

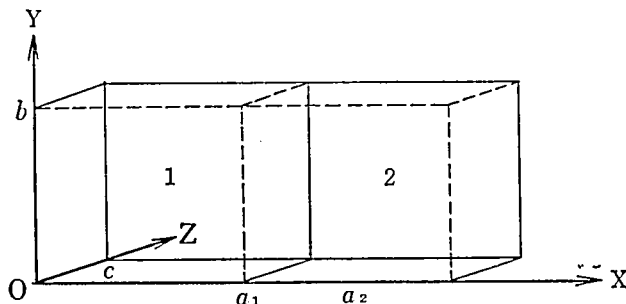
# 相異なる二つの物質より成る 四角な柱状固体の熱伝導\*

小 平 吉 男

Conduction of Heat in a Rectangular Prism made of  
Two Parts with Different Physical Constants

By Yoshio Kodaira

長さが  $a$  で矩形の両辺の長さが  $b, c$  である四角な柱状固体を考へ、 $x$  軸を長さの方向に、 $y, z$  軸をそれに直角の方向に採る。柱の  $x=0$  から  $x=a_1$  までは 1 なる物質、 $x=a_1$  から  $x=a$  までは 2 なる物質より成るとする(第 1 図)。1 の物質に対する諸量には 1 なる脚符 1, 2 の物質に対する諸量には 2 なる脚符を附けて表わすこととする。



第 1 図 Fig.1

1 及び 2 なる物質の部分は各一様であるとし、熱伝導の微分方程式として

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1^2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right), \quad [0 < x < a_1], \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2^2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right), \quad [a_1 < x < a] \quad (2)$$

を用いることとする。 $u_1, u_2$  は各部分における温度を表わす。二つの物質の境界面  $x=a_1$  於いては

$$(u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}, \quad k_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=a_1} = k_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=a_1} \quad (3), (4)$$

なる境界条件が成立するとする。

又初期条件は夫々の部分に対し次の如く採る：

$$(u_1)_{t=0} = f_1(x, y, z), \quad (u_2)_{t=0} = f_2(x, y, z). \quad (5), (6)$$

微分方程式(1), (2)に四角な柱の六つの面に於ける境界条件をいろいろ与えて解を求めることとする。

\* この論文は本学四期生黒田日出子、竹内晴海、勝岡由美子の諸君が著者の指導の下に行った卒業研究の一部をまとめたものである。

## I 第一の例として

$$(u_1)_{x=0}=0, \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=a}; \quad (7), (8)$$

$$(u_1)_{y=0}=0, (u_1)_{y=b}=0, (u_2)_{y=0}; (u_2)_{y=b}=0, \quad (9), (10), (11), (12)$$

$$(u_1)_{z=0}=0, (u_1)_{z=c}=0, (u_2)_{z=0}; (u_2)_{z=c}=0 \quad (13), (14), (15), (16)$$

の場合を考える。

微分方程式(1), (2)の特解は

$$u_1 = G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)t} (A_{\alpha_1} \cos \kappa_2 \alpha_1 x + B_{\alpha_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 x) \\ \times (C_{\beta_1} \cos \kappa_2 \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \kappa_2 \beta_1 y) (E_{\gamma_1} \cos \kappa_2 \gamma_1 z + F_{\gamma_1} \sin \kappa_2 \gamma_1 z); \quad (17)$$

$$u_2 = G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)t} \{A_{\alpha_2} \cos \kappa_1 \alpha_2 (a-x) + B_{\alpha_2} \sin \kappa_1 \alpha_2 (a-x)\} \\ \times (C_{\beta_2} \cos \kappa_1 \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \kappa_1 \beta_2 y) (E_{\gamma_2} \cos \kappa_1 \gamma_2 z + F_{\gamma_2} \sin \kappa_1 \gamma_2 z) \quad (18)$$

の如く書くことが出来る。  $A_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}, A_{\alpha_2}, B_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}$  は、脚符の定数は含むが、 $x, y, z, t$  は含まない定数とする。

境界条件(7), (8)により

$$A_{\alpha_1}=0, \quad B_{\alpha_2}=0 \quad (19)$$

となり、境界条件(9)~(16)により

$$C_{\beta_1}=0, C_{\beta_2}=0, E_{\gamma_1}=0, E_{\gamma_2}=0, \quad (20)$$

$$\kappa_2 \beta_1 = \frac{m\pi}{b}, \quad \kappa_1 \beta_2 = \frac{m\pi}{b}, \quad [m=1, 2, 3, \dots], \quad (21)$$

$$\kappa_2 \gamma_1 = \frac{n\pi}{c}, \quad \kappa_1 \gamma_2 = \frac{n\pi}{c}, \quad [n=1, 2, 3, \dots] \quad (22)$$

が得られる。

境界条件(3), (4)を満足させるには、(17), (18)の  $t$  を含む指数関数が等しければ好都合であることがわかる。それ故

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 \quad (23)$$

とする。(22)により、次のようになる：

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \frac{\pi^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 b^2 c^2} (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) (n^2 b^2 + m^2 c^2). \quad (24)$$

境界条件(3), (4)により

$$G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 = G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} A_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2; \quad (25)$$

$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \cos \kappa_2 \alpha_1 a_1 = k_2 \kappa_1 \alpha_2 G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} A_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 \quad (26)$$

なる関係を得る。但し  $a_2 = a - a_1$  と置いてある。(25)を満足させるためには

$$G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} = M_{m, n, \alpha_1, \alpha_2} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2, \quad (27)$$

$$G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} A_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} = M_{m, n, \alpha_1, \alpha_2} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 \quad (28)$$

と置けばよい。 $M_{m, n, \alpha_1, \alpha_2}$  は  $m, n, \alpha_1, \alpha_2$  を含む定数である。又(27), (28)から

$$\frac{\tan \kappa_2 \alpha_1 a_1}{\cot \kappa_1 \alpha_2 a_2} - \frac{k_1 \kappa_2 \alpha_1}{k_2 \kappa_1 \alpha_2} = 0 \quad (29)$$

なる関係が得られる。この式と(24)から  $\alpha_1, \alpha_2$  が決定される。(24), (29)を見れば  $\alpha_1, \alpha_2$  には正負絶対値の等しい根が無数にあることがわかるであらう。

(24), (26)において

$$\kappa_2 \alpha_1 a_1 = \xi_1, \quad \kappa_1 \alpha_2 a_2 = \xi_2$$

と置くこととする。(24)は

$$\left(\frac{\xi_1}{\kappa_2 a_1}\right)^2 - \left(\frac{\xi_2}{\kappa_1 a_2}\right)^2 = -\frac{\pi}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 b^2 c^2} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) (n^2 b^2 + m^2 c^2); \quad (30)$$

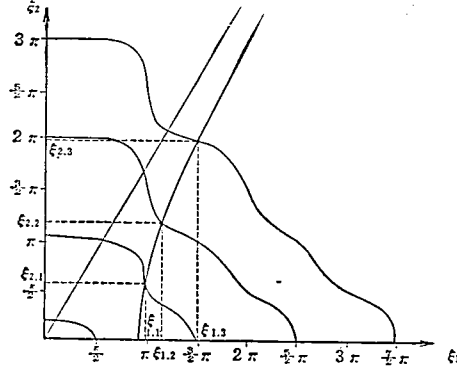
(29)は

$$\frac{\tan \xi_1}{\kappa_1 \kappa_2 \xi_1} - \frac{\cot \xi_2}{\kappa_2 \kappa_1 \xi_2} = 0 \quad (31)$$

となる。(30)は

$$\frac{\xi_1}{\kappa_2 a_1} = \pm \frac{\xi_2}{\kappa_1 a_2}$$

を漸近線とする双曲線である。(31)は複雑な曲線である。これを図示すれば第2図となる。(図では  $k_2/k_1=6$ ,  $a_1/a_2=2$ ,  $m=n=1$ ,  $b=c=a_1$  としてある。)この図を見ると曲線(31)は同じような形の閉じた曲線が、無数にあって原点から次第に遠ざかって行く様様がわかる。これらの曲線と双線の交叉点が  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  の根を与え、それから,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  が求められる。 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  は対をなしていて、正根を大ききの順に並べて  $s$  番目のものを  $\alpha_{1,s}$ ,  $\alpha_{2,s}$  と書くこととする。 $M_{m,n,\alpha_1,\alpha_2}$  を今後  $M_{s,m,n}$  と書く。



第2図 Fig 2

$m, n, s$  の許し得る値に就いての微分方程式の解の和を書いてみれば、次の式を得る:

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{1,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right) t} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x \\ \times \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z, \quad (32)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_2^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_2^2 c^2} \right) t} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \\ \times \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z. \quad (33)$$

これに初期条件(5); (6)を入れれば,

$$f_1(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z, \quad (34)$$

$$f_2(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \quad (35)$$

となる。これらの式を満足するような展開式が得られれば解が得られる。

$f_1(x, y, z)$ ,  $f_2(x, y, z)$  を  $y$  と  $z$  に関して展開するのは Fourier 級数を用いて表わして次のようになる:

$$f_1(x, y, z) = \frac{4}{bc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\ \times \int_0^b \int_0^c f(x, \mu, \nu) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\mu d\nu; \quad (36)$$

$$f_2(x, y, z) = \frac{4}{bc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\ \times \int_0^b \int_0^c f_2(x, \mu, \nu) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\mu d\nu. \quad (37)$$

今  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  を次の如く採るとき、それらが

$$F_1(x) = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c f_1(x, \mu, \nu) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\mu d\nu \\ = \sum_{s=1}^{\infty} N_s \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x; \quad (38)$$

$$F_2(x) = \frac{4}{bc} \int_0^b \int_0^c f_2(x, \mu, \nu) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\mu d\nu \\ = \sum_{s=1}^{\infty} N_s \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \quad (39)$$

の如く展開出来ればよい。

$R_{1,s}(x)$ ,  $R_{2,s}(x)$  を

$$R_{1,s}(x) = \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x; \quad (40)$$

$$R_{2,s}(x) = \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \quad (41)$$

と置けば、

$$\frac{d^2 R_{1,s}(x)}{dx^2} + \kappa_2^2 \alpha_{1,s}^2 R_{1,s}(x) = 0, \quad (42)$$

$$\frac{d^2 R_{2,s}(x)}{dx^2} + \kappa_1^2 \alpha_{2,s}^2 R_{2,s}(x) = 0 \quad (43)$$

を満足する。又境界条件として

$$(R_{1,s})_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} \right)_{x=a} = 0; \quad (44), (45)$$

$$(R_{1,s})_{x=a_1} = (R_{2,s})_{x=a_1}, \quad k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} \right)_{x=a_1} = k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} \right)_{x=a_1} \quad (46), (47)$$

を満足する。 $R_{1,s}$ ,  $R_{2,s}$  は  $R_{1,s}(x)$ ,  $R_{2,s}(x)$  の代りに用いてある。他の正の整数  $p$  に対する  $R_{1,p}$ ,  $R_{2,p}$  も同様な微分方程式と境界条件を満足する。

$R_{1,s}$ ,  $R_{2,s}$  を用い(38), (39)を書けば、

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} N_s R_{1,s}, \quad F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} N_s R_{2,s} \quad (48), (49)$$

である。(48)に  $k_1 \kappa_2^2 R_{1,p}$  と掛けて 0 から  $a_1$  まで積分し、(49)に  $k_2 \kappa_1^2 R_{2,p}$  を掛けて  $a_1$  から  $a$  まで積分したものを加へ合わせると次の如くなる：

$$k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(x) R_{1,p} dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(x) R_{2,p} dx \\ = \sum_{s=1}^{\infty} N_s \left( k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,s} R_{1,p} dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,s} R_{2,p} dx \right). \quad (50)$$

この式において  $s \neq p$  の場合には右辺の括弧内の式は 0 となることは次のように証明出来る。

$$\begin{aligned} k_1 \kappa_2^2 \alpha_{1,s}^2 \int_0^{a_1} R_{1,s} R_{1,p} dx &= -k_1 \int_0^{a_1} \frac{d^2 R_{1,s}}{dx^2} R_{1,p} dx \\ &= -k_1 \left( \left[ \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right]_0^{a_1} - \int_0^{a_1} \frac{dR_{1,s}}{dx} \frac{dR_{1,p}}{dx} dx \right), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} k_1 \kappa_1^2 \alpha_{1,p}^2 \int_0^{a_1} R_{1,p} R_{1,s} dx &= -k_1 \int_0^{a_1} \frac{d^2 R_{1,p}}{dx^2} R_{1,s} dx \\ &= -k_1 \left( \left[ \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right]_0^{a_1} - \int_0^{a_1} \frac{dR_{1,p}}{dx} \frac{dR_{1,s}}{dx} dx \right) \end{aligned} \quad (52)$$

とも書けるから、(50)から(51)を引けば、

$$k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,s} R_{1,p} dx = \frac{k_1}{\alpha_{1,p}^2 - \alpha_{1,s}^2} \left[ \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} - \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right]_0^{a_1} \quad (53)$$

を得る。同様に

$$k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,s} R_{2,p} dx = \frac{k_2}{\alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2} \left[ \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} - \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right]_{a_1}^a \quad (54)$$

が得られる。然るに  $\alpha_{1,p}^2 - \alpha_{1,s}^2 = \alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2$  であるから、これらの二式を加え合わせると、

$$\begin{aligned} I_1 &= k_1 \kappa_2^2 \int_1^{a_1} R_{1,s} R_{1,p} dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,s} R_{2,p} dx \\ &= \frac{1}{\alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2} \left( k_1 \left[ \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} - \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right]_0^{a_1} \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left[ \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} - \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right]_{a_1}^a \right) \\ &= \frac{1}{\alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2} \left\{ k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=a_1} - k_1 \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=a_1} \right. \\ &\quad - k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=0} + k_1 \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=0} \\ &\quad + k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a} - k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a} \\ &\quad \left. - k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a_1} + k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a_1} \right\} \end{aligned}$$

となる。然るに(44)、(45)と同様の関係から、

$$\begin{aligned} \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=0}, \quad \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=0} &= 0, \\ \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a}, \quad \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a} &= 0 \end{aligned}$$

である。又(46)(47)及び同様の関係から

$$\begin{aligned} k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=a_1} - k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a_1} &= 0, \\ k_1 \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=a_1} - k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a_1} &= 0 \end{aligned}$$

である。従って

$$I_1 = 0$$

であることが証明できたのである。

次に  $s=p$  の場合を考える。

$$\begin{aligned}
k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,p}^2 dx &= k_1 k_2^2 \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \int_0^{a_1} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} x dx \\
&= k_1 k_2^2 \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \cdot \frac{a_1}{2} \left( 1 - \frac{\sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \cos \kappa_2 \alpha_{2,p} a_1}{a_1 \kappa_2 \alpha_{1,p}} \right) \\
&= \frac{k_1 k_2^2 \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{2} \left( a_1 - \frac{1}{\kappa_2 \alpha_{2,p}} \cos \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \cos \kappa_2 \alpha_{2,p} a_1 \right), \\
k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,p}^2 dx &= k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \int_{a_1}^a \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) dx \\
&= k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \cdot \frac{a_2}{2} \left( 1 + \frac{\sin \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{a_2 \kappa_1 \alpha_{2,p}} \right) \\
&= \frac{k_2 k_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1}{2} \left( a_2 + \frac{1}{\kappa_1 \alpha_{2,p}} \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
I_2 &= k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,p}^2 dx + k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,p}^2 dx \\
&= \frac{\cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1}{2} \left( \frac{k_1 k_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1} + \frac{k_2 k_1^2 a_2}{\cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{k_1 k_2}{\alpha_{1,p}} \tan \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 + \frac{\kappa_2 k_1}{\alpha_{2,p}} \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right) \\
&= \frac{\cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1}{2} \left( \frac{k_1 k_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_2} + \frac{k_2 k_1^2 a_2}{\cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{\alpha_{2,p}} \frac{(k_1^2 \kappa_2^2 - k_2^2 \kappa_1^2) \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{k_2 \kappa_1 a_{2,p}} \right) \equiv V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p}) \quad (55)
\end{aligned}$$

を得る。

(55)の  $V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s})$  を用いれば  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  の展開式は次のように書かれる：

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} R_{1,s}(x) \left( k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,s}(\lambda) d\lambda + k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,s}(\lambda) d\lambda \right) / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}); \quad (56)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} R_{2,s}(x) \left( k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,s}(\lambda) d\lambda + k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,s}(\lambda) d\lambda \right) / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}). \quad (57)$$

(56)を(37)に(57)を(38)に代入すれば、 $f_1(x, y, z)$ ,  $f_2(x, y, z)$  の展開式が次の如く得られる。

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= \frac{4}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{1,s}(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\
&\quad \times \left( k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) R_{1,s}(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \right. \\
&\quad \left. + k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a \int_0^b \int_0^c f_2(\lambda, \mu, \nu) R_{2,s}(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \right) / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}), \quad (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x, y, z) &= \frac{4}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{2,s}(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\
&\quad \times \left( k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) R_{1,s}(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \right. \\
&\quad \left. + k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a \int_0^b \int_0^c f_2(\lambda, \mu, \nu) R_{2,s}(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \right) / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}). \quad (59)
\end{aligned}$$

(58), (59)により問題の解は次のように書かれる：

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{8}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{1,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_2^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_2^2 c^2} \right) t} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\
& \times \left( k_1 \kappa_2^2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \int_0^a \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} \lambda \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \right. \\
& + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \int_a^a \int_0^b \int_0^c f_2(\lambda, \mu, \nu) \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \Big) \\
& \div \left( \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( \frac{k_1 \kappa_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1} + \frac{k_2 \kappa_1^2 a_2}{\cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(k_1^2 \kappa_2^2 - k_2^2 \kappa_1^2) \cot \kappa_1 \alpha_{2,s} a_1}{k_2 \kappa_1 \alpha_{2,s}} \right) \right), \quad [0 < x < a_1], \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & \frac{8}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right) t} \\
& \times \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\
& \times \left( k_1 \kappa_2^2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \int_a^a \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} \lambda \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \right. \\
& + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \int_a^a \int_0^b \int_0^c f_2(\lambda, \mu, \nu) \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \Big) \\
& \div \left\{ \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( \frac{k_1 \kappa_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1} + \frac{k_2 \kappa_1^2 a_2}{\cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(k_1 \kappa_2^2 - k_2 \kappa_1^2) \cot \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2}{k_2 \kappa_1 \alpha_{2,s}} \right) \right\}, \quad [a_1 < x < a]. \quad (60)
\end{aligned}$$

II 第二の例として(7), (8)に対する境界条件として

$$(u_1)_{x=0}=0, \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + h u_2 \right)_{x=a} = 0 \quad (61), (62)$$

を用いる。即ち  $x=0$  に於ける条件はそのままである。(9)~(12)は、そのまま用いることとする。

微分方程式の特解は前の場合と同じ(17), (18)である。

この問題において(17), (18)に境界条件(9)~(16)を入れた結果は例Iの場合と同じで、又(24)も同じ式が成立する。

今、

$$X_1 = B_{\alpha_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 x, \quad (63)$$

$$X_2 = A_{\alpha_1} \cos \kappa_1 \alpha_2 (a-x) + B_{\alpha_1} \sin \kappa_1 \alpha_2 (a-x) \quad (64)$$

と置く。 $X_1$ は境界条件(61)を満足している。(14)が境界条件(62)を満足するためには

$$\kappa_1 \alpha_2 B_{\alpha_1} - h A_{\alpha_1} = 0,$$

即ち

$$A_{\alpha_1} = \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} B_{\alpha_1}$$

であればよい。従って

$$X_2 = B_{\alpha_1} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \kappa_1 \alpha_2 (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_2 (a-x) \right) \quad (65)$$

が得られる。

(63), (65)により  $u_1, u_2$  は

$$u_1 = G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) t} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 x \sin \kappa_2 \beta_1 y \sin \kappa_2 \gamma_1 z, \quad (66)$$

$$u_2 = G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) t} B_{\alpha_2} D_{\gamma_2} F_{\gamma_2} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \kappa_1 \alpha_2 (a-x) \right. \\ \left. + \sin \kappa_2 \alpha_2 (a-x) \right) \sin \kappa_1 \beta_2 y \sin \kappa_1 \gamma_2 z \quad (67)$$

なる形に書かれる。但し

$$\kappa_2 \beta_1 = \kappa_1 \beta_2 = -\frac{m\pi}{b}, \quad \kappa_2 \gamma_1 = \kappa_1 \gamma_2 = -\frac{n\pi}{c}$$

である。

これに境界条件(3)に入れば

$$G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 = G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right) \quad (68)$$

が得られる。又同様に(4)に入れば

$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \cos \kappa_2 \alpha_1 a_1 \\ = k_2 \kappa_1 \alpha_2 G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 - \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right) \quad (69)$$

となる。(68)は

$$G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} E_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} = M_{m, n, \alpha_1, \alpha_2} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \kappa_2 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right) \quad (70)$$

$$G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} E_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} = M_{m, n, \alpha_1, \alpha_2} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 \quad (71)$$

と置けば満足される。 $M_{m, n, \alpha_1, \alpha_2}$  は  $m, n, \alpha_1, \alpha_2$  を含む定数である。(68)と(69)から

$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 \cot \kappa_2 \alpha_1 a_1 = k_2 \kappa_1 \alpha_2 \frac{\frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 - \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2}{\frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2} \quad (72)$$

なる関係が得られる。 $\kappa_2 \alpha_1 a_1 = \xi_1, \kappa_1 \alpha_2 a_2 = \xi_2$  と置けば、これは次のようになる：

$$\xi_1 \cot \xi_1 = -\frac{k_2 a_1}{k_1 a_2} \xi_2 \frac{\cos \xi_2 - \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \sin \xi_2}{\sin \xi_2 + \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \xi_2} \quad (73)$$

今、

$$\frac{\cos \xi_2 - \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \sin \xi_2}{\sin \xi_2 + \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \cos \xi_2} = \cot (\xi_2 + \tau)$$

と置けば、

$$\sin \tau = \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \left/ \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \right)^2} \right., \quad \cos \tau = 1 \left/ \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h} \right)^2} \right.$$

であるから、

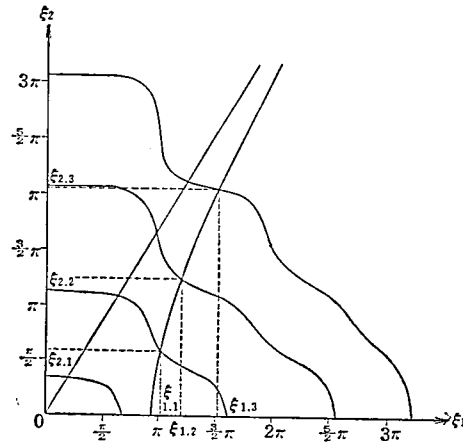
$$\tan \tau = \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h}, \quad \tau = \tan^{-1} \frac{\kappa_1 \alpha_2}{h}$$

となる。(73)は次のように書かれる。

$$\xi_1 \cot \xi_1 = -\frac{k_2 a_1}{k_1 a_2} \xi_2 \cot \left( \xi_2 + \tan^{-1} \frac{\xi_2}{a_2 h} \right). \quad (74)$$

(70)と(74)から  $\xi_1, \xi_2$  を決定すれば、それから  $\alpha_1, \alpha_2$  が求められる。これらの図は第3図に画いてある。(図では  $\kappa_2/\kappa_1=1.2, a_2/a_1=2, k_2/k_1=6, 1/a, h=1$  としてある。) この図を見ると第2図と似ていて、本質的の差は認められない。





第 3 図 Fig. 3

第 3 図から決まる正根  $\xi_1, \xi_2$  から求められる  $\alpha_1, \alpha_2$  を大きさの順序に並べて  $s$  番目のものを  $\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}$  と書き、又  $M_{m,n,\alpha_1,\alpha_2}$  を  $M_{s,m,n}$  を書けば  $u_1, u_2$  は次のようになる：

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{1,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_2^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_2^2 c^2} \right) t} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \times \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z, \quad (75)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right) t} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \times \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z. \quad (76)$$

(75), (76) に初期条件 (5), (6) を入れれば,

$$f_1(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \times \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z, \quad (77)$$

$$f_2(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \times \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \quad (78)$$

となる。このような展開式が出来れば問題は解かれる。

例 1 から分るように、このような展開式は

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x, \quad (79)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \quad (80)$$

の如き展開式が出来れば、他には Fourier 級数を用いればよいから、(77)(78) の如き展開式は容易に得られる。

簡単のために

$$R_{1,s}(x) = \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x, \quad (81)$$

$$R_{2,s}(x) = \sin \kappa_1 \alpha_{1,s} a_1 \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \quad (82)$$

と置く。然るときは(79), (80)は次のように書かれる:

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s R_{1,s}(x), \quad (83)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s R_{2,s}(x). \quad (84)$$

以後計算を簡単に書くときは  $R_{1,s}(x)$ ,  $R_{2,s}(x)$  の代りに単に  $R_{1,s}$ ,  $R_{2,s}$  と書き, 必要に応じて  $x$  を書くことにする。  $R_{1,s}$ ,  $R_{2,s}$  は次の如き境界条件を満足する:

$$(R_{1,s})_{x=a_1} = (R_{2,s})_{x=a_1}, \quad k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} \right)_{x=a_1} = k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} \right)_{x=a_1}, \quad (85), (86)$$

$$(R_{1,s})_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} + h R_{2,s} \right)_{x=a} = 0. \quad (87), (88)$$

(83), (84)の  $M_s$  を求める手続は例1の場合と全く同じであるので, 必要な個所だけを以下に記述することとする。

$s \neq p$  とし,  $\alpha_{1,p} - \alpha_{1,s}^2 = \alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2$  であることを考慮すれば,

$$\begin{aligned} I_1 &= k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,s} R_{1,p} dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,s} R_{2,p} dx \\ &= -\frac{1}{\alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2} \left\{ k_1 \left[ \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} - \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right]_0^{a_1} \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left[ \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} - \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right]_{a_1}^a \right\} \\ &= -\frac{1}{\alpha_{2,p}^2 - \alpha_{2,s}^2} \left\{ k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=a_1} - k_1 \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=a_1} \right. \\ &\quad - k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=0} + k_1 \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=0} \\ &\quad + k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a} - k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a} \\ &\quad \left. - k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a_1} + k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a_1} \right\} \quad (89) \end{aligned}$$

と書かれる。境界条件(87)及び類似の関係から

$$\left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=0} = 0$$

となる。又(88)及び類似の関係から

$$R_{2,p} \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} + h R_{2,s} \right)_{x=a} = 0, \quad R_{2,s} \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} + h R_{2,p} \right)_{x=a} = 0$$

であるから

$$\left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} - \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a} = 0,$$

即ち,

$$k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a} - k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a} = 0$$

を得る。又境界条件(85), (86)及び類似の関係から,

$$\begin{aligned} k_1 \left( \frac{dR_{1,s}}{dx} R_{1,p} \right)_{x=a_1} - k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a_1} &= 0 \\ k_1 \left( \frac{dR_{1,p}}{dx} R_{1,s} \right)_{x=a_1} - k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a_1} &= 0 \end{aligned}$$

である。これらの関係から,  $s \neq p$  ならば

$$I_1 = 0$$

となることが言われる。

次に  $s=p$  の場合を考える。

$$\begin{aligned} k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,p}^2 dx &= k_1 k_2^2 \left( \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right)^2 \int_0^{a_1} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} x dx \\ &= \frac{k_1 k_2^2}{2} \left( \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right) \\ &\quad \times \left( a_1 - \frac{1}{\kappa_2 \alpha_{1,p}} \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \cos \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \right) \\ &= \frac{k_1 k_2^2}{2} \left\{ \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \left( 1 - \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right) \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right\} \\ &\quad \times \left( a_1 - \frac{1}{\kappa_2 \alpha_{1,p}} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \cot \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \right), \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,p}^2 dx &= k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} \int_{a_1}^a \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) \right)^2 dx \\ &= k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \left( \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} \int_{a_1}^a \cos^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) dx + \int_{a_1}^a \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \int_{a_1}^a \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} (a-x) dx \right) \\ &= k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \left\{ \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} \left( \frac{a_2}{2} + \frac{\sin 2\kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{4\kappa_1 \alpha_{2,p}} \right) + \frac{a_2}{2} - \frac{\sin 2\kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{4\kappa_1 \alpha_{2,p}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \left( -\frac{a_2}{2} - \frac{1 - 2 \sin 2\kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{4\kappa_1 \alpha_{2,p}} \right) \right\} \\ &= k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \left\{ \frac{a_2}{2} \left( \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} + 1 \right) - \frac{1}{2h} + \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2 - h^2}{4h^2 \kappa_1 \alpha_{2,p}} \sin 2\kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \sin 2\kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right\}, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv k_1 k_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,p}^2 dx + k_2 k_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,p}^2 dx \\ &= \frac{k_1 k_2^2}{2} \left\{ \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \left( 1 - \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right) \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right\} \\ &\quad \times \left( a_1 - \frac{1}{\kappa_2 \alpha_{1,p}} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \cot \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \right) \\ &\quad + k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \left\{ \frac{a_2}{2} \left( \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2h} + \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2 - h^2}{4h^2 \kappa_1 \alpha_{2,p}} \sin 2\kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \frac{1}{h} \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right\} \\ &= \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \left\{ \frac{k_1 k_2^2}{2} \left( \frac{a_1}{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1} - \frac{\cot \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1}{\kappa_2 \alpha_{1,p}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \left( 1 - \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2} + \frac{2\kappa_1 \alpha_{2,p}}{h} \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right) + \frac{\kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{h^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2} \right\} \right. \end{aligned}$$

$$+k_2\kappa_1^2\left\{\left(\frac{\kappa_1^2\alpha_{2,p}^2}{h^2}-\frac{2\kappa_1\alpha_{2,p}}{h}+1\right)\frac{a_2}{2\sin^2\kappa_1\alpha_{2,p}a_2}-\frac{1}{2h\sin^2\kappa_1\alpha_{2,p}a_2}-\frac{\kappa_1^2\alpha_{2,p}^2-h^2}{4h^2\kappa_1\alpha_{2,p}}\cot\kappa_1\alpha_{2,p}a_2+\frac{1}{h}\right\}.$$

この式の中の  $\cot\kappa_2\alpha_{1,p}a_1$  を(72)の関係によって代入すれば、

$$I_2 = \frac{\sin^2\kappa_2\alpha_{1,p}a_1\sin^2\kappa_1\alpha_{2,p}a_2}{2}\left\{\left(\frac{k_1\kappa_2^2a_1}{\sin^2\kappa_2\alpha_{1,p}a_1}-\frac{k_2\kappa_1^2a_2\left(\frac{\kappa_1\alpha_{2,p}}{h}-\cot\kappa_1\alpha_{2,p}a_2\right)}{\frac{\kappa_2\alpha_{2,p}^3}{h}\cot\kappa_1\alpha_{2,p}a_2+\alpha_{1,p}^2}\right)\right. \\ \times\left(1-\frac{\kappa_1^2\alpha_{2,p}^2}{h^2}+\frac{2\kappa_1\alpha_{2,p}}{h}\cot\kappa_1\alpha_{2,p}a_2+\frac{\kappa_1^2\alpha_{2,p}^2}{h^2\sin^2\kappa_1\alpha_{2,p}a_2}\right) \\ \left.+\left(\frac{\kappa_1^2\alpha_{2,p}^2}{h^2}+\frac{2\kappa_1\alpha_{2,p}}{h}+1\right)\frac{k_2\kappa_1^2a_2}{\sin^2\kappa_1\alpha_{2,p}a_2}-\frac{k_2\kappa_1(\kappa_1^2\alpha_{2,p}^2-h^2)}{h\sin^2\kappa_1\alpha_{2,p}a_2}\cot\kappa_1\alpha_{2,p}a_2\right. \\ \left.+\frac{2k_2\kappa_1^2}{h}\right\}\equiv V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p}) \quad (92)$$

なる結果が得られる。これを  $V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p})$  と書くこととする。

以上の計算により  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  は次のように展開される：

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} R_{1,s}(x) \left( k_1\kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,s}(\lambda) d\lambda + k_2\kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,s}(\lambda) d\lambda \right) / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}), \\ [0 < x < a_1], \quad (93)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} R_{2,s}(x) \left( k_1\kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,s}(\lambda) d\lambda + k_2\kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,s}(\lambda) d\lambda \right) / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}), \\ [a_1 < x < a]. \quad (94)$$

(93), (94)の展開式を用いれば、 $u_1$ ,  $u_2$  は次のようになる：

$$u_1 = \frac{4}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\left(\alpha_{1,s}^2 + \frac{m^2\pi^2}{\kappa_1^2b^2} + \frac{n^2\pi^2}{\kappa_1^2c^2}\right)t} \left( \frac{\kappa_1\alpha_{2,s}}{h} \cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2 + \sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2 \right) \\ \times \sin\kappa_2\alpha_{1,s}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sin\frac{n\pi}{c}z \\ \times \left\{ k_1\kappa_2^2 \left( \frac{\kappa_1\alpha_{2,s}}{h} \cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2 + \sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2 \right) \int_0^{a_1} \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) \sin\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda \right. \\ \times \sin\frac{m\pi}{b}\mu \sin\frac{n\pi}{c}\nu d\lambda d\mu d\nu \\ \times \left\{ k_2\kappa_1^2 \sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b \int_0^c \left( \frac{\kappa_1\alpha_{2,s}}{h} \cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda) \right) \sin\frac{m\pi}{b}\mu \sin\frac{n\pi}{c}\nu d\lambda d\mu d\nu \right\} / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}), \quad (95)$$

$$u_2 = \frac{4}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\left(\alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2\pi^2}{\kappa_2^2b^2} + \frac{n^2\pi^2}{\kappa_2^2c^2}\right)t} \sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1 \\ \times \left( \frac{\kappa_1\alpha_{2,s}}{h} \cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x) + \sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x) \right) \sin\frac{m\pi}{b}y \sin\frac{n\pi}{c}z \\ \times \left\{ k_1\kappa_2^2 \left( \frac{\kappa_1\alpha_{2,s}}{h} \cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2 + \sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2 \right) \int_0^{a_1} \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) \right. \\ \times \sin\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda \sin\frac{m\pi}{b}\mu \sin\frac{n\pi}{c}\nu d\lambda d\mu d\nu \\ \left. + k_2\kappa_1^2 \sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b \int_0^c f_2(\lambda, \mu, \nu) \right.$$

$$\times \left( \frac{\kappa_1 \alpha_{2,s}}{h} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a - \lambda) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a - \lambda) \right) \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \Big\} / V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}). \quad (96)$$

III 境界条件(7), (8)に対する条件として

$$(u_1)_{x=0}=0, \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + c \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=a}=0 \quad (97), (98)$$

を用いる。(97)は(7)と同じであるが, (98)は(8)と異っている。この式の  $c$  は定数である。

この問題の場合にも(24)が成立しなくてはならないことは容易に分る。

境界条件(98)により,

$$A_{\alpha_1}=0$$

である。又(69)によれば,

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) A_{\alpha_2} + c \kappa_1 \alpha_2 B_{\alpha_2} = 0$$

となるから, これから  $A_{\alpha_2}$  を  $B_{\alpha_2}$  を用いて表わすことが出来る。それを用いると

$$u_2 = G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) t} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \cos \kappa_1 \alpha_2 (a - x) + \sin \kappa_1 \alpha_2 (a - x) \right) \sin \kappa_1 \beta_2 y \sin \kappa_1 \gamma_2 z \quad (99)$$

となる。但し  $\kappa_1 \beta_2 = \frac{m\pi}{b}$ ,  $\kappa_1 \gamma_2 = \frac{n\pi}{c}$  である。

境界条件(3), (4)から,

$$G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 = G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right), \quad (100)$$

$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} \cos \kappa_2 \alpha_1 a_1 = k_2 \kappa_1 \alpha_2 G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \sin \kappa_2 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right) \quad (101)$$

を得る。(100)は

$$G_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} F_{\gamma_1} = M_{m, n, \alpha_1, a_2} \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right), \quad (102)$$

$$G_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} F_{\gamma_2} = M_{m, n, \alpha_1, a_2} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 \quad (104)$$

によって満足される。但し  $M_{m, n, \alpha_1, a_2}$  は  $m, n, \alpha_1, \alpha_2$  を含む任意の定数である。(100)と(101)とから

$$\begin{aligned} \frac{\tan \kappa_2 \alpha_1 a_1}{k_1 \kappa_2 \alpha_1} &= -\frac{\frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2}{k_2 \kappa_1 \alpha_2 \left( \frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2 + \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2 \right)} \\ &= -\frac{1}{k_2 \kappa_1 \alpha_2} \tan (\kappa_1 \alpha_2 a_2 + \tau) \end{aligned} \quad (105)$$

と置く。但し

$$\cot \tau = -\frac{c \kappa_1 \alpha_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)} \quad (106)$$

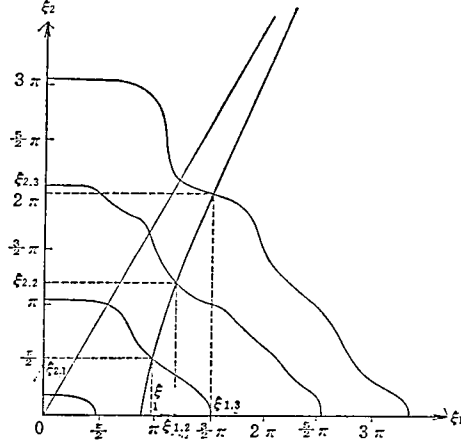
と置いてある。

(105)において  $\kappa_2 \alpha_1 a_1 = \xi_1$ ,  $\kappa_1 \alpha_2 a_2 = \xi_2$  と書くと,

$$\frac{\tan \xi_1}{\xi_1} = -\frac{k_1 a_2}{k_2 a_1 \xi_2} \tan \left( \xi_2 - \cot^{-1} \frac{c \xi_2}{a_2 \kappa_2^2 \left( \frac{\kappa_2^2}{a_2^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{c^2} \right)} \right) \quad (107)$$

となる。(30)と(107)から  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  が決定され, それを用いて  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  が計算される。

(30)と(107)から  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  が求まるが, 正負絶対値の等しい根が存在し, その数は無限に多いことが分るであろう。これらの曲線を図4に画いてある。図の形は図2, 図3と大して変っていない。(図では  $k_2/k_1=6$ ,  $\kappa_2/\kappa_1=1.2$ ,  $a_2/a_1=2$ ,  $4a_1^2 c = \kappa_1^2 = 1$ ,  $m=n=1$ ,  $b=c=a_1$  としてある。)



第4図 Fig. 4

$\xi_1, \xi_2$  の正根を大きさの順序に並べて  $s$  番目のものを  $\xi_{1,s}, \xi_{2,s}$  と書くことにし, それに対応する  $\alpha_1, \alpha_2$  を  $\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}$  と書くこととする。然るときは  $u_1, u_2$  は次の如く書かれる:

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{s,m,n} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{1,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_2^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_2^2 c^2} \right) t} \times \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \times \sin \kappa_2 \alpha_{2,s} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z, \quad (108)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{m,n,s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right) t} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \times \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \times \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z. \quad (109)$$

上の式の中で  $M_{s,m,n}$  は  $M_{m,n,\alpha_1,\alpha_2}$  の代りに用いてある。

(108), (109)に初期条件を入れれば, 結局関数  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  を

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x, \quad (110)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( - \frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{\pi^2 n^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \quad (111)$$

の如き級数で展開することが必要となる。今簡単のために

$$R_{1,s}(x) = \left( - \frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x, \quad (112)$$

$$R_{2,s}(x) = \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( - \frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \quad (113)$$

と置けば、

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s R_{1,s}(x), \quad (114)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} M_s R_{2,s}(x) \quad (115)$$

なる展開式を作らねばならないことになる。

$R_{1,s}(x)$ ,  $R_{2,s}(x)$  の満足する微分方程式及び境界条件は  $x=a$  に於けるものを除けば前二例と同じである。 $x=a$  に於いては

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right) (R_{2,s})_{x=a} + c \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} \right)_{x=a} = 0 \quad (116)$$

が成立する。

(114), (115) から  $M_s$  を決定するには、次のような積分の値を求めねばならない：

$$k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,s} R_{1,p} dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,s} R_{2,p} dx. \quad (117)$$

最初  $s \neq p$  として、その場合の(117)の積分を  $I_1$  と書き、 $x=a$  における境界条件以外の諸境界条件を用いて

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_{2,p}^2 \alpha_{2,s}^2} \left[ k_2 \left( \frac{dR_{2,s}}{dx} R_{2,p} \right)_{x=a} - k_2 \left( \frac{dR_{2,p}}{dx} R_{2,s} \right)_{x=a} \right]$$

となる。この式に(113)で与えられる  $R_{2,s}$ ,  $R_{2,p}$  を代入すれば、

$$I_1 = \frac{c k_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \quad (118)$$

が得られる。この式が0とならないことに注意を要する。即ち  $R_{1,s}(x)$ ,  $R_{2,s}(x)$  及び  $R_{1,p}(x)$ ,  $R_{2,p}(x)$  は直交しないのである。

次に  $s=p$  の場合の(117)の積分を  $I_2$  と書けば

$$I_2 = k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} R_{1,p}^2 dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a R_{2,p}^2 dx$$

である。これに(112), (113)で与えられる  $R_{1,p}$ ,  $R_{2,p}$  を入れて計算すれば、

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{2} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \left( -\frac{c \kappa_1^2 k_2 \alpha_{2,p}^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right)^2 \\
& \times \left( \frac{k_1 \kappa_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1} - \frac{\frac{c k_2 \kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} - k_2 \kappa_2 a_{2,p} \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2}{\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,p}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cot \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \alpha_{2,p}^3} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,p}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right)^2} \right) \\
& \times \left[ k_2 \kappa_1^2 a_2 \left( \frac{c^2 \kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2}{\kappa_1^4 \kappa_2^4 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)^2} - \frac{2c \kappa_1 \alpha_{1,p}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} + 1 \right) \right. \\
& \left. - \frac{k_2 \kappa_1^2 \left\{ c^2 \kappa_1^2 \alpha_{2,p}^2 - \kappa_1^4 \kappa_2^4 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)^2 \right\}}{\kappa_1^4 \kappa_2^4 \alpha_{2,p} \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)^2} \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \cot^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right. \\
& \left. - \frac{2c k_2}{\kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,p} a_2 \right] \equiv V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p}) \quad (105)
\end{aligned}$$

となる。この価を簡単のために  $V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p})$  と書くこととする。

以上の計算により、

$$\begin{aligned}
& k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,p}(\lambda) d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,p}(\lambda) d\lambda \\
& = \frac{c k_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \sum_{s=1}^{\infty} M_s \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \\
& - M_p \frac{c k_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 + M_p V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p}) \quad (106)
\end{aligned}$$

となる。これに

$$\frac{k_2}{\kappa_1 \alpha_{2,p}} \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 F_2(a) = - \frac{c k_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 \sum_{s=1}^{\infty} M_s \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1$$

と加えれば

$$\begin{aligned}
& k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,p}(\lambda) dx + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,p}(\lambda) d\lambda + \frac{k_2}{\kappa_1 \alpha_{2,p}} \sin \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 F_2(a) \\
& = M_p \left( - \frac{c k_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,p}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,p} a_1 + V(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p}) \right)
\end{aligned}$$

となる。右辺括弧内の式を  $V'(\alpha_{1,p}, \alpha_{2,p})$  と書くこととする。この計算により  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  の展開式は次の如く得られる：

$$F_1(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left( - \frac{c \alpha_{2,s}}{\kappa_1 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x$$



$$\times \left( k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,s}(\lambda) d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,s}(\lambda) d\lambda + \frac{k_2}{\kappa_1 \alpha_{2,s}} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 F_2(a) \right) \\ \div V'(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}) \quad (107)$$

$$F_2(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \\ \times \left( k_1 \kappa_2^2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) R_{1,s}(\lambda) d\lambda + k_2 \kappa_1^2 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) R_{2,s}(\lambda) d\lambda + \frac{k_2}{\kappa_1 \alpha_{2,s}} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 F_2(a) \right) \\ \div V'(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}),$$

$$\text{但し } V'(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}) = -\frac{c k_2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 + V(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}) \quad (108)$$

と置いてある。

(107), (108)の展開式により問題の解は次のように書ける：

$$u_1 = -\frac{4}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{1,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_2^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_2^2 c^2} \right) t} \\ \times \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \\ \times \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} x \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \\ \times \left\{ k_1 \kappa_2^2 \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \right. \\ \times \int_0^{a_1} \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} \lambda \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \\ + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b \int_0^c f_2(\lambda, \mu, \nu) \\ \times \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-\lambda) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-\lambda) \right) \\ \times \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu \\ \left. + \frac{k_2}{\kappa_2 \alpha_{2,s}} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 F_2(a) \right\} / V'(\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}), \quad (109)$$

$$u_2 = -\frac{4}{bc} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right) t} \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} a_1 \\ \times \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} (a-x) \right) \\ \times \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{c} z \left\{ k_1 \kappa_2^2 \left( -\frac{c \kappa_1 \alpha_{2,s}}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left( \alpha_{2,s}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 c^2} \right)} \cos \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 + \sin \kappa_1 \alpha_{2,s} a_2 \right) \right. \\ \times \int_0^{a_1} \int_0^b \int_0^c f_1(\lambda, \mu, \nu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,s} \lambda \sin \frac{m\pi}{b} \mu \sin \frac{n\pi}{c} \nu d\lambda d\mu d\nu$$

$$\begin{aligned}
& +k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^a\int_0^b\int_0^cf(\lambda,\mu,\nu)\left(-\frac{c\kappa_1\alpha_{1,s}}{\kappa_1^2\kappa_2^2\left(\alpha_{2,s}^2+\frac{m^2\pi^2}{\kappa_1^2b^2}+\frac{n^2\pi^2}{\kappa_1^2c^2}\right)}\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\right. \\
& \left.+\sin\kappa_1\alpha_{s,s}(a-\lambda)\right)\sin\frac{m\pi}{b}\mu\sin\frac{n\pi}{c}\nu d\lambda d\mu d\nu \\
& +\frac{k_2}{\kappa_2\alpha_{2,s}}\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1F_2(a)\Big\}/V'(\alpha_{1,s},\alpha_{2,s}).
\end{aligned} \tag{110}$$