相異なる物質の二つの部分より成る円柱の熱伝導

I 一様な円柱の外側に一様な管がある場合

小 平 吉 男*

Conduction of Heat in a Circular Cylinder Composed of Two Parts with Different Physical Constants

I. Uniform Cylinder in a Uniform Circular Tube.

by *Yoshio KODAIRA*

To all physical quantities in the inner uniform circular cylinder we attach a suffix 1 and for those in the outer uniform circular tube a suffix 2 as shown in Fig 1. We use here the cylindrical coordinates r, θ, z, and the time t. We consider two cases.

A. An infinitely long cylinder whose temperatures u_1 and u_2 do not vary in the direction of the axis of the cylinder.

In this case all the physical constants are independent of z. We also suppose that they are independent of θ. The equations for the conduction of heat in the two regions are given by (1) and (2), κ_1^2 and κ_2^2 being the thermal diffusivities.

The temperature at the surface of the cylinder $r=a$ is supposed to be zero, i. e. the bouudary condition at $r=a$ is given by (3). At the boundary $r=a_1$ of the inner cylinder and the outer tube, the boundary conditions are supposed to be (4) and (5), where k_1 and k_2 are the thermal conductivities. The initial conditions are given by (6) and (7), where $f_1(r)$ and $f_2(r)$ arbitrary functions of r.

The elementary solutions of the partial differential equations have the forms (8) and (9), where $J_0(\kappa_2\alpha_1 r)$ is a Bessel function of order 0 with the argument $\kappa_2\alpha_1 r$ and $J_0(\kappa_1\alpha_2 r)$, $Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)$ are a Bessel function and a Neumann function of order 0 with the argument $\kappa_1\alpha_2 r$. α_1 and α_2 are determined by the boundary conditions, $\kappa_2\alpha_1$,

---

* 理工学部物理学科教授　物理数学
この論文は本学第7期生小野徹君が著者の指導の下に行った卒業論文の不適当な点を正し，体裁を整えたものである。

$\kappa_1\alpha_2$ being the eigenvalues. $A_{\alpha 1}$, $B_{\alpha 2}$, $C_{\alpha 2}$ are the integration constants which may include α_1 or α_2.

By using the boundary conditions (3)~(5), we find that the constants α_1 and α_2 are equal, and they are determined by eq. (17). The values of α are calculated from the intersections of two curves (18), which are shown in Fig.2. If we denote by α_s the sth positive root of (18), the solutions of the differential equations satisfyng the boundary conditions have the form (21) and (22), M_s being the constants determined by the initial conditions.

Inserting the initial conditions (6) and (7) in (21) and (22) respectively, we get the equations (26) and (27), where X_s and Z_s are given by (23). If we can determine M_s from (26) and (27), the solutions of the problem will be obtained.

After somewhat tedious calculations, we get finally two experssions for $f_1(r)$ and $f_2(r)$ in the forms (33) and (34), where $V(\alpha_s)$ is given by (32).

By the use of the above expansions, the solutions u_1 and u_2 are given by (35) and (36).

B. Finite cylinder, the temperatures being bn functions of r and z.

The differential equations for the conduction of heat are given by (37) and (38), u_1 and u_2 being dependent of z as well as of r. In this case two more boundary conditions at the cross sections $z=0$ and $z=l$ are necessary, which are given by (42)~(45), l being the length of the cylinder.

The initial conditions are (46) and (47), where $f_1(r, z)$ and $f_2(r, z)$ avc arbitrary functions of r and z.

The elementary solutions of the partial differential equations (37) and (38) are given by (48) and (49). The constants $\kappa_2\alpha_1$, $\kappa_1\alpha_2$ are the eigenvalues which are to be determined by the boundary conditions (44) and (45), and the constants κ_2 β_1 and κ_2 β_1 are are the eigenvalues, which are to be deternimed by (39)~(41). The other onstants are quite similar to those in case A.

α_1 and α_2 are given by (50) and (51) The consants β_1 and β_2 are determined by (52) and (56). (51) is a hyperbola, but (56) gives complex curves, which are shown in Fig. 4. The intersections of these two curves give β_1 and β_2.

If we denote the s th positive roots β_1 and β_2 by $\beta_{1,s}$, $\beta_{2,s}$ respectively, the solutions of the differential equations satisfying the boundary conditions are given by (57) and (58), where u_0 (r,s) is a cylindrical function (57).

By inserting the initial conditions (46) and (47) in (57) and (58), we obtain (61) and (62). These are the expansions of $f_1(r,z)$ and $f_2(r,z)$ in double series.These expansions are somewhat complex and obtained by similar calculations as in case A.

They are given by (73) and (74), where $V(\beta_{1,s}, \beta_{2,s})$ is given by (70).

By the aid of these expansions, the solutions of the problem u_1 and u_2 are given by (76) and (77).

A. 温度が軸方向に変化しない場合

中心部にある一様な円柱の温度を u_1, 半径を a_1, 外側の一様な管の温度を u_2 管の内径を a_1, 外径を a とする。円柱座標 r, θ, z を用いて，熱伝導の微分方程式を書けば，

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\kappa_1{}^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right),\ [a\leqq r\leqq a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\kappa_2{}^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}\right),\ [a_1\leqq r\leqq a] \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

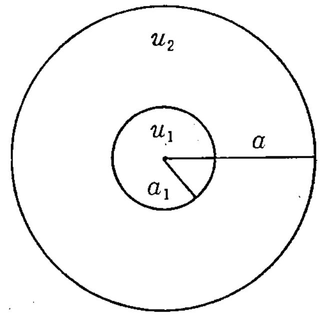
となる。中心部の円柱の物理量に対しては1なる脚符，外の管の物理量に対しては2なる脚符をつけて表わしてある。$\kappa_1{}^2$, $\kappa_2{}^2$ は熱拡散率，t は時間を表わす。温度は z には無関係としているので，微分方程式には z が入つていない。

円柱の最外部 $r=a$ における温度を0とすれば，其処の境界条件は

$$(u_2)_{r=a}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

と書ける。二つの物質の境界面 $r=a_1$ における境界条件として

$$(u_1)_{r=a1}=(u_2)_{r=a1} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$



第1図 Fig. 1

$$k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a1}=k_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a1} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

を用いる。k_1, k_2 は熱伝導率を表わす。初期条件を

$$(u_1)_{t=0}=f_1(r), \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$(u_2)_{t=0}=f_2(r) \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

とする。$f_1(r), f_2(r)$ は r の任意の関数である。

微分方程式(1), (2)の解は

$$u_1=A_{\alpha_1}e^{-\kappa\alpha_1{}^2\kappa\alpha_2{}^2\alpha_1{}^2t}J_0(\kappa_2\alpha_1 r) \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$u_2=e^{-\kappa\alpha_1{}^2\kappa\alpha_2{}^2\alpha_2{}^2t}\{B_{\alpha_2}J_0(\kappa_1\alpha_2 r)+C_{\alpha_2}Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)\} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

なる形に書くことが出来る。α_1, α_2 は固有値 $\kappa_2\alpha_1, \kappa_1\alpha_2$ から決まる定数である。又 $A_{\alpha 1}$ は α_1 を含むが t, r を含まない積分定数，$B_{\alpha_2}, C_{\alpha_2}$ は α_2 を含むが t, r を含まない積分定数である。$J_0(\kappa_2\alpha_1 r)$, $J_0(\kappa_1\alpha_1 r)$ は0次の Bessel 関数，$Y_0(\kappa_1\alpha_2 r)$ は0次の Neumann 関数を表わす。

境界条件(4), (5)が t の如何に関らず満足するためには(8), (9)の指数関数が等しければよい。即ち

$$\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_1{}^2=\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_2{}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

となればよい。これから

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

の如く採れば(10)は満足される。

境界条件(3)により，

$$B_\alpha J_0(\kappa_1\alpha a)+C_\alpha Y_0(\kappa_1\alpha a)=0$$

となればよい。新しい定数 D_α を用いて

$$B_\alpha=\frac{D_\alpha}{J_0(\kappa_1\alpha a)},\ C_\alpha=-\frac{D_\alpha}{Y_0(\kappa_1\alpha a)} \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

の如く置けば，上式は満足される。

(11)，(12)により u_1, u_2 は

$$u_1=A_\alpha e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}J_0(\kappa_2\alpha r) \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

$$u_2=D_\alpha e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha r)}{J_0(\kappa_1\alpha a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha r)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

と書くことができる。

境界条件(4)，(5)により，(13)，(14)から，

$$J_0'(x)=-J_1(x),\quad Y_0'(x)=-Y_1(x)$$

の関係を用いて

$$A_\alpha J_0(\kappa_2\alpha a_1)=D_\alpha\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}\right), \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

$$A_\alpha k_1\kappa_2\alpha J_1(\kappa_2\alpha a_1)=D_\alpha k_2\kappa_1\alpha\left(\frac{J_1(\kappa_1\alpha a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha a)}-\frac{Y_1(\kappa_1\alpha a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

が得られる。

$\alpha\fallingdotseq 0$ と仮定すれば，(15)，(16)から α は

$$k_1\kappa_2\frac{J_1(\kappa_2\alpha a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha a)}=k_2\kappa_1\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha a)}-\dfrac{Y_1(\kappa_1\alpha a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}} \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

から決定される。$\alpha=0$ の場合には

$$J_0(0)=1$$

である。又 α が小さいときには

$$Y_0(\kappa_1\alpha r)\fallingdotseq\frac{2}{\pi}J_0(\kappa_1\alpha r)\log(\kappa_1\alpha r),\quad Y_0(\kappa_1\alpha a)\fallingdotseq\frac{2}{\pi}J_0(\kappa_1\alpha a)\log(\kappa_1\alpha a)$$

であるから，

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{Y_0(\kappa_1\alpha r)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log(\kappa_1\alpha r)}{\log(\kappa_1\alpha a)}=1$$

であるから，(13)，(14)は

$$u_1=A_0,$$

$$u_2=D_0(1-1)=0$$

となり，境界条件(4)，(5)によれば，

$$A_0=0$$

であり，従って $u_1=0$，$u_2=0$ となるので $\alpha=0$ の場合を考える必要がない。

従って α は(17)から決定され，固有値 $\kappa_2\alpha$，$\kappa_1\alpha$ も計算できる。(17)の根は

$$\eta=k_1\kappa_2\frac{J_1(\kappa_2\alpha a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha a)}, \qquad \cdots\cdots\cdots(18\text{-}1)$$

$$\eta=k_2\kappa_1\frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\alpha a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha a)}-\dfrac{Y_1(\kappa_1\alpha a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha a_1)}{J_1(\kappa_1\alpha a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha a_1)}{Y_1(\kappa_1\alpha a)}} \qquad \cdots\cdots\cdots(18\text{-}2)$$

を α，η を座標として図を画き，その交点を求めればよい。第2図にこれら二曲線の交る模様が画かれている。（図では $k_1=1$，$k_2=2$，$\kappa_1=1$，$\kappa_2=1.2$． $a_1=1$，$a=1.2$ として

$$\eta=1.2\frac{J_1(1.2\alpha)}{J_0(1.2\alpha)} \qquad \eta=2\frac{\dfrac{J_1(\alpha)}{J_0(1.2\alpha)}-\dfrac{Y_1(\alpha)}{Y_0(1.2\alpha)}}{\dfrac{J_0(\alpha)}{J_0(1.2\alpha)}-\dfrac{Y_0(\alpha)}{Y_0(1.2\alpha)}}$$

が画かれている。)

(16)から決定される正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを α_s と書き，$A_{\alpha s}$, $D_{\alpha s}$ を単に A_s, D_s と書くときは，(13)，(14)から

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty} A_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\ J_0(\kappa_2\alpha_s r), \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty} D_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\ \left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_s r)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_s r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

とすることができる。境界条件(3)により

$$A_s J_0(\kappa_1\alpha_s a_1)=D_s\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}\right)\equiv M_s$$

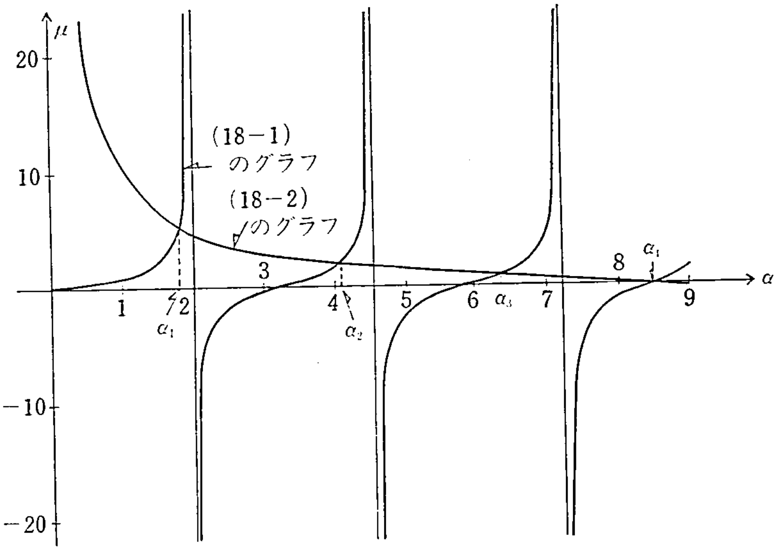
と置くこととすれば，微分方程式(1)，(2)，境界条件(3)～(5)を満足する解は

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\ \frac{J_0(\kappa_2\alpha_s r)}{J_0(\kappa_2\alpha_2 a)}, \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\ \frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_s r)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_2\alpha_s r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_{s1} a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}} \qquad \cdots\cdots\cdots(22)$$

となる。簡単のために

$$X_s=\frac{J_0(\kappa_2\alpha_s r)}{J_0(\kappa_2\alpha_s a)}, \qquad Z_s=\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_s r)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_s r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}} \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$



第2図　Fig. 2

と置くときは

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t} X_s, \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty} M_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t} Z_s \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

と書くことができる。

(24), (25)に初期条件(6), (7)を入れれば

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty} M_s X_s, \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty} M_s Z_s \qquad \cdots\cdots\cdots(27)$$

となる。これら二式を満足するように M_s を決定すれば問題は解かれる。

M_s を決定するために(26)に $k_1\kappa_2^2 X_p r$ をかけて 0 から a_1 まで積分し，(27) に $k_2\kappa_1^2 Z_p r$ をかけて a_1 から a まで積分したものを加え合せる：

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} f_1(r)X_p r dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} f_2(r)Z_p r dr$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty} M_s\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} X_s X_p r dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} Z_s Z_p r dr\right), \qquad \cdots\cdots\cdots(28)$$

この式の左辺を計算しなくてはならない。X_s も Z_s も円柱関数であるから，その性質を用いて積分を行う。今

$$\frac{J_n(\kappa_1\alpha_s r)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\frac{Y_n(\kappa_1\alpha_s r)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}=u_n(r, s) \qquad \cdots\cdots\cdots(29)$$

と書くときは，これも円柱関数であり，

$$\frac{J_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}=u_0(a_1, s),$$

$$\frac{J_1(\kappa_1\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\frac{Y_1(\kappa_1\alpha_s a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}=u_1(a_1, s)$$

と書くことができる。又 $u_0(a, s)=0$である。

先ず $s\fallingdotseq p$ として次の計算を行う。

$$\int_0^{a_1} X_s X_p r dr=\frac{1}{J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}\int_0^{a_1} J_0(\kappa_2\alpha_s r)J_0(\kappa_2\alpha_p r) r dr,$$

$$\int_0^{a_1} J_0(\kappa_2\alpha_s r)J_0(\kappa_2\alpha_p r) r dr$$

$$=\frac{\Big[\kappa_2\alpha_p r J_0(\kappa_2\alpha_s r)J_{-1}(\kappa_2\alpha_p r)-\kappa_2\alpha_s r J_{-1}(\kappa_2\alpha_s r)J_0(\kappa_2\alpha_p r)\Big]_0^{a_1}}{\kappa_2^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)}$$

$$=\frac{-\kappa_2\alpha_p a_1 J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)J_1(\kappa_2\alpha_p a_1)+\kappa_2\alpha_s a_1 J_1(\kappa_2\alpha_s a_1)J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}{\kappa_2^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)};$$

$$\int_{a_1}^{a} Z_s Z_p r dr=\frac{1}{u_0(a_1, s)u_0(a_1, p)}\int_{a_1}^{a} u_0(r, s)u_0(r, p) r dr$$

$$\int_{a_1}^{a} u_0(r, s)u_0(r, p) r dr$$

$$=\frac{\Big[\kappa_1\alpha_p r u_0(r, s)u_1(r, p)-\kappa_1\alpha_s r u_{-1}(r, s)u_0(r, p)\Big]_{a_1}^{a}}{\kappa_1^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)}$$

$$=\frac{\Big[-\kappa_1\alpha_p r u_0(r,s)u_1(r,p)+\kappa_1\alpha_s r u_1(r,s) r u_1(r,p)\Big]_{a_1}^{a}}{\kappa_1^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)}$$

$$=\frac{\kappa_1\alpha_p a_1 u_0(a_1,s)u_1(a_1,p)-\kappa_1\alpha_s a_1 u_1(a_1,s)u_0(a_1,p)}{\kappa_1^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)}$$

であるから,

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} X_s X_p r dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} Z_s Z_p r dr$$

$$=\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)\,J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}$$

$$\times\frac{-\kappa_2\alpha_s a_1\,J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)\,J_1(\kappa_2\alpha_p a_1)+\kappa_2\alpha_s a_1\,J_1(\kappa_2\alpha_s a_1)\,J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}{\kappa_2^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)}$$

$$+\frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)u_0(a_1,p)}$$

$$\times\frac{\kappa_1\alpha_p a_1 u_0(a_1,s)u_1(a_1,p)-\kappa_1\alpha_s a_1 u_1(a,s)u_0(a_1,p)}{\kappa_1^2(\alpha_s^2-\alpha_p^2)}$$

$$=\frac{k_1 a_1}{\alpha_s^2-\alpha_p^2}\left(-\kappa_2\alpha_p\frac{J_1(\kappa_2\alpha_p a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}+\kappa_2\alpha_s\frac{J_1(\kappa_2\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)}\right)$$

$$+\frac{k_2 a_1}{\alpha_s^2-\alpha_p^2}\left(\kappa_1\alpha_p\frac{u_1(a_1,p)}{u_0(a_1,p)}-\kappa_1\alpha_s\frac{u_1(a_1,s)}{u_0(a_1,s)}\right)$$

$$=\frac{a_1}{\alpha_s^2-\alpha_p^2}\left\{-\left(k_1\kappa_2\alpha_p\frac{J_1(\kappa_2\alpha_p a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}-k_2\kappa_1\alpha_p\frac{u_1(a_1,p)}{u_0(a_1,p)}\right)\right.$$

$$\left.+\left(k_1\kappa_2\alpha_s\frac{J_1(\kappa_2\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)}-k_2\kappa_1\alpha_s\frac{u_1(a_1,s)}{u_0(a_1,s)}\right)\right\} \qquad\cdots\cdots\cdots(30)$$

となる。境界条件(5)を(29)の書き方を用いて書けば,

$$k_1\kappa_2\alpha_s\frac{J_1(\kappa_2\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_s a_1)}=k_2\kappa_1\alpha_s\frac{u_1(a_1,s)}{u_0(a_1,s)},$$

$$k_1\kappa_2\alpha_p\frac{J_1(\kappa_2\alpha_p a_1)}{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)}=k_2\kappa_1\alpha_p\frac{u_1(a_1,p)}{u_0(a_1,p)}$$

と書けるから,

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} X_s X_p r dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} Z_s Z_p r dr=0 \qquad\cdots\cdots\cdots(31)$$

となることが言われる。

次に $s=p$ の場合を考える。

$$\int_a^{a_1} X_p^2 r dr=\frac{1}{\{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)\}^2}\int_0^{a_1}\{J_0(\kappa_2\alpha_p r)\}^2 r dr$$

$$=\frac{1}{\{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)\}^2}\left[\frac{r^2}{2}\,\{J_0'(\kappa_2\alpha_p r)\}^2+\{J_0(\kappa_2\alpha_p r)\}^2\right]_0^{a_1}$$

$$=\frac{1}{\{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)\}^2}\frac{a_1^2}{2}\left[\{J_1(\kappa_2\alpha_p a_1\}^2+\{J_0(\kappa_2\alpha_p a_1)\}^2\right],$$

$$\int_{a_1}^{a} Z_p^2 r dr=\frac{1}{\{u_0(a_1,p)\}^2}\int_{a_1}^{a}\{u_0(r,p)\}^2 r dr$$

$$=\frac{1}{\{u_0(a_1,p)\}^2}\left[\frac{r^2}{2}\{(u_0'(r,p)\}^2+\{u_0(r,p)\}^2\}\right]_{a_1}^{a}$$

$$=\frac{1}{\{u_0(a_1,p)\}^2}\left[\frac{a^2}{2}\{u_1(a,p)\}^2-\frac{a_1^2}{2}\{(u_1(a_1,p))^2+(u_0(a_1,p))^2\}\right]$$

であるから，

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_p^2rdr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}Z_p^2rdr$$
$$=\frac{k_1\kappa_2^2a_1^2}{2\{J_0(\kappa_2\alpha_pa_1)\}^2}[\{J_1(\kappa_2\alpha_pa_1)\}^2+\{J_0(\kappa_2\alpha_pa_1)\}^2]$$
$$+\frac{k_2\kappa_1^2}{2\{u_0(a_1,p)\}^2}[a^2\{u_1(a,p)\}^2-a_1^2\{(u_1(a_1,p))^2+(u_0(a_1,p))^2\}]$$
$$\equiv V(\alpha_p) \qquad \cdots\cdots\cdots(32)$$

となる。(32)の複雑な式を簡単のために $V(\alpha_p)$ と書くこととする。

以上の計算により M_p は

$$M_p=\frac{1}{V(\alpha_p)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_p\lambda d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)Z_p\lambda d\lambda\right)$$

となる。これにより任意の関数 $f_1(r)$，$f_2(r)$ の展開式は次の如くなる：

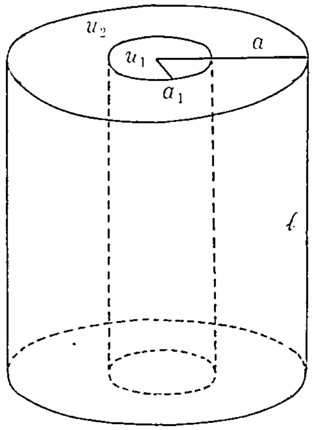
$$f_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_s$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_s}{V(\alpha_s)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_s\lambda d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)Z_s\lambda d\lambda\right)$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_sr)}{J_0(\kappa_2\alpha_sa_1)}}{V(\alpha_s)}\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_sa_1)}\int_0^{a_1}f_1(\lambda)J_0(\kappa_2\alpha_s\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_1\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)u_0(\lambda,s)\lambda d\lambda\right),$$

$$f_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sZ_s$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{Z_s}{V(\alpha_s)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_s\lambda d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)Z_s\lambda d\lambda\right)$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{u_0(r,s)}{u_0(a_1,s)}}{V(\alpha_s)}\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_sa_1)}\int_0^{a_1}f_1(\lambda)J_0(\kappa_2\alpha_s\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)u_0(\lambda,s)\lambda d\lambda\right). \qquad \cdots\cdots\cdots(34)$$

$f_1(r)$，$f_2(r)$ の展開式が得られたので，求める解は次の如く変えられる：

$$u_1=\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2t}\;\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\alpha_sr)}{J_0(\kappa_2\alpha_sa_1)}}{V(\alpha_s)}\left\{\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\alpha_sa_1)}\int_0^{a_1}f_1(\lambda)J_0(\kappa_2\alpha_s\lambda)\lambda d\lambda\right.$$
$$+\frac{k_2\kappa_1^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_sa_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_sa)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_sa_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_sa)}}$$
$$\left.\times\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_s\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_sa)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_s\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_sa)}\right)\lambda d\lambda\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(35)$$

$$u_2=\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2t}\;\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_sr)}{J_0(\kappa_1\alpha_sa)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_sr)}{Y_0(\kappa_1\alpha_sa)}}{V(\alpha_s)}$$



第3図　Fig. 3

$$\times\left\{\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}\int_0^{a_1} f_1(\lambda)J_0(\kappa_2\alpha_s\lambda)\lambda d\lambda\right.$$

$$+\frac{k_2\kappa_1^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\alpha_s a_1)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}}$$

$$\left.\times\int_{a1}^{a} f_2(\lambda)\left(\frac{J_0(\kappa_1\alpha_s\lambda)}{J_0(\kappa_1\alpha_s a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\alpha_s\lambda)}{Y_0(\kappa_1\alpha_s a)}\right)\lambda d\lambda\right\}\quad\cdots\cdots(36)$$

但し $V(\alpha_s)$ は(32)で与えられる複雑な式である。

B　温度が軸方向に変化する場合

今度は温度が軸方向にも変化する場合，即ち温度が，z の関数でもある場合を考える。円柱の長さは l であるとする。

熱伝導の微分方程式としては(1)，(2)の代りに

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\kappa_1^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right),\quad [0\leqq r\leqq a_1],\quad\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\kappa_2^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right),\quad [a_1\leqq r\leqq a]\quad\cdots\cdots\cdots(38)$$

を用いる。$r=a$, $r=a_1$ における境界条件はAの場合と同じである：

$$(u_2)_{r=a}=0,\quad\cdots\cdots\cdots(39)$$

$$(u_1)_{r=a_1}=(u_2)_{r=a_1},\quad\cdots\cdots\cdots(40)$$

$$k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a_1}=k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a_1}.\quad\cdots\cdots\cdots(41)$$

今度は $z=0$, $z=l$ における境界条件が必要である。其処の条件として

$$(u_1)_{z=0}=0,\quad (u_1)_{z=l}=0,\quad\cdots\cdots\cdots(42),\ (43)$$

$$(u_2)_{z=0}=0,\quad (u_2)_{z=l}=0\quad\cdots\cdots\cdots(44),\ (45)$$

を採る。初期条件は

$$(u_1)_{t=0}=f_1(r,z),\quad\cdots\cdots\cdots(46)$$

$$(u_2)_{t=0}=f_2(r,z)\quad\cdots\cdots\cdots(47)$$

なる形となる。

微分方程式(37)，(38)の解は

$$u_1=G_{\alpha_1,\beta_1}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2(\alpha_1^2+\beta_1^2)t}(A_{\alpha_1}\cos\kappa_2\alpha_1 z+B_{\alpha_1}\sin\kappa_2\alpha_1 z)\,J_0(\kappa_1\beta_1 r),\quad\cdots\cdots(48)$$

$$u_2 = H_{\alpha_2,\beta_2} e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)t}(C_{\alpha_2}\cos\kappa_1\alpha_2 z + D_{\alpha_2}\sin\kappa_1\alpha_2 z)$$
$$\times\{E_{\beta_1} J_0(\kappa_1\beta_2 r) + F_{\beta_2} Y_0(\kappa_1\beta_2 r)\} \quad \cdots\cdots\cdots(49)$$

となる。定数の用い方はAの場合と同じである。

境界条件(42), (43)から

$$A_{\alpha_1}=0, \qquad \alpha_1=\frac{m\pi}{\kappa_2 l}, \qquad [m=1, 2, \cdots\cdots\cdots],$$

$$C_{\alpha_2}=0, \qquad \alpha_2=\frac{m\pi}{\kappa_1 l} \qquad [m=1, 2, \cdots\cdots\cdots]$$

とすればよいことが分るであろう。

境界条件(40), (41)が t の如何に拘らず成立するためには

$$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2=\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2$$

が成立すればよい。即ち

$$\left(\frac{m\pi}{\kappa_2 l}\right)^2+\beta_1{}^2=\left(\frac{m\pi}{\kappa_1 l}\right)^2+\beta_2{}^2 \quad \cdots\cdots\cdots(52)$$

が成立すればよいことになる。

境界条件(39)を満足するためには,

$$E_{\beta_2} J_0(\kappa_1\beta_2 a)+F_{\beta_2} Y_0(\kappa_1\beta_2 a)=0$$

となればよい。Aの場合を同様に新しい定数 I_{β_2} を用いて

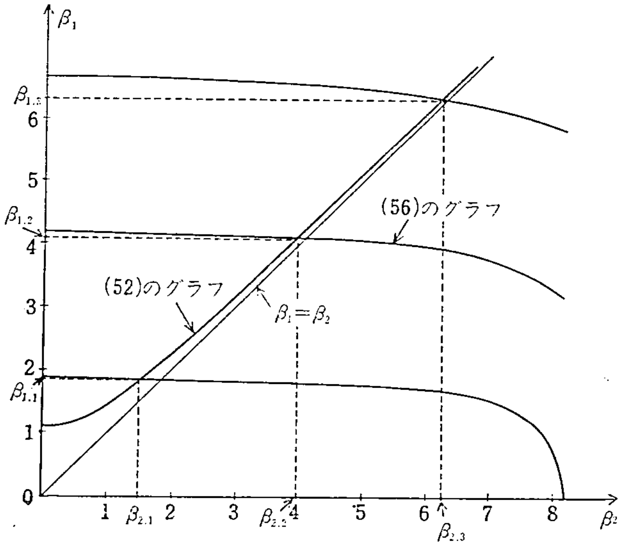
$$E_{\beta_2}=\frac{I_{\beta_2}}{J_2(\kappa_1\beta_2 a)}, \quad F_{\beta_2}=-\frac{I_{\beta^2}}{Y_0(\kappa_1\beta_2 a)} \quad \cdots\cdots\cdots(53)$$

の如く E_{β_2}, F_{β_2} を採ればよい。

境界条件(40), (41)を満足するために , (50), (51), (52)をは考慮に入れれば

$$G_{\alpha_1,\beta_1}A_{\alpha_1} J_0(\kappa_2\beta_1 a_1)=H_{\alpha_1,\beta_2} C_{\alpha_2} I_{\beta_2}\left(\frac{J_0(\kappa_1\beta_2 a_1)}{J_0(\kappa_1\beta_2 a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\beta_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_2 a)}\right), \quad \cdots\cdots\cdots(54)$$

$$G_{\alpha_1,\beta_1}A_{\alpha_1}k_1\kappa_2\beta_1 J_1(\kappa_2\beta_1 a_1)$$



第4図 Fig. 4

$$= H_{\alpha_2,\beta_2} C_{\alpha_2} I_{\beta_2} k_2 \kappa_1 \beta_2 \left(\frac{J_1(\kappa_1\beta_2 a_1)}{J_0(\kappa_1\beta_2 a)} - \frac{Y_1(\kappa_1\beta_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_2 a)} \right) \cdots\cdots\cdots (55)$$

となればよいことが分るであろう。Aの場合と同様に $\beta_1 \fallingdotseq 0$, $\beta_2 \fallingdotseq 0$ と考えてよいから(54), (55)から

$$k_1\kappa_2\beta_1 \frac{J_1(\kappa_2\beta_1 a_1)}{J_0(\kappa_2\beta_1 a_1)} = k_2\kappa_1\beta_2 \frac{\dfrac{J_1(\kappa_1\beta_2 a_1)}{J_0(\kappa_0\beta_2 a)} - \dfrac{Y_1(\kappa_1\beta_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_2 a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\beta_2 a_1)}{J_0(\kappa_1\beta_2 a)} - \dfrac{Y_0(\kappa_1\beta_2 a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_2 a)}} \cdots\cdots\cdots (56)$$

が得られる。Aの場合には $\beta_1 = \beta_2$ であったが，この場合はこれが異なる。

(52)と(56)とから β_1, β_2 が決定され，それから固有値が求められる。(52)は双曲線であるが，(56)は複雑な曲線である。第4図に(52)と(56)を図示した例を掲げてある。(図では $k_1=1$, $k_2=2$, $\kappa_1=1$, $\kappa_2=1.2$, $a_1=1$, $a=1.2$, $m=2$, $l=3.14$ としてある。)

(52), (53)が決定される β_1, β_2 の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを夫々 $\beta_{1,s}$, $\beta_{2,s}$ と書くことにすれば，微分方程式(37), (38), 境界条件(38)〜(45)を満足する解は

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} K_{m,s}\, e^{-k_1^2 K_2^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{\kappa_2 l} \right)^2 + \beta_{1,s}^2 \right\} t} \sin\frac{m\pi}{l} z \frac{J_0(k_2\beta_{1,s} r)}{J_0(k_2\beta_{1,s} a_1)}, \cdots\cdots\cdots (57)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} K_{m,s}\, e^{-k_1^2 K_2^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{\kappa_1 l} \right)^2 + \beta_{2,s}^2 \right\} t} \sin\frac{m\pi}{l} z \frac{u_0(r,s)}{u_0(a_1,s)} \cdots\cdots\cdots (58)$$

なる形に書かれる。但し $u_0(r,s)$ はAの場合と同様に

$$u_0(r,\ s) = \frac{J_0(k_1\beta_{2,s} r)}{J_0(k_1\beta_{2,s} a)} - \frac{Y_0(k_1\beta_{2,s} r)}{Y_0(k_1\beta_{2,s} a)} \cdots\cdots\cdots (59)$$

と置いてある。又境界条件(40)を満足するために

$$G_{\frac{m\pi}{\kappa_2 l},\ \beta_{1,s}} B_{\frac{m\pi}{k_2 l}} = \frac{K_{m,s}}{J_0(\kappa_2\beta_{2s} a)},\ H_{\frac{m\pi}{\kappa_1 l}}\ D_{\frac{m\pi}{\kappa_1 l}}\ I_{\beta 2,s} = \frac{K_{m,s}}{u_0(a_1,s)} \cdots\cdots\cdots (61)$$

と書いてある。

初期条件(46), (47)を(57), (58)に入れれば

$$f_1(r,\ z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} K_{m,s} \sin\frac{m\pi}{l} z \ \frac{J_0(\kappa_2\beta_{1,s} r)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s} a_1)}, \cdots\cdots\cdots (61)$$

$$f_2(r,\ z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} K_{m,s} \sin\frac{m\pi}{l} z \ \frac{u_0(r,s)}{u_0(a,s)} \cdots\cdots\cdots (62)$$

となる。このような展開式が得られれば解が求められる。

(61), (62)の展開の中 z に関するものは Fourier 級数を用いて

$$f_1(r,z) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi}{l} z \int_0^l f_1(r,\lambda) \sin\frac{m\pi}{l} \lambda\, d\lambda, \cdots\cdots\cdots (63)$$

$$f_2(r,z) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi}{l} z \int_0^l f_2(r,\lambda) \sin\frac{m\pi}{l} \lambda\, d\lambda \cdots\cdots\cdots (64)$$

となるから，これらを(61), (62)に入れて考えれば

$$\frac{2}{l} f_1(r,\ \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} K_{m,s} \frac{J_0(\kappa_2\beta_{1,s} r)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s} a_1)} \cdots\cdots\cdots (65)$$

$$\frac{2}{l} f_2(r,\ \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} K_{m,s} \frac{u_0(r,s)}{u_0(a,s)} \cdots\cdots\cdots (66)$$

なる展開が出来ればよいことになる。これはAにおける(26)，(27)の展開に相当する。今回は

$$X_s=\frac{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a)},\quad Z_s=\frac{\dfrac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}}{\dfrac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\beta_{1,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}} \qquad \cdots\cdots\cdots(67)$$

と置き，

$$K_{m,s}=\frac{2}{l}M_s \qquad \cdots\cdots\cdots(68)$$

と考えればよい。

Aの場合と同じ計算方法により，

$$k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}X_sX_prdr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}Z_sZ_prdr$$

$$=\frac{k_1\kappa_2{}^2}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)\ J_0(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)}$$

$$\times\frac{-\kappa_2\beta_{1,p}a_1J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)J_1(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)-\kappa_2\beta_{1,s}a_1J_1(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)J_0(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)}{\beta_{1,s}{}^2-\beta_{1,p}{}^2}$$

$$+\frac{k_2}{u_0(a_1,s)u_0(a_1,p)}\ \frac{\kappa_1,\beta_{2,p}a_1\,u_0(a_1,s)u_1(a_1,p)-\kappa_1\beta_{2},sa_1\,u_1(a_1s)u_0(a_1,p)}{\beta_{2,s}{}^2-\beta_{2,p}{}^2}$$

$$=\frac{a_1}{\beta_{1,s}{}^2-\beta_{1,p}{}^2}\left(-k_1\kappa_2\beta_{1,p}\frac{J_1(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)}+k_1\kappa_2\,\beta_{1,s}\frac{J_1(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}\right)$$

$$+\frac{a_1}{\beta_{2,s}{}^2-\beta_{2,p}{}^2}\left(k_2\kappa_1\beta_{2,p}\frac{u_1(a_1,p)}{u_0(a_1,p)}-k_2\kappa_1\beta_{2,s}\frac{u_1(a_1,s)}{u_0(a_1,s)}\right)$$

となる。然るに(52)から

$$\beta_{1,s}{}^2-\beta_{1,p}{}^2=\beta_{2,s}{}^2-\beta_{2,p}{}^2$$

であり，又境界条件 (41) により

$$k_1\kappa_2\,\beta_{1,s}\frac{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}{J_2(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}=k_2\kappa_1\beta_{2,s}\frac{u_1(a_1,s)}{u_0(a_1,s)}\ ,$$

$$k_2\kappa_1\,\beta_{1,p}\frac{J_1(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)}=k_2\kappa_1\beta_{2,p}\frac{u_1(a_1,p)}{u_0(a_1,p)}$$

であるから，

$$k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}X_sX_prdr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}Z_sZ_prdr=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(69)$$

となることが言われる。

$s=p$ のときにはAの場合と同様にして

$$k_1\kappa_2{}^2\int_o^{a_1}X_p{}^2rdr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}Z_p{}^2rdr$$

$$=\frac{k_1\kappa_2{}^2a_1{}^2}{2\{J_0(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)\}^2}\ [\{J_1(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)\}^2+\{J_0(\kappa_2\beta_{1,p}a_1)\}^2]$$

$$+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{2\{u_0(a_1,p)\}^2}\ [a^2\{u_1(a,p)\}^2-a_1{}^2\{(u_0(a_1,p)\}^2+\{u_1(a_1,p)\}^2]$$

$$\equiv V(\beta_{1,p},\beta_{2,p}) \qquad \cdots\cdots\cdots(70)$$

となる。(70)の右辺の複雑な式を $V(\beta_{1,p},\beta_{2,p})$ と書いてある。

上の計算によって

$$M_p=\frac{1}{V(\beta_{1,p},\beta_{2,p})}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_p^2\xi d\xi+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}Z_p^2\xi d\xi\right)$$

となり，

$$f_1(r,\lambda)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_s$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\dfrac{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}r)}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}}{V(\beta_{1,s},\beta_{2,s})}\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}\int_0^{a_1}f_1(\xi,\lambda)\,J_0(\kappa_2\beta_{1,s}\xi)\xi d\xi\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}f_2(\xi,\lambda)\,u_0(\xi,s)\xi d\xi\right),$$

$$f_2(r,\lambda)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sZ_s$$

$$=\frac{\dfrac{u_0(r,s)}{u_0(a_1,s)}}{V(\beta_{1,s},\beta_{2,s})}\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}\int_0^{a_1}f_1(\xi,\lambda)\,J_0(\kappa_2\beta_{1,s}\xi)\xi d\xi\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}f_2(\xi,\lambda)u_0(\xi,s)\xi d\xi\right)$$

なる展開式が得られる。

(65), (66), (68), (71), (72)により次の展開式が得られる：

$$f_1(r,z)=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi}{l}z\,J_0(\kappa_2\beta_{1,s}r)}{V(\beta_{1,s},\beta_{2,s})\,J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}$$
$$\times\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\beta_{,s}a_1)}\int_0^{a_1}\int_0^{l}f_1(\xi,\lambda)\sin\frac{m\pi}{l}\lambda\,J_0(\kappa_2\beta_{1,s}\xi)\xi d\xi d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}\int_0^{l}f_2(\xi,\lambda)\sin\frac{m\pi}{l}\lambda\,u_0(\xi,s)\xi d\xi d\lambda\right),\qquad\cdots\cdots\cdots(73)$$

$$f_2(r,z)=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi}{l}z\,u_0(r,s)}{V(\beta_{1,s},\beta_{2},s)u_0(a_1,s)}$$
$$\times\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}\int_0^{a_1}\int_0^{l}f_1(\xi,\lambda)\ \sin\frac{m\pi}{l}\lambda J_0(\kappa_2\beta_{1,s}\xi)\xi d\xi d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{k_1\kappa_1^2}{u_0(a_1,s)}\int_{a_1}^{a}\int_0^{l}f_2(\xi,\lambda)\ \sin\frac{m\pi}{l}\lambda\,u_0(\xi,s)\xi d\xi d\lambda\right)\ .\qquad\cdots\cdots\cdots(74)$$

$f_1(r,z)$, $f_2(r,z)$ の展開式が(73), (74)の如く得られたので，本問題の解は次の如くなることが分るであろう：

$$u_1=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\quad e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\left\{\left(\frac{m\pi}{\kappa_2 l}\right)^2+\beta_{1,s}^2\right\}t}\ \frac{\sin\dfrac{m\pi}{l}zJ_0(\kappa_2\beta_{1,s}r)}{V(\beta_{1,s},\beta_{2,s})J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}$$

$$\times\left(\frac{k_1\kappa_2^2}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}\int_0^{a_1}\int_0^{l}f_1(\xi,\lambda)\ \sin\frac{m\pi}{l}\lambda\ J_0(\kappa_2\beta_{1,s}\xi)\xi d\xi\,d\lambda\right.$$
$$+\frac{k_2\kappa_1^2}{\dfrac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\dfrac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}}$$

$$\times \int_{a_1}^{a}\int_0^l f_2(\xi,\lambda)\ \sin\frac{m\pi}{l}\lambda\ \left(\frac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}\xi)}{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}\xi)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}\xi d\xi d\lambda\right), \quad \cdots\cdots(75)$$

$$u_2=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\ e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\left\{\left(\frac{m\pi}{\kappa_1 l}\right)^2+\beta_{2,s}{}^2\right\}t}\ \frac{\sin\frac{m\pi}{l}z\left(\frac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}r)}{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}r)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}\right)}{V(\beta_{1,s},\ \beta_{2,s})\left(\frac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{J_1(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}\right)}$$

$$\times\left(\frac{k_1\kappa_2{}^2}{J_0(\kappa_2\beta_{1,s}a_1)}\int_0^{a_1}\int_0^l f_1(\xi,\lambda)\ \sin\frac{m\pi}{l}\lambda\ J_0(u_2\beta_{1,s}\xi)\xi d\xi d\lambda\right.$$

$$+\frac{k_2\kappa_1{}^2}{\frac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a_1)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}}$$

$$\left.\times\int_{a_1}^{a}\int_0^l f_2(\xi,\lambda)\ \sin\frac{m\pi}{l}\lambda\left(\frac{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}\xi)}{J_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}-\frac{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}\xi)}{Y_0(\kappa_1\beta_{2,s}a)}\xi d\xi d\lambda\right)\right). \quad \cdots\cdots\cdots(76)$$

この式の中の $V(\beta_{1,s},\beta_{2,s})$ は(70)で与えられる複雑な式である。

(昭和50年9月2日受理)