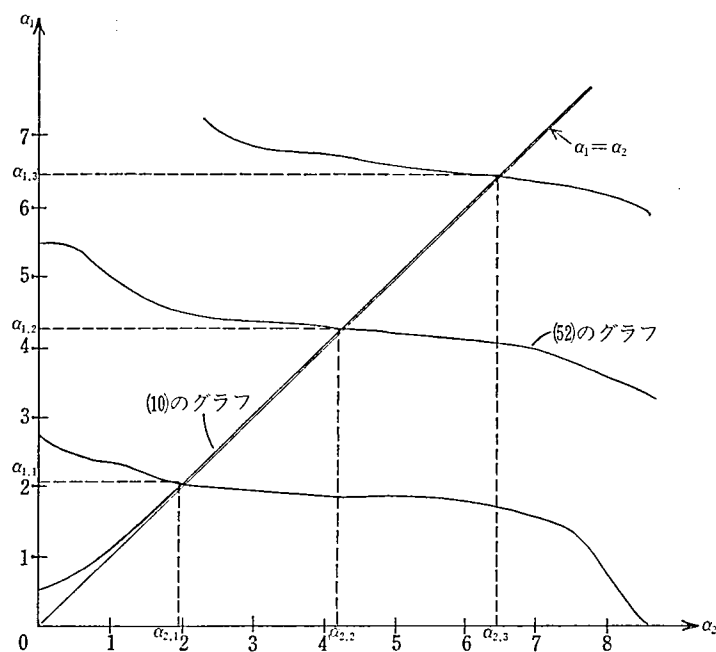
が得られる。

α_1, α_2 は(10)と(52)とから決定される。(10)はIの場合と同様双曲線であるが(52)は複雑な曲線である。第3図にはこれら二曲線が画いてある。これら二曲線の交点として α_1, α_2 は求められる。(図は $k_1=1, k_2=2, \kappa_1=1, \kappa_2=1.2, a_1=1, a_2=1.2, c_2=1, c=1.2, c_1=0.8$ としてある)

図から α_1, α_2 の正根は無数にあることが分る。正根を大きさの順に並べて s 番目のものを $\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}$ と書くこととする。

$\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}$ を用いて境界条件を満足する微分方程式の解を書けば次のようになる:

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} A_{\alpha_{1,s}} e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{1,s}^2) t} J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r), \quad \dots\dots\dots(53)$$



第3図 Fig. 3

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} E_{\alpha_2, s} e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) t} \times \left(\frac{J_0(\kappa_2 \alpha_2, s r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s J_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_2 \alpha_2, s r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s Y_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} \right). \quad (54)$$

境界条件(3)により

$$\begin{aligned} & A_{\alpha_1, s} J_0(\kappa_2 \alpha_1, s a_1) \\ &= E_{\alpha_2, s} \left(\frac{J_0(\kappa_2 \alpha_2, s a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s J_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_2 \alpha_2, s a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s Y_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} \right) \quad (55) \\ &\equiv M_s \end{aligned}$$

となる。この両辺を M_s に等しと置くこととする。更に

$$\begin{aligned} \frac{J_0(\kappa_2 \alpha_1, s r)}{J_0(\kappa_2 \alpha_1, s a_1)} &= X_{1, s}(r), \quad (56) \\ & \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s J_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s Y_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} \right) \\ & \div \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s J_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s Y_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} \right) \\ &= X_{2, s}(r) \quad (57) \end{aligned}$$

と置くこととすれば,

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-(c_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_1, s^2)t} X_{1,s}(r), \quad \dots\dots\dots(58)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2)t} X_{2,s}(r) \quad \dots\dots\dots(59)$$

と書くことができる。

簡単のために

$$\frac{J_n(\kappa_1 \alpha_{2,s} r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} J_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \\ - \frac{Y_n(\kappa_1 \alpha_{2,s} r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} Y_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} = u_n(r, s) \quad \dots\dots\dots(60)$$

と置けば(52)は

$$k_1 \kappa_2 \alpha_{1,s} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{2,s} a_1)} = k_2 \kappa_1 \alpha_{2,s} \frac{u_1(a_1, s)}{u_0(a_1, s)} \quad \dots\dots\dots(61)$$

と書くことができる。又

$$X_{2,s}(r) = \frac{u_0(r, s)}{u_0(a_1, s)} \quad \dots\dots\dots(62)$$

と書ける。

(58), (59)に初期条件(5), (6)を入れれば

$$f_1(r) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{1,s}(r), \quad \dots\dots\dots(63)$$

$$f_2(r) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{2,s}(r) \quad \dots\dots\dots(64)$$

となる。これを満足するように M_s を決定しなくてはならない。

M_s を決定するには I の場合と同様に(63)に $k_1 \kappa_1^2 X_{1,m}(r) r$ を掛けて 0 から a_1 まで積分したものに(64)に $k_2 \kappa_1^2 X_{2,m}(r) r$ を掛けて a_1 から a まで積分したものを加え合わせる:

$$k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(r) X_{2,m}(r) r dr \\ = \sum_{s=1}^{\infty} M_s \left(k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr \right). \quad \dots\dots(65)$$

最初に $s \neq m$ の場合を考える。I の場合と同様にして

$$\int_0^{a_1} J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r) r dr \\ = \frac{-\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1 J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1) + \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)}{\kappa_2^2 (\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2)}, \\ \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr = \frac{1}{u_0(a_1, s) u_0(a_1, m)} \int_{a_1}^a u_0(r, s) u_0(r, m) r dr, \quad \dots\dots\dots(66) \\ \int_{a_1}^a u_0(r, s) u_0(r, m) r dr \\ = \frac{\left[-\kappa_1 \alpha_{2,m} r u_0(r, s) u_1(r, m) + \kappa_1 \alpha_{2,s} r u_1(r, s) u_0(r, m) \right]_{a_1}^a}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \\ = \frac{-\kappa_1 \alpha_{2,m} a \kappa_1 u_0(a, s) u_1(a, m) + \kappa_1 \alpha_{2,s} a u_1(a, s) u_0(a, m)}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)}$$

$$+ \frac{\kappa_1 \alpha_{2,m} a_1 u_0(a_1, s) u_1(a_1, m) - \kappa_1 \alpha_{1,s} a_1 u_1(a_1, s) u_0(a_1, m)}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)}$$

が得られる。

然るに(62)を(59)に代入し、且つ境界条件(48)に入れて考えれば、

$$(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) \frac{u_0(a, s)}{u_0(a_1, s)} + c \kappa_1 \alpha_{2,s} \frac{u_1(a, s)}{u_0(a_1, s)} = 0$$

なる関係の成立することが了解できるので

$$u_1(a, s) = - \frac{c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2}{c \kappa_1 \alpha_{2,s}} u_0(a, s)$$

が得られる。同様に

$$u_1(a, m) = - \frac{c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,m}^2}{c \kappa_1 \alpha_{2,m}} u_0(a, m)$$

が成立することが言われる。

以上の関係により

$$\begin{aligned} & \frac{-\kappa_1 \alpha_{2,m} a u_0(a, s) u_1(a, m) + \kappa_1 \alpha_{2,s} a u_1(a, s) u_0(a_1, m)}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \\ &= \frac{\kappa_1 a}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \{-\alpha_{2,m} u_0(a, s) u_1(a, m) + \alpha_{2,s} u_1(a, s) u_0(a, m)\} \\ &= \frac{\kappa_1 a}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \frac{u_0(a, s) u_0(a, m)}{c \kappa_1} \{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,m}^2) - (c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2)\} \\ &= - \frac{a \kappa_2^2}{c} u_0(a, s) u_0(a, m) \quad \dots\dots\dots (67) \end{aligned}$$

と変形される。

以上の計算により

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr \\ &= \frac{k_1 \kappa_2^2}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)} \frac{1}{\kappa_1^2 (\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2)} \\ & \times \{\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1 J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1) + \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 J_1(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1) J_0(\kappa_1 \alpha_{1,m} a_1)\} \\ & + \frac{k_2 \kappa_1^2}{u_0(a_1, s) u_0(a_1, m)} \frac{1}{\kappa_1^2 (\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2)} \\ & \times \{\kappa_1 \alpha_{2,m} a_1 u_0(a_1, s) u_1(a_1, m) - \kappa_1 \alpha_{2,s} a_1 u_1(a, s) u_0(a, m)\} \\ & - \frac{a k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, s) u_0(a, m)}{u_0(a_1, s) u_0(a_1, m)} \end{aligned}$$

となる。これに I の場合と同様に $\alpha_{1,s}^2 - \alpha_{1,m}^2 = \alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2$ なることを考慮に入れば

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr \\ &= \frac{a_1}{\alpha_{2,s}^2 - \alpha_{2,m}^2} \left\{ - \left(k_1 \kappa_2 \alpha_{1,m} \frac{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)} - k_2 \kappa_1 \alpha_{2,m} \frac{u_1(a_1, m)}{u_0(a_1, m)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(k_1 \kappa_2 \alpha_{1,s} \frac{J_1(\kappa_1 \alpha_{1,s} a_1)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} a_1)} - k_1 \kappa_1 \alpha_{2,s} \frac{u_1(a_1, s)}{u_0(a_1, s)} \right) \right\} \\ & \quad - \frac{a k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, s) u_0(a, m)}{u_0(a_1, m) u_0(a_1, m)} \end{aligned}$$

となる。(61)の関係及びその s を m に変えた関係により最初の二つの中括弧内の式は 0

となり, 最後に

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,s}(r) X_{1,m}(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,s}(r) X_{2,m}(r) r dr \\ &= -\frac{a \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, s) u_0(a, m)}{u_0(a_1, s) u_0(a_1, m)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (68)$$

が得られる。

次に $s=m$ の場合に移る。

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} X_{1,m}^2(r) r dr &= \frac{1}{\{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \int_0^{a_1} \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r)\}^2 r dr \\ &= \frac{1}{\{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \left[\frac{r^2}{2} \{(J_0'(\kappa_2 \alpha_{1,m} r))^2 + (J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} r))^2\} \right]_0^{a_1} \\ &= \frac{a_1^2}{2 \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} \left[\{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 + \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 \right], \\ \int_{a_1}^a X_{2,m}^2(r) r dr &= \frac{1}{\{u_0(a_1, m)\}^2} \int_{a_1}^a \{u_0(r, m)\}^2 r dr \\ &= \frac{1}{\{u_0(a_1, m)\}^2} \left[\frac{r^2}{2} \{u_0'(r, m)\}^2 + \{u_0(r, m)\}^2 \right]_{a_1}^a \\ &= \frac{1}{2 \{u_0(a_1, m)\}^2} \left[a^2 \{(u_1^2(a, m))^2 + (u_0(a, m))^2\} \right. \\ &\quad \left. - a_1^2 \{(u_1(a_1, m))^2 + (u_0(a_1, m))^2\} \right] \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} X_{1,m}^2(r) r dr + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a X_{2,m}^2(r) r dr \\ &= \frac{a_1^2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{2 \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2} [\{J_1(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2 + \{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,m} a_1)\}^2] \\ &\quad + \frac{k_2 \kappa_1^2}{2 \{u_0(a_1, m)\}^2} [a^2 \{(u_1(a, m))^2 + (u_0(a, m))^2\} \\ &\quad - a_1^2 \{(u_1(a_1, m))^2 + (u_0(a_1, m))^2\}] \\ &= V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (69)$$

が得られる。(68)の式は複雑なので簡単のために $V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m})$ と置いてある。

以上の計算により(65)は

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) X_{1,m}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,m}(\lambda) \lambda d\lambda \\ &= -\frac{a k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, m)}{u_0(a_1, m)} \sum_{s=1}^{\infty} M_s \frac{u_0(a, s)}{u_0(a_1, s)} \\ &\quad + M_m \frac{a k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \left(\frac{u_0(a, m)}{u_0(a_1, m)} \right)^2 + M_m V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (70)$$

となる。

(64)において $r=a$ と置けば

$$f_2(a) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s X_{2,s}(a) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s \frac{u_0(a, s)}{u_0(a_1, s)} \quad \dots\dots\dots (71)$$

となるが, これに

$$\frac{a k_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, m)}{u_0(a_1, m)}$$

を掛けて(70)に加えれば,

$$\begin{aligned} & k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} f_1(r) X_{1,m}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,m}(\lambda) \lambda d\lambda + \frac{ak_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, m)}{u_0(a_1, m)} f_2(a) \\ &= M_m \left\{ \frac{ak_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \left(\frac{u_0(a, m)}{u_0(a_1, m)} \right)^2 + V(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}) \right\} \\ &\equiv M_m U(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(72)$$

と書ける。最後の中括弧の中の式を $U(\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m})$ と書いてある。

(72)から展開式の係数 M_s が計算されるので, $f_1(r)$, $f_2(r)$ の展開式は次のようになる:

$$f_1(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{X_{1,s}(r)}{U(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})} \left(k_1 \kappa_2 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) X_{1,s}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,s}(\lambda) \lambda d\lambda + \frac{ak_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, s)}{u_0(a_1, s)} f_2(a) \right), \quad \dots\dots\dots(73)$$

$$f_2(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{X_{2,s}(r)}{U(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})} \left(k_2 \kappa_2 \int_0^{a_1} f_1(\lambda) X_{1,s}(\lambda) \lambda d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a f_2(\lambda) X_{2,s}(\lambda) \lambda d\lambda + \frac{ak_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2}{c} \frac{u_0(a, s)}{u_0(a_1, s)} f_2(a) \right). \quad \dots\dots\dots(74)$$

(73), (74)によって任意の関数の展開式が得られたので, 本問題の解が得られる:

$$\begin{aligned} u_1 = & e^{-c_1 t} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{1,s}^2 t}}{U(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})} \frac{J_0(\kappa_2 \alpha_{1,s} r)}{J_0(\kappa_2 \alpha_{2,s} a_1)} \left\{ \frac{k_1 \kappa_2^2}{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a_1)} \int_0^{a_1} f_1(\lambda) J_0(\kappa_2 \alpha_{2,s} \lambda) \lambda d\lambda \right. \\ & + k_2 \kappa_1^2 / \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} J_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} Y_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right) \right. \\ & \times \int_{a_1}^a f_2(\lambda) \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} \lambda)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} J_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} \lambda)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} Y_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right) \lambda d\lambda \right. \\ & + \frac{ak_2 \kappa_1^2 \kappa_2^2 f_2(a)}{c} \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} J_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} Y_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right) \\ & \left. \div \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} J_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} Y_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right) \right\}, \quad \dots\dots\dots(75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = & e^{-c_2 t} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2 t}}{U(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})} \\ & \times \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) J_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} J_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} r)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_{2,s}^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_{2,s} a) + c \kappa_1 \alpha_{2,s} Y_1(\kappa_1 \alpha_{2,s} a)} \right) \end{aligned}$$

$$\div \left(\frac{J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) J_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s J_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} \right. \\ \left. - \frac{Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a_1)}{(c_2^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \alpha_2, s^2) Y_0(\kappa_1 \alpha_2, s a) + c \kappa_1 \alpha_2, s Y_1(\kappa_1 \alpha_2, s a)} \right) \\ \times \left\{ \begin{array}{c} \text{''} \end{array} \right\}. \quad \dots\dots\dots (76)$$

この式の中で $U(\alpha_1, s, \alpha_2, s)$ は(72)で与えられる複雑な式である。