確率分布をする作業時間の連による管理

高　城　重　道*

The Control of The Workine Time by Using the Up-run Probabilities

by *Shigemichi TAKI*

This paper is described concerning the working time of the machine assembly processes, and setting up the stochastic limits of the working time control by the up-run probabilities as similar methods of the Q. C. control charts in order to find unusual value. In the first place the up-run probabilities are expained and the working time distributions are approximated by Erlang distributions and calculated the figures and drawn up the up-run probabilities charts. So deciding to the phase and means of working time, its run probabilities may be known from the charts.
The application of this method is given lastly.

1. まえがき

機械組立ラインにおいては，ラインのどこかに組立調整工程が存在する。この調整工程は，一般に作業時間が不安定で，その作業時間を見積ることが困難である。とくに現場監督者にとっては，不安定な作業時間を何らかの方法で管理して，予定通りのタスクを消化しなければならない課題がある。この研究はこの不安定な作業時間がある確率分布をするとし，ある作業時間の出現率およびその作業時間より長い作業時間の連のあらわれる確率を求め，品質管理の管理図法と同様の方法で，非常に小さい確率の連が現われた場合，異常作業時間が発生しているとするものである。この異常作業時間が発生していると判定することによって，工程管理者はすばやくアクションをとることが出来る。現状では作業時間が不安定な場合，その作業時間が異常であるかどうかの判定が困難であり，その意志決定の手段を必要としている。

2. 目　的

この研究の目的は機械組立の不安定作業である調整工程を調査した結果，後述のようにアーラン分布で近似できることが解ったので，ある作業時間の出現する確率並びにそれよ

* 理工学部機械工学科助手　生産工学

り長くなる作業時間の連（上り連）の現われる確率をアーラン分布で計算し，その確率の大きさによって，作業時間が異常であるか，どうかの判定の手段とし，工程管理者の意志決定に役立てようとするものである。そのためには，その都度，分布を求め確率を計算するのは大へん面倒なので，あらかじめ数表を作成しておけば便利なので，アーラン分布のフェイズ，分布の平均値のデータから必要な確率を求める数表を作成する。これが第二の目的である。

3. 記　号

この研究で使用する記号を次に示めす。

$f(\tau)$　：作業時間の確率密度

$F(t)$　：作業時間の分布

$P_r(t)$：作業時間が t 以上かかる確率

l または L：アーラン分布のフェイズ数

m　：作業時間率（平均作業時間の逆数）

$\frac{1}{m}$　：作業時間の平均値（級の平均値）

$\bar{x}$　：作業時間の資料平均値

σ　：作業時間の資料標準偏差

n　：上り連の数

$W_n(t)$：上り連 n の起こる確率

t_i　：作業時間の級変数

t_s　：実測作業時間

4. 理論式

測定する作業時間はそれぞれ独立であるとし，作業は開始時刻より終了時刻までを測定し，この間にかかった時間を作業時間 τ とする。この作業時間が確率分布をするとみなし最短作業時間を基準として，ヒストグラムを作成する。これらの分布は後述の事例研究からアーラン分布で近似できる。従って，その確率密度は

$$f(\tau)=\frac{(lm)^l}{(l-1)!}\tau^{l-1}\ e^{-lm\tau} \qquad (4\cdot1)$$

また分布関数は

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_t^\infty f(\tau)d\tau\\&=\frac{(lm)^l}{(l-1)!}\int_t^\infty \tau^{l-1}\ e^{-lm\tau}d\tau\\&=\frac{(lm)^l}{(l-1)!}\left\{\left[-\tau^{l-1}\ e^{-lm\tau}\right]_t^\infty+(l-1)\int_t^\infty\tau^{l-2}\ e^{-lm\tau}d\tau\right.\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=e^{-lmt}\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(lm)^k}{k!}t^k\end{aligned} \qquad (4\cdot2)$$

さて，工程の作業時間の分布が $f(\tau)$ であるとして，ある作業時間を測定した結果が t であったとする。これに続く作業時間が t よりも長いという条件つき確率は，確率変数を T とするとき，次式で表わすことがきさる。

$$P_r\{T_2>t|T_1=t\}$$
$$=\frac{P_r\{T_2>t\}\cdot P_r\{T_1=t\}}{P_r\{T_1=t\}}$$
$$=P_r\{T_2>t\} \quad (4\cdot3)$$

ただし，T_1 と T_2 は互いに独立で共通の分布をもつものとする。

式(4・3)はある作業時間が起って，さらにそれより長い作業時間が起る確率である。つまり，1の上り連（*run*）の起る確率を示めす。この1つ上り連は次式で示めされる。

$$W_1(t)=P_r\{T>t\}$$
$$=F(t)$$
$$=\int_t^\infty f(\tau)d\tau \quad (4\cdot4)$$

次に相続く2つの作業時間について考える。まず，任意の作業時間をτとし，それに続いて行なわれる作業時間がτよりも長い確率は，図4—1で示めすように

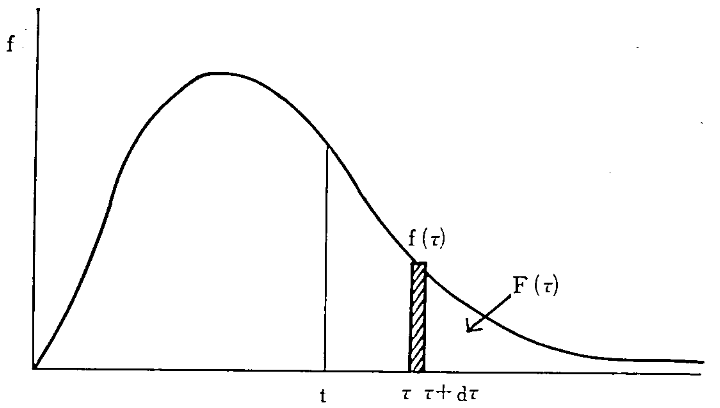


図4—1

任意の作業時間τが起こる確率：

$$P_r\{\tau\leqq T\leqq\tau+d\tau\}$$

続いて，それよりも長い作業時間の起こる確率：

$$P_r\{T>\tau\}$$

との積で示めされるから

$$P_r\{T>\tau\}\cdot P_r\{\tau\leqq T\leqq\tau+d\tau\}=F(\tau)\cdot f(\tau)d\tau \quad (4\cdot5)$$

式(4・5)は相続く作業時間の上り連の起こる確率である。

さらに，ある作業時間tを考え，tよりも長い作業時間が発生し，それから$W_1(\tau)$の上り連が現われることを考える。これは式(4・5)について，tから∞まで全て加え合せればよい。

従って，作業時間tが存在して，それ以上に2の上り連の現われる確率は

$$W_2(t)=\int_{\tau=t}^{\tau=\infty} F(\tau)\cdot f(\tau)d\tau \quad (4\cdot6)$$

ここで　$f(\tau)=-\dfrac{dF(\tau)}{d\tau}=-F'(\tau)$

を式(4・6)に代入すると

$$W_2(t)=-\int_{\tau=t}^{\tau=\infty} F(\tau)\cdot F'(\tau)d\tau$$

$$=-\left\{\left[F^2(\tau)\right]_{\tau=t}^{\tau=\infty}-\int_{\tau=t}^{\tau=\infty} F(\tau)F'(\tau)d\tau\right\}$$

$$=-F^2(t)+\int_{\tau=t}^{\tau=\infty} F(\tau)F'(\tau)d\tau\Big\}$$

$$=\frac{F^2(t)}{2} \tag{4・7}$$

同様にして，作業時間 t より長い3の上り連の現われる確率は

$$W_3(t)=-\int_{\tau=t}^{\tau=\infty} \frac{F^2(\tau)}{2}\cdot F'(\tau)d\tau$$

$$=-\left\{\left[\frac{F^3(\tau)}{2}\right]_{\tau=t}^{\tau=\infty}-\frac{1}{3}\int_{\tau=t}^{\tau=\infty} \frac{F'(\tau)\cdot F^2(\tau)}{2}d\tau\right\}$$

$$=\frac{F^3(t)}{3\cdot 2} \tag{4・8}$$

以下式(4・4)，(4・7)，(4・8)と同様の手順を繰返すことによって，長さ n の上り連の現われる確率は

$$W_n(t)=\frac{F^n(t)}{n!} \tag{4・9}$$

式(4・9)に式(4・1)を代入すると

$$W^n(t)=\frac{1}{n!}\left\{e^{-lmt}\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(lm)^k}{k!}t^k\right\}^n \tag{4・10}$$

式(4・10)において，作業時間率 m，フェイズ ℓ，異常作業時間 t を与え，より長い作業時間の上り連の現われる確率を求めることができる。

5. 数表・計算図表の作成

数表は式(4・10)において

ℓ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

$\frac{1}{m}$: 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0

n : 1, 2, 3, 4, 5

として，各フェイズについて，作業時間の平均値（級に変換した値）をパラメータとして，作業時間 t のときの上り連 $W_n(t)$ の現われる確率を求めた。計算は HITAC 10 (12KW) DRUM FORTRAN (JIS 5000) を使用して，小数以下5桁まで求めた。数表の一部をで〔表5－1〕で示す。

前述の数表をもとに，相続く作業時間の連の現われる確率が0.1％になる値をもとめ，たて軸に作業時間 t（級），横軸に平均作業時間 $1/m$（級平均）をとり，片対数で示したものが〔図5－1～図5－10〕である。つまり作業時間の管理限界を決めておき，不安定作業の出で，平均より長い作業が出現し，さらにそれより長い作業が続いたとき，その連の出現する確率が管理限界の0.1％より小さい場合，これらの作業は異常作業時間であると判定し，すぐにアクションをとるべきであるとするものである。管理限界0.1％については，正規分布の3 σ 法，ならびに現場での経験をもとに決定した。

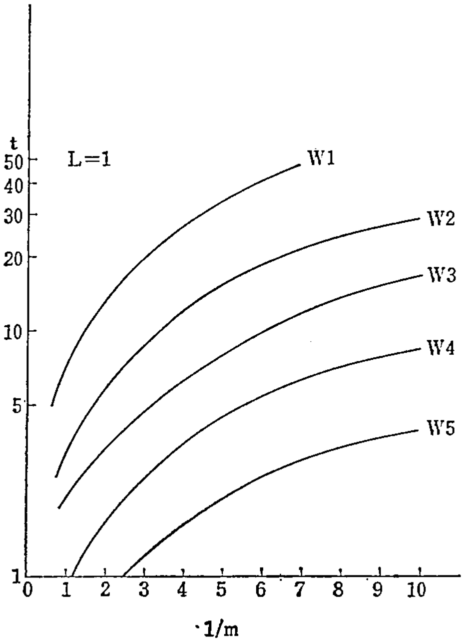
〔表5—1〕

L＝3.　M＝0.250

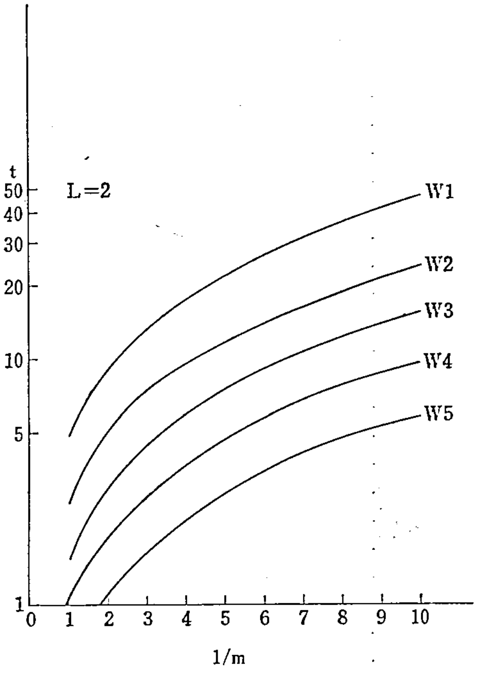
T	W 1	W 2	W 3	W 4	W 5
1.	0.95649	0.46031	0.14722	0.03531	0.00677
2.	0.80884	0.32711	0.08819	0.01783	0.00288
3.	0.60933	0.18564	0.03770	0.00574	0.00070
4.	0.42319	0.08954	0.01263	0.00133	0.00011
5.	0.27706	0.03838	0.00354	0.00024	0.00001
6.	0.17357	0.01506	0.00087	0.00003	0.00000
7.	0.10511	0.00552	0.00019	0.00000	0.00000
8.	0.06196	0.00192	0.00003	0.00000	0.00000
9.	0.03574	0.00063	0.00000	0.00000	0.00000
10.	0.02025	0.00020	0.00000	0.00000	0.00000
11.	0.01130	0.00006	0.00000	0.00000	0.00000
12.	0.00623	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
13.	0.00339	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
14.	0.00181	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
15.	0.00098	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
16.	0.00052	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
17.	0.00027	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
18.	0.00014	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
19,	0.00007	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
20.	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
21.	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
22.	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

L＝3.　M＝0.200

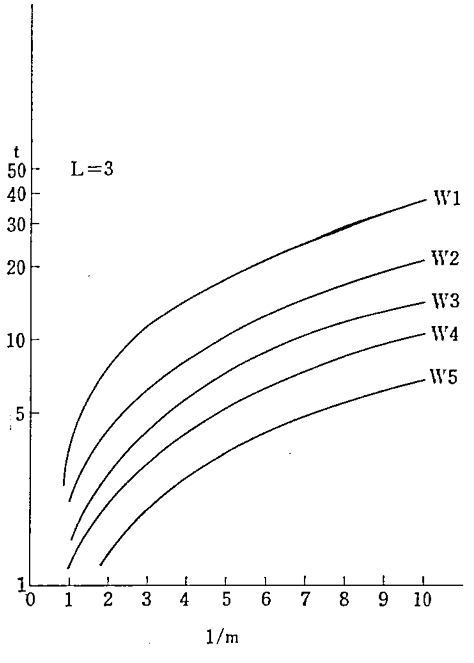
T	W 1	W 2	W 3	W 4	W 5
1.	0.97688	0.47715	0.15537	0.03794	0.00741
2.	0.87948	0.38674	0.11383	0.02492	0.00438
3.	0.73062	0.26690	0.06500	0.01187	0.00173
4.	0.56970	0.16228	0.03081	0.00438	0.00050
5.	0.42319	0.08954	0.01263	0.00133	0.00011
6.	0.30274	0.04582	0.00462	0.00035	0.00002
7.	0.21023	0.02210	0.00154	0.00008	0.00000
8.	0.14253	0.01015	0.00048	0.00001	0.00000
9.	0.09475	0.00448	0.00014	0.00000	0.00000
10.	0.06196	0.00192	0.00003	0.00000	0.00000
11.	0.03996	0.00079	0.00001	0.00000	0.00000
12.	0.02547	0.00032	0.00000	0.00000	0.00000
13.	0.01606	0.00012	0.00000	0.00000	0.00000
14.	0.01004	0.00005	0.00000	0.00000	0.00000
15.	0.00623	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
16.	0.00383	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
17.	0.00234	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
18.	0.00143	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
19.	0.00086	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
20.	0.00052	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
21.	0.00031	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
22.	0.00018	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
23.	0.00011	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
24.	0.00006	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
25.	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
26.	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
27.	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000



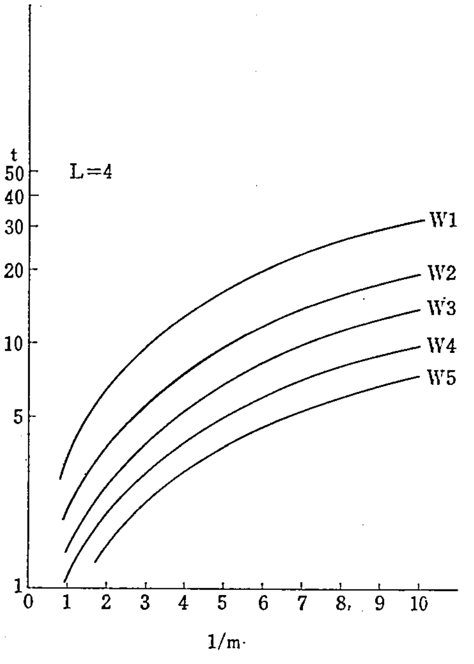
〔図5−1〕



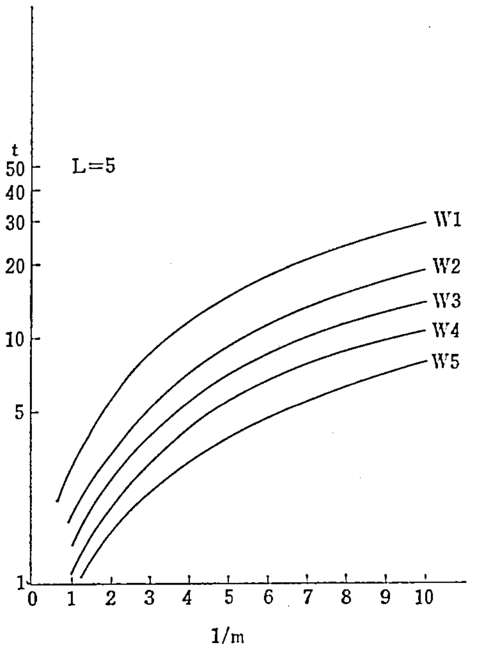
〔図5−2〕



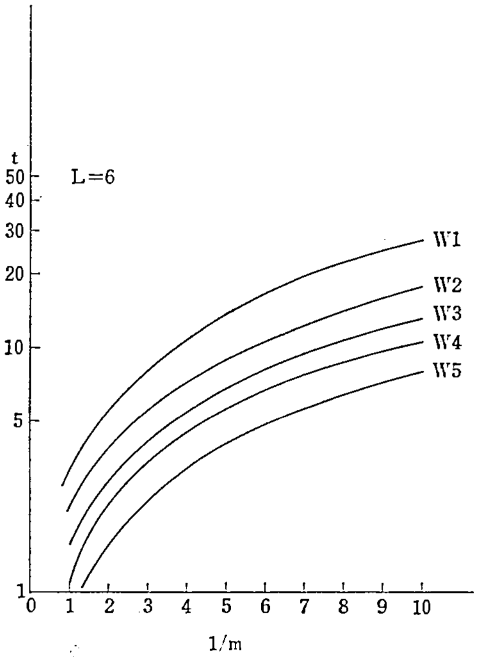
〔図5−3〕



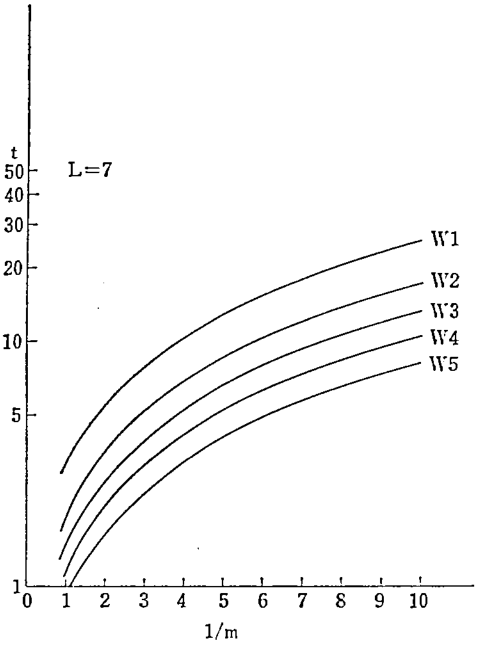
〔図5−4〕



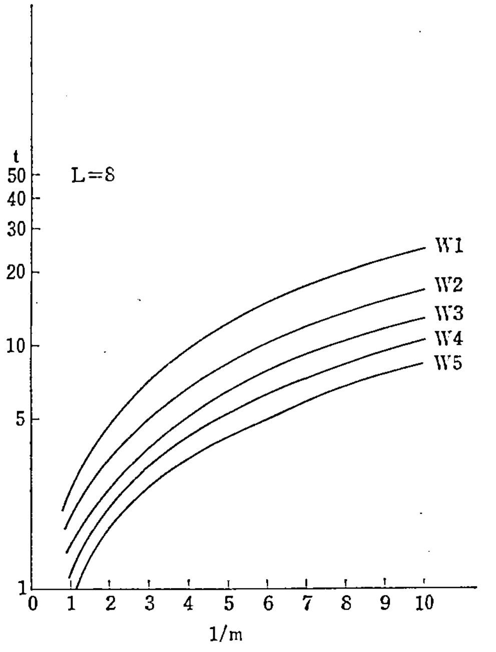
〔図5−5〕



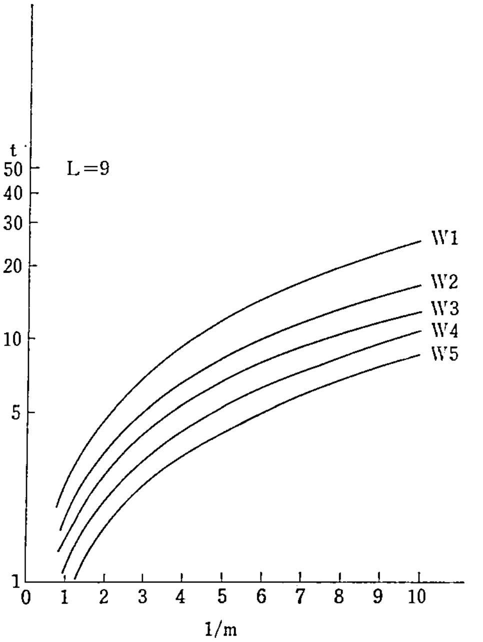
〔図5−6〕



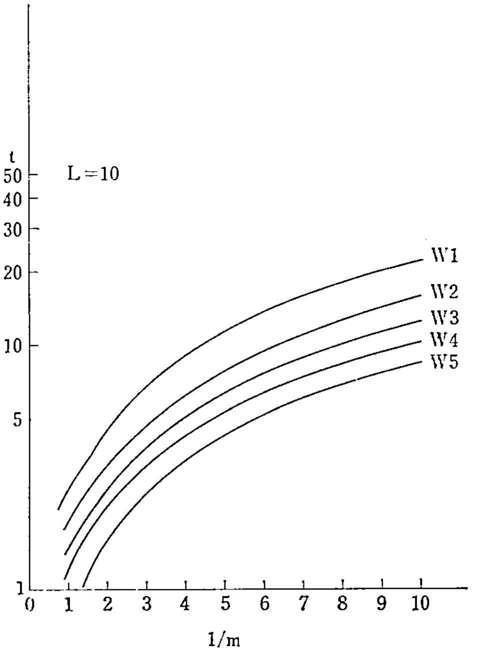
〔図5−7〕



〔図5−8〕



〔図5－9〕



〔図5－10〕

6. 計算図表の使い方

1） 不安定作業時間資料より作業時間を単位時間に分類し，最小作業時間を基準として，1，2，3，…の級をつけ，これをt_iで表わす。

2） 資料より作業時間の平均値$\bar{x}$，標準偏差σを求め，これをtの単位に変換する。変換した平均値を$\frac{1}{m}$，標準偏差をσ_tとする。

3） 変動係数を利用して，フェイズlを求める。

$$\text{変動係数}=\frac{\text{標準偏差}}{\text{平均値}}=\frac{\sigma_t}{\frac{1}{m}}=\frac{1}{\sqrt{l}}$$

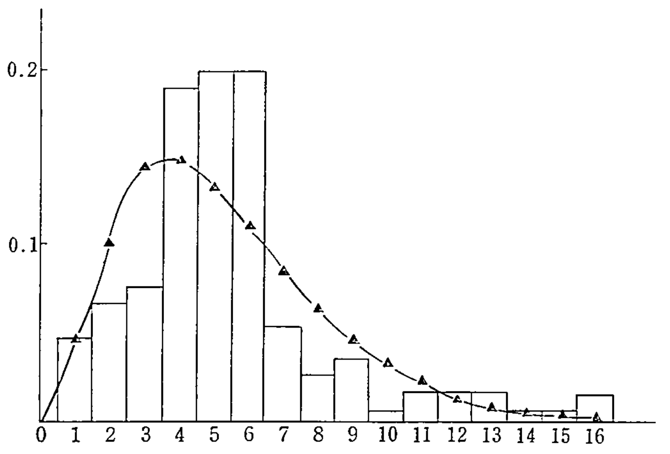
4） l，mの値が決定すると，フェイズlの図表で$\frac{1}{m}$の値と$W_n(t)$〔図表では$W1$，$W2$，などで表わす〕との交点が決定される。$W_n(t)$はそれらの連の現われる確率が0.1％を示しているから，交点のたて軸の値が求める異常作業時間tの限界値である。

7. 事例研究

〔例〕ある電子計算機の周辺機器を製造しているA社の組立工程の一つに調整作業がある。この調整作業時間は不安定で，バラツキがあり，ある確率分布をしていると思われる。最小の作業時間と最大の作業時間では約5倍の工数差があり，最大作業時間に近い作業が続くと，計画工数を大幅に越え，日程計画を変更しなければならない。もちろん作業時間が安定するように，種々の対策が行なわれているが，現状は作業時間がバラツクので，最大作業時間に近い作業時間が現われたとき，これが従来のバラツキの原因によって発生す

表 7—1

t_i	範　　囲	頻　度	出現率 f_i	$t_i f_i$	$t_i^2 f_i$	$f(t)^{\ell=3}_{m=0.184}$
1	120～150	5	0.0476	0.0476	0.0476	0.0484
2	150～180	7	0.0667	0.1334	0.2668	0.1115
3	180～210	8	0.0762	0.2286	0.6858	0.1445
4	210～240	20	0.1905	0.7620	3.0480	0.1479
5	240～270	21	0.2000	1.0000	5.0000	0.1331
6	270～300	21	0.2000	1.0000	7.2000	0.1103
7	300～330	5	0.0476	0.3332	2.3324	0.0865
8	330～360	3	0.0286	0.2288	1.8304	0.0650
9	360～390	4	0.0381	0.3429	3.0861	0.0474
10	390～420	1	0.0095	0.0950	0.9500	0.0337
11	420～450	2	0.0190	0.2090	2.2990	0.0235
12	450～480	2	0.0190	0.2280	2.7360	0.0135
13	480～510	2	0.0190	0.2470	3.2110	0.0109
14	510～540	1	0.0095	1.1330	1.8620	0.0073
15	540～570	1	0.0095	0.1425	2.1375	0.0048
16	570～600	2	0.0190	0.3040	4.8640	0.0031
	計	$\frac{1}{m}=5.4350$　　$\sigma=3.4666$				



〔図7—1〕

るものか，新しい原因によって発生するものかを判定し，もし新しい原因によって作業時間が長引くのであればこの原因を追求したい。この判定はどうすればよいか。

〔解〕一般に調整工程は作業安定化の種々の努力にもかかわらず不安定である。しかしその不安定の原因として，従来のものと新しいものとをすばやく判定して，新しい原因で作業時間が長引くのであれば，工程管理者は前工程並びに調整工程の再検討をなすべきであると思われる。そこで前述の理論をもとに，作業時間の確率分布からその出現率およびそれに続く作業の作業時間でできる連の起こる確率をもとめ，その値の大小によって，異常作業時間が起こっているかどうかを判定し，工程のアクションをとるかどうかの意志決

定をすればよい。

調整工程の作業時間の資料〔昭和50年４月１日から５月30日〕を整理した結果〔表７－１〕と〔図７－１〕を得た。

作業時間の範囲は120分から600分でこれを30分を単位時間とすると，級時間 t_i と標本作業時間 t_s の関係は

$$t_i=\frac{t_s-120}{30} \qquad (7\cdot1)$$

平均値$\frac{1}{m}$は

$$\frac{1}{m}=\sum_{i=1}^{16} t_i f_i=5.4350 \qquad (7\cdot2)$$

分散 $\sigma_i{}^2$ は

$$\sigma_t{}^2=\sum_{i=1}^{16} t_i{}^2 f_i-\left(\frac{1}{m}\right)^2=12.1740 \qquad (7\cdot3)$$

標準偏差 σ は

$$\sigma_t=\sqrt{12.0174}=3.4666 \qquad (7\cdot4)$$

次にアーラン分布のフェイズ ℓ を求める。変動係数との関係から

$$\frac{1}{\sqrt{\ell}}=\frac{\sigma}{\frac{1}{m}}=\frac{3.4666}{5.4350}=0.6378 \qquad (7\cdot5)$$

$$\therefore \quad \ell=2.4583 \qquad (7\cdot6)$$

ところが ℓ は正の整数でなければならない。そこで $\ell=2$ または $\ell=3$ で分布の近似を行なうと $\ell=3$ の方が資料の分布に近似するのでこれを採用する。$\ell=3$, $m=0.1839$のときの分布の理論値を△印で〔図７－１〕に示めす。

〔表 7—2〕

級 ＼ P_r	W 1	W 2	W 3	W 4	W 5
t_i	19	11	8	6	4
t_s(分)	690	450	360	300	240

従って $\ell=3$ の図表（図５－３）において，$\frac{1}{m}=5.4$の値と $W1$, $W2$, $W3$, …との交点のたて軸を調べると〔表７－２〕を得る。つまりこの t の値以上に上り連の現われる確率は0.1％以下で，これを管理限界として，管理者は作業時間の長引く原因の追求に動き出す意志決定の判断の数値を得たことになる。

8. 考　察

不安定作業時間の分布に関する資料は文献を調べたがみあたらなかった。ただアーランまたはガンマ分布の形の分布図で示めした推定は「作業測定便覧」(日刊工業新聞社刊）などには記載されている。この研究のために調査した資料でも，アーラン分布のフェイズ ℓ は正の整数だが，現実には小数が現われ，ガンマ分布で近似した方が正確であると思われる。しかし，実際にこの方法を用いると計算がめんどうで，数表の数も増大し，実用的でない。従って，実用の面で，アーラン分布を利用して，管理限界を求めた方が良いと思われる。またフェイズ数にしても，ここには記述してないが，$\ell=4$で近似できるものもある。

管理限界については，種々の条件によって，また会社のポリシーによって異ってくると思われるが，ここでは，工程の現状，3σ管理図のデータをもとに0.1%を管理限界とした。

理論式（4—9）についての証明はここでは述べてないが，正規分布の連について，加藤ライジ著「パーフェクト管理図法」，また指数密度について組合せを用いた方法で，W・フェラー著「確率論とその応用II」で述べられている。

終りに，論文のご指導をいただいた工学院大学の加藤・山崎両先生に謝意を表します。

9. 参考文献

1） W. フェラー（国沢清典監訳）：確率論とその応用II上，pp.24〜61，紀伊国屋書店，1974

2） 加藤ライジ：パーフェクト管理図法，pp.11〜13，工学図書㈱，昭和50年

3） 西田俊夫：待ち行列の理論と応用，p.65，p.216，朝倉書店，昭和46年

（昭和50年9月9日受理）