

大数の弱法則と強法則

小 野 英 夫*

On the Weak Law and the Strong Law of Large Numbers

by Hideo ONO*

Let

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \quad (1)$$

be a sequence of random variables, and let

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = m_n.$$

Under what conditions does $\frac{S_n - m_n}{n} \dots \dots \dots (2)$ tend to zero? According to these conditions, sequence (1) is determined whether it obeys to the weak law of large numbers or the strong law of large numbers. If (2) converges in probability, we say that the sequence (1) obeys to the weak law of large numbers. And if (2) asserts convergence almost everywhere, we say that (1) obeys to the strong law of large numbers. To be brief, the weak law is described as

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n - m_n}{n}\right| = 0\right) = 1$$

and the strong law is described as

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{S_n - m_n}{n}\right| = 0\right) = 1.$$

The present paper concerns the following problems. First: the necessary and sufficient condition on which the weak law holds. Second: If $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$, then the sequence (1), which is mutually independent, obeys to the strong law of large numbers. Third: consideration about the Petersburg game.

[0] 緒 言

確率変数列 $\{X_n\}$ が与えられたとき

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = m_n$$

* 一般教養講師 数学

とする。このとき $\frac{S_n - m_n}{n}$ がどのような条件のもとに、 $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づくか。この収束の考え方をどうとるかによって大数の弱法則と強法則に分かれる。確率収束 (convergence in probability) を考えるときが弱法則であり、概収束 (almost everywhere convergence) を考えるときが強法則になる。概収束すれば確率収束する (逆は成り立たない) から、大数の強法則が成り立てば、弱法則は成り立つ。弱法則と強法則のちがいをかんたんに表現すると、弱法則は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n - m_n}{n}\right| = 0\right) = 1$$

であるのに対し、強法則は

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{S_n - m_n}{n}\right| = 0\right) = 1$$

である。

今回は、大数の弱法則が、 $\mu = E(X_k)$, $\sigma^2 = V(X_k)$ が存在するとき成立すること。また分散 $\sigma^2 = V(X_k)$ の存在制限を除いたときでも成立することを示す。つぎに、確率変数列 $\{X_k\}$ が一様有界の場合、また $\{X_k\}$ が互いに独立でないときでも、 $\frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \rightarrow 0$ ならば、大数の弱法則は成立する (必要十分条件) ことを証明する。

$X_k (k=1, 2, \dots)$ が互いに独立な確率変数でかつ各 X_k の分布 $\{f(x_i)\}$ は同一とするとき、 X_k の平均値 $\mu = E(X_k)$ が有限ならば大数の強法則に従うことを示す。また大数の強法則が成立するための十分条件 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$ を証明する。さいごに、大数の法則の類似の例としてペテルスブルグのゲームに関して考える。

〔1〕 (a) 大数の弱法則

定理 1 確率変数 X_1, X_2, \dots は互いに独立で同じ分布に従い、 $\mu = E(X_k)$, $\sigma^2 = V(X_k)$ が存在するものとする。 ϵ を任意の正数とし、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \rightarrow 0$$

<証明>

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n} = \mu$$

また、 X_1, X_2, \dots はたがいに独立であるから、

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

よって

確率変数 $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ にチェビシエフの不等式を適用すると

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく。

$$\therefore P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \rightarrow 0.$$

つぎに分散 $Var(X_k)$ の存在という条件を除いた場合を考える。

(b) $V(X_k)$ の存在制限を除いたとき

<証明>

確率変数 U_k と V_k ($k=1, 2, \dots, \epsilon > 0$ は固定)

$$U_k = \begin{cases} X_k & (|X_k| \leq \epsilon n \text{ のとき}) \\ 0 & (|X_k| > \epsilon n \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$V_k = \begin{cases} 0 & (|X_k| \leq \epsilon n \text{ のとき}) \\ X_k & (|X_k| > \epsilon n \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義すると,

$$X_k = U_k + V_k.$$

各 X_k の確率分布 $\{f(x_i)\}$ とすれば, 仮定より平均値 $\mu = E(X_k)$ の存在から

$$\sum |x_j| f(x_j) = C \quad \dots\dots\dots ①$$

は有限である。

$$\mu_n' = E(U_k) = \sum_{|x_j| \leq \epsilon n} x_j f(x_j) \quad \dots\dots\dots ②$$

和は $|x_j| < \epsilon n$ なる j の全部についてとられる。 $n \rightarrow \infty$ のとき $\mu_n' \rightarrow \mu$ となる。したがって, 十分大きなあらゆる n と任意の $\delta > 0$ に対して

$$|\mu_n' - \mu| < \delta. \quad \dots\dots\dots ③$$

①, ②より

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_k) &= E(U_k^2) - \mu^2 \\ &\leq E(U_k^2) \\ &\leq \epsilon n \sum_{|x_j| \leq \epsilon n} |x_j| f(x_j) \leq \epsilon C n \end{aligned}$$

チェビシェフの不等式より

$$P\left\{\left|\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} - \mu_n'\right| > \delta\right\} < \frac{\text{Var}(U_k)}{n\delta^2} < \frac{\epsilon A}{\delta^2}$$

これと③より

$$P\left\{\left|\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} - \mu\right| > 2\delta\right\} < \frac{\epsilon C}{\delta^2} \quad \dots\dots\dots ④$$

また

$$\begin{aligned} P\{V_k \neq 0\} &= \sum_{|x_j| > \epsilon n} f(x_j) \leq \frac{1}{\epsilon n} \sum_{|x_j| > \epsilon n} |x_j| f(x_j) \\ (\because |X_k| > \epsilon n, \therefore \frac{|X_k|}{\epsilon n} > 1, f(x_j) > 0) \end{aligned}$$

で最後の項の和は, n が大きくなると 0 に近づく。したがって, n が十分大きいときには,

$$P\{V_k \neq 0\} \leq \frac{\epsilon}{n}.$$

ゆえに $P\{V_1 \cup V_2 \cup \dots\} \leq P(V_1) + P(V_2) + \dots$ であるから,

$$P\{V_1 + V_2 + \dots + V_n \neq 0\} \leq \epsilon \quad \dots\dots\dots ⑤$$

④, ⑤と $S_n = (U_1 + U_2 + \dots + U_n) + (V_1 + V_2 + \dots + V_n)$

より

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > 2\delta\right\} \leq P\left\{\left|\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} - \mu\right| > 2\delta\right\}$$

$$\begin{aligned}
 &+P\{V_1+V_2+\cdots+V_n\neq 0\} \\
 &\leq \frac{\varepsilon C}{\delta^2}+\varepsilon
 \end{aligned}$$

ε と δ は任意であるから

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>2\delta\right\}\rightarrow 0 \quad (n\rightarrow\infty).$$

[2] 大数の弱法則の成立するための条件

(a) $\{X_k\}$ が互いに独立でないとき

定理 2 $\{X_k\}$ がたがいに独立でなくとも

$$V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(S_n)$$

とおいたとき,

$$\frac{1}{n^2}V(X_1+X_2+\cdots+X_n)\rightarrow 0 \quad (n\rightarrow\infty)$$

がいえれば, 大数の法則は成りたつ。

<証明> チェビシエフの不等式より

$$\begin{aligned}
 &P\left\{\left|\frac{S_n-\sum_{k=1}^n m_k}{n}\right|\geq\varepsilon\right\} \\
 &=P\left\{\left|S_n-\sum_{k=1}^n m_k\right|\geq n\varepsilon\right\} \\
 &\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}V(S_n)\rightarrow 0 \quad (n\rightarrow\infty).
 \end{aligned}$$

例 1. 確率変数列 $\{X_k\}$ において

$$V(X_k)<M, \text{Cov}(X_i, X_j)\leq 0$$

ならば, 大数の弱法則は成立する。

<証明> これは必ずしも独立でない確率変数列での大数の法則であるから, 定理 2 での条件をしらべる。

$$\begin{aligned}
 &V(X_1+X_2+\cdots+X_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n V(X_k)+2\sum_{i<j} \text{Cov}(X_i, X_j) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n V(X_k)<nM.
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n^2}V(X_1+X_2+\cdots+X_n) &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V(X_k) \\
 &< \frac{M}{n}\rightarrow 0 \quad (n\rightarrow\infty)
 \end{aligned}$$

であるから, 定理の条件はみたされた。

(b) $\{X_k\}$ が一様有界のとき

定理 3. 確率変数列 $\{X_k\}$ が一様有界ならば, 大数の弱法則が成立するための必要かつ十

分条件は

$$\frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。

<証明>

任意の n に対して $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|$ がいずれも A より小さいとして,

$X_k - E(X_k) = Y_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) とおくと

$$|Y_k| \leq 2A.$$

また

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n). \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

よって $|Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n| \leq n\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) が成立する確率を P とすれば,

$$\begin{aligned} V(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) &= E\{(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 dF(y) \\ &= \int_{|y_1 + y_2 + \cdots + y_n| \leq n\varepsilon} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 dF(y) \\ &\quad + \int_{|y_1 + y_2 + \cdots + y_n| > n\varepsilon} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 dF(y) \\ &\leq n^2 \varepsilon^2 P + \int_{|y_1 + y_2 + \cdots + y_n| > n\varepsilon} (|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|)^2 dF(y) \\ &\leq n^2 \varepsilon^2 P + 4c^2 n^2 (1 - P) \end{aligned}$$

ゆえに n^2 でわると

$$\frac{1}{n^2} V(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \leq \varepsilon^2 P + 4c^2 (1 - P)$$

①より

$$\frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \leq \varepsilon^2 P + 4c^2 (1 - P)$$

もし大数の弱法則が成立すれば, $(1 - P)$ は $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に近づくから

$$\frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。

これと定理 2 を用いれば, $\frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \rightarrow 0$ の条件は, 必要にして十分であることがいえる。

例 2. $\{X_k\}$ ($k=1, 2, \dots$) はたがいに独立な確率変数列でかつすべての K に対して

$$P(X_k = K^2) = P(X_k = -K^2) = \frac{1}{2}$$

であるとする。 $\lambda < \frac{1}{2}$ ならば大数の弱法則が成り立つ。

<証明>

$$E(X_k) = 0$$

$$V(X_k) = K^2$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n K^2$$

$$= \frac{1}{n^2} (1^{2\lambda} + 2^{2\lambda} + \dots + n^{2\lambda})$$

$$\int_0^n x^{2\lambda} dx < V(S_n) < \int_0^{n+1} x^{2\lambda} dx \text{ より}$$

$$V(S_n) \sim \frac{n^{2\lambda+1}}{2\lambda+1}$$

したがって $\lambda < \frac{1}{2}$ のとき

$$\frac{V(S_n)}{n^2} \rightarrow 0$$

例 3. ① $P\{X_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2^{2k+1}}$

$$P\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{2^{2k+1}}$$

② $P\{X_k = \pm \kappa\} = \frac{1}{2} \kappa^{-\frac{1}{2}}$

$$P\{X_k = 0\} = 1 - \kappa^{-\frac{1}{2}}$$

上の①の分布に従うたがいに独立な確率変数列 $X_k (\kappa=1, 2, \dots)$ は大数の法則の条件は満たすが, ②は満たさない。

<証明>

① $E(X_k) = (-2^k) \cdot \frac{1}{2^{2k+1}} + (2^k) \cdot \frac{1}{2^{2k+1}} = 0$

$$V(X_k) = (2^k)^2 \cdot \frac{1}{2^{2k+1}} + (-2^k)^2 \cdot \frac{1}{2^{2k+1}} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ゆえに大数の法則の条件を満たす。

② $E(X_k) = 0$

$$V(X_k) = \kappa^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} + (-\kappa)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} = \kappa^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \kappa^{\frac{3}{2}} > \frac{n(n+1)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

ゆえに大数の法則の条件を満たさない。

〔3〕 大数の強法則の成立するための十分条件

定理 4. $X_n (n=1, 2, \dots)$ が互いに独立な確率変数で平均 $E(X_n) = m_n$, 分散 $V(X_n) = \sigma_n^2 (n \geq 1)$ はともに有限とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

ならば, $\{X_n\}$ は大数の強法則に従う。すなわち

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - m_n}{n} = 0\right\} = 1$$

<証明>

$2^{\nu-1} < n \leq 2^\nu$ であるような n の少なくとも 1 つに関して

$$\left| \frac{S_n - m_n}{n} \right| < \varepsilon$$

が成り立たないような事象 $A_\nu(\varepsilon)$ とする。このとき $\sum P(A_\nu)$ が収束することを証明する。そうすれば、十分大きな ν に関し、すべての r について

$$P(A_\nu) + P(A_{\nu+1}) + \cdots + P(A_{\nu+r}) < \delta$$

となるから、大数の強法則が証明される。

$$I_\nu = \{2^{\nu-1}+1, 2^{\nu-1}+2, \dots, 2^\nu\}$$

$$\begin{aligned} A_\nu(\varepsilon) &= \left\{ \omega \mid \text{ある自然数 } n \in I_\nu \text{ に対して } \frac{|S_n - m_n|}{n} \geq \varepsilon \right\} \\ &= \bigcup_{n \in I_\nu} \{|S_n - m_n| \geq n\varepsilon\} \quad (\nu=1, 2, \dots, \varepsilon \text{ は正の定数}) \end{aligned}$$

とおく。

$$|S_n - m_n| \geq n\varepsilon > 2^{\nu-1}\varepsilon \text{ であるから}$$

$$A_\nu(\varepsilon) \subset \bigcup_{n \in I_\nu} \{|S_n - m_n| \geq 2^{\nu-1}\varepsilon\}$$

$$\subset \bigcup_{1 \leq n \leq 2^\nu} \{|S_n - m_n| \geq 2^{\nu-1}\varepsilon\}$$

$$= \left[\bigcap_{1 \leq n \leq 2^\nu} \{|S_n - m_n| \geq 2^{\nu-1}\varepsilon\}^c \right]^c$$

$$= \{|S_n - m_n| < 2^{\nu-1}\varepsilon\}^c \quad (n=1, 2, \dots, 2^\nu)$$

ここでコルモゴロフの不等式を用いて

$$P\{A_\nu(\varepsilon)\} \leq 1 - P\{|S_n - m_n| < 2^{\nu-1}\varepsilon\} \quad (n=1, 2, \dots, 2^\nu)$$

$$\leq 1 - \left\{ 1 - \frac{S_{2^\nu}^2}{(2^{\nu-1}\varepsilon)^2} \right\} = \frac{4S_{2^\nu}^2}{2^{2\nu}\varepsilon^2}$$

となる。したがって

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P\{A_\nu(\varepsilon)\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\nu \sum_{n=1}^{2^\nu} \sigma_n^2 \right)$$

となり、 ν と n の加える順序を変更して

$$= \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \sum_{2^\nu \geq n} \left(\frac{1}{4} \right)^\nu$$

ここで $2^\nu \geq n$ をみたす最小の正数を ν_0 とすると

$$\begin{aligned} \sum_{2^\nu \geq n} \left(\frac{1}{4} \right)^\nu &= \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^\nu = \left(\frac{1}{4} \right)^{\nu_0} \left/ \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \right. \\ &= \frac{4}{3} \left/ (2^{\nu_0})^2 \right. \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P\{A_\nu(\varepsilon)\} \leq \frac{16}{3 \cdot \varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty.$$

よって $\sum_{\nu=1}^{\infty} P\{A_\nu(\varepsilon)\} < \infty$ だから

$$P\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n(\varepsilon) \right\} = P\left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_\nu(\varepsilon) \right\} = 0 \quad (\text{注1}).$$

これは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して成り立つから

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)\right\}=0 \quad (p=1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \therefore 0 &\leq P\left\{\bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)\right\} \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)\right\}=0 \end{aligned}$$

すなわち

$$A = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu}\left(\frac{1}{p}\right) \text{ とおけば } P\{A\}=0.$$

$$\therefore P\{A^c\}=1-P\{A\}=1 \quad \dots\dots\dots ①$$

ところで

$$\begin{aligned} A^c &= \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=n}^{\infty} \left[A_{\nu}\left(\frac{1}{p}\right) \right]^c \\ \left[A_{\nu}\left(\frac{1}{p}\right) \right]^c &= \bigcap_{k \in I_{\nu}} \left\{ \frac{S_k - m_k}{\kappa} \geq \frac{1}{p} \right\}^c \\ &= \left\{ \frac{|S_k - m_k|}{\kappa} < \frac{1}{p} \right\} \quad (\kappa = 2^{\nu-1} + 1, 2^{\nu-1} + 2, \dots, 2^{\nu}) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} A^c &\subset \left\{ \omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - m_n}{n} = 0 \right\} \\ \therefore P\{A^c\} &\leq P\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - m_n}{n} = 0 \right\} \quad \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②より

$$P\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - m_n}{n} = 0 \right\} = 1.$$

(注1)

確率事象の系列 A_1, A_2, \dots に対して,

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\kappa=n}^{\infty} A_{\kappa}$ なる確率事象を考える。

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\} < \infty \text{ ならば, } P\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right\} = 0.$$

<証明>

まず, 確率事象 A_1, A_2, \dots に対して, $P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots\} \leq P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots$ を示す。

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \cap B_1^c,$$

$$B_3 = A_3 \cap (B_1 \cup B_2)^c, \quad \dots, \quad B_i = A_i \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{i-1})^c, \quad \dots$$

とおく。

$i < j$ のとき

$$\begin{aligned} B_j &= A_j \cap (B_1 \cup \dots \cup B_i \cup B_{j-1})^c \\ &\subset (B_1 \cup \dots \cup B_i \cup \dots \cup B_{j-1})^c \\ &\subset B_i^c \end{aligned}$$

$\therefore B_i$ と B_j はたがいに排反である。 $A_i \supset B_i$ ($i=1, 2, \dots$) より

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \supset B_1 \cup B_2 \cup \dots \quad \dots\dots\dots ①$$

また $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \dots$ とすれば $\omega \in A_i$ なる i がある。

$i=1$ のとき $w \in B_1$

$i>1$ のとき $w \in (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{i-1})$ ならば $w \in B_i$

したがって

$w \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots$ であり, $w \in (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{i-1})$ ならば $w \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots$.

つまり $w \in B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_i \cup \cdots$ となり

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \quad \dots\dots\dots ②$$

ゆえに①, ②より

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = B_1 \cup B_2 \cup \cdots.$$

$$\therefore P\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots\} = P\{B_1 \cup B_2 \cup \cdots\}$$

$$= P\{B_1\} + P\{B_2\} + \dots\dots\dots$$

$$\leq P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots\dots\dots$$

$$(\because B_i \subset A_i, P\{B_i\} \leq P\{A_i\} \ (i=1, 2, \dots))$$

〔4〕 大数の強法則

定理 5. $X_k (k=1, 2, \dots)$ が互いに独立な確率変数で, かつ各 X_k の分布 $\{f(x_i)\}$ は同一とする。このとき X_k の平均値 $\mu = E(X_k)$ が有限ならば, 系列 $\{X_k\}$ は, 大数の強法則にしたがう。

<証明>

$$U_k = \begin{cases} X_k & (|X_k| < \kappa \text{ のとき}) \\ 0 & (|X_k| \geq \kappa \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$V_k = \begin{cases} 0 & (|X_k| < \kappa \text{ のとき}) \\ X_k & (|X_k| \geq \kappa \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと, $U_k (k=1, 2, \dots)$ は互いに独立である。これが定理 4 の条件を満たすことを示す。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(U_k^2) - \{E(U_k)\}^2 \\ &\leq E(U_k^2) = \sum_{|x_j| < \kappa} x_j^2 f(x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots ①$$

ここで

$$a_v = \sum_{v-1 \leq |x_j| < v} |x_j| f(x_j)$$

とおく。

平均値 $E(X_k) = \sum |x_j| f(x_j)$ の存在より

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v \leq \sum |x_j| f(x_j) < \infty.$$

①より

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &\leq E(U_k^2) \\ &= \sum_{|x_j| < \kappa} x_j^2 f(x_j) \\ &= \sum_{0 \leq |x_1| < 1} |x_1|^2 f(x) + \sum_{1 \leq |x_2| < 2} |x_2|^2 f(x) + \cdots + \sum_{\kappa-1 \leq |x_\kappa| < \kappa} |x_\kappa|^2 f(x) \\ &= \sum_{0 \leq |x_1| < 1} |x_1|^2 f(x) + 2 \sum_{1 \leq |x_2| < 2} |x_2|^2 f(x) + \cdots + k \sum_{\kappa-1 \leq |x_\kappa| < \kappa} |x_\kappa|^2 f(x) \\ &= a_1 + 2a_2 + \cdots + \kappa a_\kappa \end{aligned}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\kappa} \nu a_{\nu} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sum_{\kappa=1}^{\infty} a(\kappa) \sum_{\nu=1}^{\kappa} b(\nu) \\ &= a(1)b(1) + a(2)(b(1)+b(2)) + \dots + a(\kappa)(b(1)+b(2)+\dots+b(\kappa)) + \dots \\ &= b(1)(a(1)+a(2)+\dots) + b(2)(a(2)+a(3)+\dots) + \dots + b(\nu)(a(\nu+1)+\dots) + \dots \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} b(\nu) \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} a(\kappa) \quad \dots\dots\dots ③ \end{aligned}$$

②, ③より

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\kappa}^2}{\kappa^2} &\leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} \sum_{\nu=1}^{\kappa} \nu a_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} \quad \dots\dots\dots ④ \\ \nu a_{\nu} \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} &= \nu a_{\nu} \left(\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \dots \right) \right) \\ &\leq \nu a_{\nu} \left(1 + \nu \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) + \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \right) + \left(\frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+3} \right) + \dots \right) \\ &= a_{\nu} (1+1) \\ &= 2a_{\nu} \end{aligned}$$

だから④より

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\kappa}^2}{\kappa^2} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} < 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} < \infty \quad \dots\dots\dots ⑤$$

となるから, U_k は大数の強法則に従う。

一方, $E(U_k) = \mu_k = \sum_{|x_j| < \kappa} x_i f(x_i)$ より $\mu_k \rightarrow \mu$.

したがって, $(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)/n \rightarrow \mu$ であるから, コルモゴロフの大数の強法則より

$$\frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^n U_k \rightarrow \mu \quad (a, e)$$

あとは $\frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^n V_k \rightarrow 0 \quad (a, e)$ がいえればよい。このためには $V_n \rightarrow 0 \quad (a, e)$ がいえればよい。

$$\begin{aligned} P\{V_n \neq 0\} &= \sum_{|x_j| \geq n} f(x_j) \\ &\leq \frac{a_{n+1}}{n} + \frac{a_{n+2}}{n+1} + \frac{a_{n+3}}{n+3} + \dots \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum P\{V_n \neq 0\} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} 1 \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu+1} < \infty \end{aligned}$$

を得るから, ボレル・カンテリの定理 ($\sum_{n=1}^{\infty} P(V_n \neq 0) < \infty$ ならば $P\{\limsup(V_n \neq 0)\} = 0$)

すなわち $P\{\liminf(V_n = 0)\} = P(\lim V_n = 0) = 1$ により, $V_n \neq 0$ が無限に多くの n に対して起こる確率は 0 になる。したがって

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k \rightarrow 0 \quad (a, e)$$

よって求める結果が得られた。

例 4. 例 3 の(1)の分布に従うたがい独立な確率変数列 $X_k (k=1, 2, \dots)$ は大数の弱法則に従った。強法則について考えると, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$ となるから大数の強法則も満たす。

〔5〕 ペテルスブルグのゲームの問題

甲乙 2 人が次のような賭をした。表裏がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出る硬貨を表が出るまで投げ続ける。 i 回目に初めて表が出れば甲は乙から 2^i 円もらうことにする。この賭が甲乙両者にとって公平になるようにするには、あらかじめ甲は乙にいくらの金額を賭金として支払っておけばよいか。

おのおの a 試みに対する利得は

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots$$

という値をとる確率変数と考えられる。これに対する確率は

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

である。そこで期待値を $E(X)$ とすると,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty \quad \text{となる。すなわち, 甲が受け取る金額の期待値は無限大}$$

となる。したがって, 甲があらかじめ有限の金額を乙に支払ったとしても, この賭は両者にとって公平とはならない。よって利得は有限の期待値をもっていないから, 大数の弱法則は適用できない。

そこで, この賭を次のように改める。1 つの試みが N 回より多く投げねばならないとき (すなわち, 硬貨の裏が N 回続けてでるとき) プレイヤーは, 全くお金を受け取らないという規則に改める。このようになおした賭では, 利得の期待値は,

$$E(X) = \sum_{i=1}^N 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = N$$

で有限値 N をもつから大数の法則が適用される。おのおのの試みの分散は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (2^k - N)^2 \frac{1}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{N^2}{2^k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\log N} + \sum_{k=\log N}^N \right) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{N^2}{2^k} \end{aligned}$$

として $O(N)$ である, ($\log N$ の底は 2)。

よって n 回の試みの総利得 S_n について

$$P\{|S_n - nN| > \varepsilon n\} = O\left(\frac{N}{\varepsilon^2 n}\right).$$

したがって

n 回の試みの後, 利得の全部の和は, あらゆる N について nN をこえるだろう。したがってプレイヤーはきまった金額の参加料 μ' をそれぞれの試みに支払っても, なお実利益を得られる。これはすべての μ' について成り立つ。

有限な期待値 $\mu = E(X_k) > 0$ の場合には, もと利得額の総和 S_n と参加料の総和 bn

$=n\mu'$ の比が, n が大きいとき 1 に近いことが確からしいならば (すなわち, 差 $S_n - b_n$ が $n\mu'$ より小さいオーダーの量になるならば), 賭は公平であるとよばれる。もし参加料の総和が b_n である賭が, あらゆる $\varepsilon > 0$ に対して

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{b_n} - 1\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

ならば, 古典的な意味においてその賭は公平である。これは $b_n = n\mu'$ のときの大数の法則の類似である。

さて, このペテルスブルグの賭を何回か行ったときにえられる金額をそれぞれ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ で表わせば, 上の $b_n = n \log_2 n$ として大数の弱法則の成立することを示す。

<証明>

X_k に依存する 2 つの変数 U_k と V_k ($k=1, 2, \dots, n$) を

$$U_k = \begin{cases} X_k & (X_k \leq n \log n \text{ のとき}) \\ 0 & (X_k > n \log n \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$V_k = \begin{cases} 0 & (X_k \leq n \log n \text{ のとき}) \\ X_k & (X_k > n \log n \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。 $X_k = U_k + V_k$ で U_k は互いに独立である。

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n \log n} - 1\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

となることを考える。

$$\begin{aligned} & P\{S_n - n \log n > \varepsilon \log n\} \\ &= P\{S_n - n \log n > \varepsilon \log n; V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0\} \\ &+ P\{S_n - n \log n > \varepsilon \log n; V_1 + V_2 + \dots + V_n \neq 0\} \\ &= P\{U_1 + U_2 + \dots + U_n - n \log n > \varepsilon \log n\} \\ &+ P\{S_n - n \log n > \varepsilon \log n; V_1 + V_2 + \dots + V_n \neq 0\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さてあらゆる t について

$$\begin{aligned} P\{X_k > t\} &= \sum_{2^i > t} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=\lceil \log t \rceil}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{\lceil \log t \rceil}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) \\ & \quad (\log t - 1 \leq \lceil \log t \rceil \leq \log t \text{ だから}) \\ &\leq \frac{1}{2^{\log t - 1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{t \cdot 2^{-1}} = \frac{4}{t} \end{aligned}$$

ゆえに

$$P\{V_k \neq 0\} < \frac{4}{n \log n}$$

そこで

$$\begin{aligned} & P\{V_1 + V_2 + \dots + V_n > 0\} \\ &\leq P\{\text{ある } i \leq n \text{ について } V_i \neq 0\} \\ &\leq P\{V_1 \neq 0\} + P\{V_2 \neq 0\} + \dots + P\{V_n \neq 0\} \\ &\leq \frac{4}{\log n}. \end{aligned}$$

すなわち

$$P\{V_1+V_2+\cdots+V_n>0\} < \frac{4}{\log n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{②}$$

したがって②を証明するには

$$P\{|U_1+U_2+\cdots+U_n-n \log n| > \varepsilon n \log n\} \rightarrow 0 \quad \text{③}$$

を証明すればよい。

いま $\mu = E(U_k)$, $\sigma = \text{Var}(U_k)$ とする。

$$E(U_k) = 0, \quad X_k > n \log n$$

$$E(U_k) = \sum_{2^i \leq n \log n} 2^i \cdot P\{X_k = 2^i\}$$

(ここで $2^i \leq n \log n$ を満足させる最大の整数を r とすれば ($i=0, 1, 2, \dots$)

$$= \sum_{i=1}^r 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = r$$

\therefore 十分大きな n に対して

$$\log n < \mu \leq \log n + \log \log n$$

$$\therefore \mu \sim \log n \quad \text{④}$$

同様に

$$\sigma^2 = E(U_k^2) - E^2(U_k)$$

$$< E(U_k^2) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^r$$

$$< 2^{r+1}$$

$$\leq 2n \log n$$

$U_k (k=1, 2, \dots, n)$ は互いに独立であるから, 和 $U_1+U_2+\cdots+U_n$ の平均値と分散は $n\mu$ と $n\sigma^2$ であるから, チェビシェフの不等式より

$$P\{|U_1+U_2+\cdots+U_n-n\mu| > \varepsilon n\mu\}$$

$$\leq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2 n^2 \mu} < \frac{2}{\varepsilon^2 \log n} \rightarrow 0.$$

(④より)

$$\therefore P\{|U_1+U_2+\cdots+U_n-n\mu| > \varepsilon n \log n\} \rightarrow 0$$

したがって

$$P\{S_n - n \log n > \varepsilon \log n\} \rightarrow 0. \quad (\text{証明終り})$$

このことは, n 回の賭をするには 1 回当り $\log_2 n$ 円払えば公平な賭が行なわれることになる。

また, 本論文にあたって, 終始ご指導ご助言いただいた日大大学院教授宇野利雄先生, 日本数学教育学会名誉会長・明星大学教授佐藤良一郎先生に深く感謝いたします。

参考文献

1. An Introduction to Probability Theory and Its Applications volume1 (William Feller)
2. 確率論とその応用(上)(下), W. フェラー 河田龍夫監訳 (紀伊国屋書店)
3. Mathematical Theory of Probability and Statistics (Richard Von Mises)
4. Wahrscheinlichkeit Statistik und Wahrheit (Richard Von Mises)
5. 確率統計演習 1 (国沢清典) (培風館)
6. 応用確率論 (西田俊夫) (培風館)
7. Theories of Probability (Terrence L. Fine)
8. 数理統計学序説 (佐藤良一郎) (培風館)
9. Probability Theory (A. Rényi)

10. 数理統計学演習 (宇野利雄編) (共立全書)
11. Measure Integration and Probability (Glaude W. Burrill)
12. A. Graduate coures in Probability (Howord G. Tucker) 1967.