

異なる物質の二つの部分よりなる 二次元の定常的熱伝導

小 平 吉 男

Stationary Conduction of Heat in Two Dimensions in a Solid
Composed of Two Parts with Different Materials
Yoshio Kodaira

二辺の長さが a, b である矩形の無限に長い柱状の固体を考え、熱は柱の長さの方向には流れないとする。 x 方向と b 方向を柱の切口に沿うて採り、 $x=0$ から $x=a_1$ までは 1 なる物質、 a_1 から a までは 2 なる物質より成るとし、 y 方向は一樣な物質より成ると考える。熱伝導の微分方程式は、定常状態の場合を考えて、

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \quad [0 < x < a_1, 0 < y < b], \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \quad [a_1 < x < a, 0 < y < b] \quad (2)$$

を用いることとする。柱の断面の外側の境界条件として、

$$(u_1)_{x=0} = f(y), \quad (u_2)_{x=a} = 0 \quad (3), (4)$$

$$(u_1)_{y=0} = 0, \quad (u_1)_{y=b} = 0 \quad (5), (6)$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (u_2)_{y=b} = 0 \quad (7), (8)$$

を用いる。又二つの物質の部分の継目に於ける境界条件としては

$$(u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}, \quad k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=a_1} = k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=a_1} \quad (9), (10)$$

を採ることとする。 k_1, k_2 は熱伝導係数を表わす。

この問題は切口の一面 $y=0$ に於ける境界条件が同じ形で表わされていないことから、解の求め方が難しくなってくるのである。

u_1 及び u_2 は夫々

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{1,m} \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2,n} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y \quad (11), (12)$$

の如く表わせるものとする。又(3)の $f(y)$ も(11)と同じ形の級数で展開出来るとして、

$$f(y) = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{b} y \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \quad (13)$$

と書くこととする。

境界条件(5)~(8)によって

この問題は気象研究所の曲田光夫博士が二十数年前に解いたものであるが、遂に発表されずに今日に到り、同博士のもとにも原稿が無いとのことであった。然し著者はその当時同博士と同じ所で仕事をしていた関係上、この問題の解を簡単に記録に置いたので、それをもとにして解き方を復元し、同博士の同意を得てここに発表する。

$$\int_0^b \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \sin \frac{m\pi}{b} y dy = -\frac{m^2 \pi^2}{b^2} \int_0^b u_1 \sin \frac{m\pi}{b} y dy$$

$$\int_0^b \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y dy = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4b^2} \int_0^b u_2 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y dy$$

であるから、微分方程式(1), (2)から $v_{1,m}, v_{2,n}$ に対する微分方程式が次の如く得られる:

$$-\frac{d^2 v_{1,m}}{dx^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} v_{1,m} = 0, \quad -\frac{d^2 v_{2,n}}{dx^2} - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4b^2} v_{2,n} = 0. \quad (16), (17)$$

(11), (12), (13)により境界条件(3), (4), (9), (10)は次の如くなる:

$$(v_{1,m})_{x=0} = \frac{b}{2} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \quad (v_{2,n})_{x=a} = 0, \quad (16), (17)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (v_{1,m})_{x=a_1} \sin \frac{m\pi}{b} y = \sum_{n=0}^{\infty} (v_{2,n})_{x=a_1} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y, \quad (18)$$

$$k_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{dv_{1,m}}{dx} \right)_{x=a_1} \sin \frac{m\pi}{b} y = k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{dv_{2,n}}{dx} \right)_{x=a_1} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y. \quad (20)$$

微分方程式(14), (15)の解の中で、境界条件(16), (17)を満足するものは

$$v_{1,m} = \frac{2}{b} \cosh \frac{m\pi}{b} x \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda + A_m \sinh \frac{m\pi}{b} x, \quad (20)$$

$$v_{2,n} = B_n \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} (a-x) \quad (21)$$

と書くことができる。

(20)及び(21)を(18)及び(19)に代入し、 $a-a_1=a_2$ と置けば、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{b} \cosh \frac{m\pi}{b} a_1 \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda + A_m \sinh \frac{m\pi}{b} a_1 \right) \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y, \quad (22)$$

$$k_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{b} \left(\sinh \frac{m\pi}{b} a_1 \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda + A_m \cosh \frac{m\pi}{b} a_1 \right) \sin \frac{m\pi}{b} y$$

$$= k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{b} \frac{(2n+1)\pi}{2b} B_n \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y, \quad (23)$$

となる。(22)の右辺を今 $\varphi(y)$ も置くこととする。然るときは、

$$\frac{2}{b} \cosh \frac{m\pi}{b} a_1 \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda + A_m \sinh \frac{m\pi}{b} a_1 = \int_0^b \varphi(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \quad (24)$$

$$B_n \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 = \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \quad (25)$$

と書くことができる。これらの関係により、 A_m, B_n が次のように求められる:

$$A_m = -\frac{2}{b} \frac{\cosh \frac{m\pi}{b} a_1}{\sinh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda + \frac{1}{\sinh \frac{m\pi}{b} a_1} \varphi(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \quad (26)$$

$$B_n = \frac{1}{\sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2} \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda. \quad (27)$$

(24)及び(25)を(23)に代入すれば、

$$\begin{aligned}
& k_1 \sum_{m=1}^{\infty} m \left(-\frac{2}{b} \frac{1}{\sinh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \right. \\
& \quad \left. + \cot \frac{m\pi}{b} a_1 \int_0^b \varphi(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \right) \sin \frac{m\pi}{b} y \\
& = -k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \right) \\
& \quad \times \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y \quad (28)
\end{aligned}$$

となる。この式の右边を $\frac{b}{2} F(y)$ に等しと置くこととすれば、

$$\begin{aligned}
& k_1 m \left(-\frac{b}{2} \frac{1}{\sinh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda + \coth \frac{m\pi}{b} a_1 \int_0^b \varphi(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \right) \\
& = \int_0^b F(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \quad (29) \\
& -k_2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 \int_0^b \varphi(\lambda) \cot \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \\
& = \int_0^b F(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \quad (30)
\end{aligned}$$

を得る。これから次の関係が得られる：

$$\begin{aligned}
\int_0^b \varphi(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda &= \frac{\tanh \frac{m\pi}{b} a_1}{k_1 n} \int_0^b F(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\
&+ \frac{2}{b} \frac{1}{\cosh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda = -\frac{\tanh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2}{k_1 \left(n + \frac{1}{2} \right)} \int_0^b F(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda. \quad (32)$$

(31)及び(32)を見れば $\varphi(y)$ は

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tanh \frac{m\pi}{b} a_1}{k_1 n} \sin \frac{m\pi}{b} y \int_0^b F(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\
&+ \frac{4}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{b} y}{\cot \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\varphi(y) = -\frac{2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2}{k_2 \left(n + \frac{1}{2} \right)} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y \int_0^b F(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \quad (34)$$

と書き得ることがわかる。然るに $\frac{b}{2} F(y)$ は(28)の右边を表わしているから、

$$F(y) = -\frac{2k_2}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_1 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda$$

である。これを(3)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \frac{4}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{m\pi}{b} y}{\cosh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\ & - \frac{16k_2}{\pi b k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tanh \frac{m\pi}{a} a_1}{4m^2 - (2n+1)^2} \sin \frac{m\pi}{b} y \right) \\ & \times \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \quad (35) \end{aligned}$$

となる。今

$$\begin{aligned} H(y) = & \frac{4}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{b} y}{\cosh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \\ g_n(y) = & \frac{16k_2}{b\pi k_1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tanh \frac{m\pi}{b} a_1}{4m^2 - (2n+1)^2} \sin \frac{m\pi}{b} y \end{aligned}$$

と置ければ、(35)は

$$\varphi(y) = H(y) - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \quad (36)$$

と書ける。これは Fredholm の積分方程式である。

この積分方程式(36)の解を求めなくてはならない。

$$a_{m',n'} = \int_0^b g_{m'}(\lambda) \cos \frac{(2n'+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda, \quad [m',n'=0,1,2,\dots] \quad (37)$$

$$a_{n'} = \int_0^b H(\lambda) \cos \frac{(2n'+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda, \quad [n'=0,1,2,\dots] \quad (38)$$

と置き、且つ無限連立方程式：

$$x_{n'} + a_{0,n'} x_0 + a_{1,n'} x_1 + a_{2,n'} x_2 + \dots = a_{n'} \quad [n'=0,1,2,\dots] \quad (39)$$

の根を

$$x_0 = \alpha_0, x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots \quad x_{n'} = \alpha_{n'} \dots$$

と置けば、(36)の解は

$$\varphi(y) = H(y) - \sum_{n'=0}^{\infty} \alpha_{n'} g_{n'}(y)$$

* 解の存在の存在については

Hilbert : Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. S. 165 u. S. 180.

を参照のこと。

にて与えられるのである。

この証明は次のようにできる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n'=0}^{\infty} g_{n'}(y) \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n'+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \\
 &= \sum_{n'=0}^{\infty} g_{n'}(y) \int_0^b \left(H(\lambda) - \sum_{m'=0}^{\infty} \alpha_{m'} g_{m'}(\lambda) \right) \cos \frac{(2n'+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \\
 &= \sum_{n'=0}^{\infty} g_{n'}(y) \int_0^b \left(a_{n'} - \sum_{m=0}^{\infty} a_{m',n} \alpha_{m'} \right) \quad [\text{③⑦, ③⑧による}] \\
 &= \sum_{n'=1}^{\infty} \alpha_{n'} g_{n'}(y) \quad [\text{③①による}] \\
 &= H(y) - \varphi(y).
 \end{aligned} \tag{40}$$

これは③⑥であるから、④①が③⑥の解であることがわかる。

③⑥の関係により

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \varphi(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda = \int_0^b H(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda - \sum_{n'=0}^{\infty} \alpha_{n'} \int_0^b g_{n'}(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\
 &= \frac{2}{b} \frac{1}{\cosh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\
 &= \frac{8k_2}{\pi k_1} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\left(n' + \frac{1}{2}\right) \alpha_n \coth \frac{(2n'+1)\pi}{2b} a_1 \tanh \frac{m\pi}{b} a_1}{4m^2 - (2n'+1)^2}, \tag{41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \varphi(\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{3b} \lambda d\lambda = \int_0^b \left(H(\lambda) - \sum_{m'=0}^{\infty} \alpha_{m'} g_{m'}(\lambda) \right) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} \lambda d\lambda \\
 &= a_n - \sum_{m'=0}^{\infty} \alpha_{m'} g_{m',n} = \alpha_n \tag{42}
 \end{aligned}$$

となる。これらの値を④②, ④③に代入すれば次の値が得られる

$$\begin{aligned}
 A_m &= -\frac{2}{b} \frac{\cosh \frac{m\pi}{b} a_1}{\sinh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\
 &+ \frac{1}{\sinh \frac{m\pi}{b} a_1 \cosh \frac{m\pi}{b} a_1} \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda, \\
 &- \frac{8k_2}{\pi k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha_n \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2}{\{4m^2 - (2n+1)^2\} \tanh \frac{m\pi}{b} a_1} \\
 &= -\frac{2}{b} \tanh \frac{m\pi}{b} a_1 \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\
 &- \frac{8k_2}{\pi k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha_n \coth \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2}{\{4m^2 - (2n+1)^2\} \cosh \frac{m\pi}{b} a_1}, \tag{43}
 \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{\alpha_n}{\sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2}. \quad (44)$$

(41)及び(42)を夫々(20)及び(21)に代入したものを更に(11), (12)に代入すれば, 求める u_1 及び u_2 が次の如く得られる:

$$u_1 = \frac{4}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\cosh \frac{m\pi}{b} x - \tanh \frac{m\pi}{b} a_1 \sinh \frac{m\pi}{b} x \right) \sin \frac{m\pi}{b} y \int_0^b f(\lambda) \sin \frac{m\pi}{b} \lambda d\lambda \\ - \frac{16k_2}{\pi b k_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha_n \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2}{\{4m^2 - (2n+1)^2\} \cosh \frac{m\pi}{b} a_1} \sinh \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad (45)$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} a_2} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2b} (a-x) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y. \quad (46)$$