

Sur l'espace fibré tensoriel à une variété différentiable
admettant les homéomorphismes locaux à l'espace
projectif à dimension infinie

Par Jôyô Kanitani

Résumé

Dans un article précédent (I), nous avons démontré qu'on peut faire un groupe topologique de l'ensemble \mathfrak{G} des transformations projectives normales dans l'espace projectif S à dimension infinie, en y induisant la topologie du produit S^I où I est l'ensemble des indices pour une base de S , et qu'un sous-groupe G_i de \mathfrak{G} est utilisable comme le groupe structural de l'espace fibré tangent à une variété différentiable M admettant les homéomorphismes locaux à S .

Cet article est consacré à faire avancer ces études pour l'espace fibré tensoriel à M . Nous introduisons les cubes affines qui servent à induire la topologie de S sur un espace vectoriel. Nous obtenons ainsi le fibre-type pour la structure d'espace fibré tensoriel. Quant au groupe structural la méthode usée pour l'espace fibré tangent s'applique avec une modification propre. Nous nous occupons enfin de la généralisation du tenseur riemannien.

1. Il n'est pas difficile de généraliser la notion du produit tensoriel pour les espaces vectoriels à dimension infinie. Soient V un ensemble, F un corps, Γ un ensemble d'indices quelconques bien ordonné. Envisageons, dans $V \times V$, une famille

$$\mathfrak{U} = ((x, y)_\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma, (x, y)_\gamma \in V \times V)$$

equipotente à Γ ainsi que, dans $F \times (V \times V)$, une famille

$$\mathfrak{U}_i = (\lambda_\gamma(x, y)_\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma, \lambda_\gamma \in F, (x, y)_\gamma \in V \times V),$$

où $\lambda_\gamma = 0$ sauf pour un nombre fini des indices γ . La famille \mathfrak{U}_i se nomme une combinaison linéaire s'appuyée sur la famille \mathfrak{U} .

Lorsque les λ_γ ($\gamma \in \Gamma$) sont tous nuls, la combinaison linéaire \mathfrak{U}_i se réduit à l'ensemble vide. Au cas contraire, si $(\lambda^{r_1}, \dots, \lambda^{r_m})$ est l'ensemble des $\lambda_\gamma \neq 0$, nous appelons $(\lambda^{r_1}(x, y)_{r_1}, \dots, \lambda^{r_m}(x, y)_{r_m})$ la partie effective de \mathfrak{U}_i .

On regard équivalentes les deux combinaisons linéaires, si celles-ci se réduisent à l'ensemble vide ou bien si leurs parties effectives coïncident l'une avec l'autre.

Pour définir la somme des deux classes A et B en cette équivalence, on peut d'abord prendre comme leurs représentants les combinaisons linéaires s'appuyées sur une même famille des points de $V \times V$, en ajoutant, s'il est nécessaire,

quelques éléments de nombre fini à l'ensemble d'indices. Soient $(\sigma^j(x, y)_j)$ et $(\tau^j(x, y)_j)$ ($j \in J$; $\sigma^j, \tau^j \in F$; $(x, y)_j \in V \times V$) ces combinaisons linéaires représentatives. On prend maintenant comme $A+B$ la classe C à laquelle appartient la combinaison linéaire

$$((\sigma^j + \tau^j)(x, y)_j) \quad (j \in J).$$

La class d'une combinaison linéaire $(\mu^k(x, y)_k)$ ($k \in K$) se note $[(\mu^k(x, y)_k) (k \in K)]$. Si les τ^j ($j \in J$) sont tous nuls, il vient

$$\begin{aligned} & [(\sigma^j(x, y)_j) (j \in J)] + [(\tau^j(x, y)_j) (j \in J)] \\ &= [(\sigma^j + \tau^j)(x, y)_j) (j \in J)] = [(\sigma^j(x, y)_j) (j \in J)], \end{aligned}$$

à savoir, tout combinaison linéaire qui se réduit à l'ensemble vide appartient à la classe nulle. On a ainsi

$$[(\lambda^r(x, y)_r) (r \in I)] = [\{\lambda^{r_1}(x, y)_{r_1}\}] + \dots + [\{\lambda^{r_m}(x, y)_{r_m}\}].$$

Ce fait s'écrit simplement

$$\left[\sum_r \lambda^r(x, y)_r \right] = \sum_r [\lambda^r(x, y)_r].$$

On définit en outre

$$\alpha \left[\sum_r \lambda^r(x, y)_r \right] = \left[\sum_r \lambda^{r'}(x, y)_r \right] \quad (\lambda^{r'} = \alpha \lambda^r).$$

Alors l'ensemble \mathbb{U} des classes des combinaisons linéaires s'appuyées sur les familles des point de $V \times V$ devient un espace vectoriel pour lequel l'ensemble des classe $[(x, y)]$ ($(x, y) \in V \times V$) se fait une base.

2. Supposons maintenant que V est un espace vectoriel sur un corps commutatif F . Soit S l'ensemble des classes de combinaisons linéaires de la forme

$$\left[(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) - \sum_{i,j=1}^2 \alpha^i \beta^j (x_i, y_j) \right].$$

Le quotient \mathbb{U}/S se note $V \otimes V$. Introduisons l'application canonique

$$h: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}/S.$$

L'élément $h[(x, y)]$ de $V \otimes V$ se note $x \otimes y$.

Prenons deux éléments X et Y de \mathbb{U}/S . Soient $[\mathbb{U}_i]$ et $[\mathbb{U}'_\mu]$ leurs représentants. On définit

$$X + Y = h([\mathbb{U}_i] + [\mathbb{U}'_\mu])$$

Alors $V \otimes V$ se réduit un group abélien où $h(S) = 0$. Entre les $x \otimes y$ ($(x, y) \in V \times V$), il n'existe que les relations de la forme

$$(2.1) \quad (\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) \otimes (\beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) - \sum_{i,j=1}^2 \alpha^i \beta^j x_i \otimes y_j = 0$$

$$(\alpha^i, \beta^j \in F; (x_i, y_j) \in V \times V).$$

Il résulte de là que

$$\begin{aligned} (\alpha x) \otimes y &= x \otimes (\alpha y) = \alpha(x \otimes y) \\ (\alpha \in F, (x, y) &\in V \times V). \end{aligned}$$

On définit ainsi

$$\alpha X = h[\alpha \mathbb{U}_i] \quad (\alpha \in F, \mathbb{U}_i \in \mathbb{U}, X \in V \otimes V).$$

Le quotient \mathbb{U}/S devient alors un espace vectoriel. Soit (e_i) ($i \in J$) une base de V . Prenons deux éléments de V

$$x = \sum_i a^i e_i, \quad y = \sum_j b^j e_j,$$

où $a^i = 0$ et $b^j = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i et des indices j . Le système d'équations (2.1) équivaut à

$$x \otimes y = \sum_{i,j} a^i b^j e_i \otimes e_j.$$

Tout élément de $V \otimes V$ s'exprime ainsi au moyen d'une combinaison linéaire des $e_i \otimes e_j$.

D'autre part, le premier membre de l'équation (2.2) ne peut pas prendre la forme $e_i \otimes e_j$ sans que cette équation soit une identité. Autrement dit, une combinaison linéaire $\sum_{i,j} \rho^{ij} e_i \otimes e_j$ ne s'annule pas à moins qu'il n'en soit ainsi pour tous les coefficients ρ^{ij} . Donc, la famille $(e_i \otimes e_j)$ ($i, j \in J$) est une base de $V \otimes V$.

3. Soient S un espace projectif à dimension infinie, et (A_i) ($i \in I$) une base de S . La transformation projective normale T de l'espace S dans lui-même s'exprime par un système d'équations de la forme ([, p.5)

$$\rho x'^i = \sum_j p_j^i x^j \quad (\rho \neq 0, i \in I, \sum_j |p_j^i| = 1),$$

où les coefficients p_j^i ($i, j \in I$) sont les coordonnées normales de $A'_i = TA_j$ par rapport au repère initial \mathbb{U} dont les sommets sont A_i ($i \in I$) de sorte qu'on a, pour chaque indice fixe j , $p_j^i = 0$ sauf un nombre fini des indices i .

L'inverse T^{-1} est défini par

$$\tau x^j = \sum_i q_i^j x'^i \quad (\tau \neq 0, j \in I, \sum_i |q_i^j| = 1),$$

où q_i^j ($i, j \in I$) sont les coordonnées normales de A_i ($i \in I$) par rapport au repère transformé \mathbb{U}' , et on a

$$(3.1) \quad \sum_i p_i^l q_i^j = \sum_i q_i^l p_i^j = \delta_i^j.$$

Comme nous l'avons démontré dans un article précédent ([, p.7, p.10) l'ensemble \mathcal{G} des transformations projectives normales forme un groupe topologique. Pour la transformation T , conservant le cube projectif $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}(A_i, 1)$ (A_i : l'élément le plus petit de (A_i) ($i \in I$)), on a

$$p_i^l > 0, \quad q_i^l > 0, \quad p_i^l q_i^l = 1, \quad p_i^l = q_i^l = 0 \quad (l \in I - \{i\}),$$

et elle opère sur \mathcal{G}_i comme un automorphisme. Si elle conserve de plus le sommet A_i , on a

$$p_i^l = q_i^l = 1, \quad p_i^l = q_i^l = 0 \quad (l \in I - \{i\}).$$

de sorte que son équation s'écrit

$$(3.2) \quad \xi'^i = \sum_j p_j^i \xi^j \quad (i, j \in I - \{i\}),$$

où

$$\xi^i = \frac{x^i}{x^i}.$$

L'ensemble G_i de telles transformations est un sous-groupe de \mathcal{G} ; nous pouvons induire sur G_i la topologie de \mathcal{G} .

4. Dans \mathcal{G}_i un couple de deux points (P, Q) s'appelle vecteur géométrique d'origine P et d'extrémité Q . Les deux vecteurs géométriques (P, Q) et (P', Q') sont dits parallèles lorsque les droites $P \vee Q$ et $P' \vee Q'$ se coupent en un point de la frontière de \mathcal{G}_i .

Soient $(1, \xi^i)$ et $(1, \eta^i)$ ($i \in I - \{i\}$) les coordonnées non-homogènes des points P et Q . La droite $P \vee Q$ rencontre la frontière de \mathcal{G}_i au point $(0, \eta^i - \xi^i)$. La condition pour que la droite $P'(1, \xi'^i) \vee Q'(1, \eta'^i)$ soit parallèle à la droite $P \vee Q$ s'écrit donc $\eta'^i - \xi'^i = \rho(\eta^i - \xi^i)$ ($i \in I - \{i\}$). En particulier, lorsque $\eta'^i - \xi'^i = \eta^i - \xi^i$ les deux vecteurs géométriques (P, Q) et (P', Q') sont regardés équivalents.

La classe en cette équivalence est un vecteur proprement dit. L'espace vectoriel formé de tels vecteurs se note Y_i . Le vecteur géométrique (P, Q) équivaut à celui d'origine A_i et d'extrémité $R(1, \eta^i - \xi^i)$. Chaque vecteur est ainsi représenté par un vecteur géométrique d'origine A_i . Le vecteur u représenté par $(A_i(1, 0), P(1, \xi^i))$ se note $u(\xi)$. La somme $u(\xi) + v(\eta)$ et le produit $mu(\xi)$ sont les vecteurs $s(\xi + \eta)$ et $t(m\xi)$.

Désignons maintenant par e_k le vecteur représenté par $(A_i(1, 0), U(1, \delta_k^i))$. Il vient

$$u(\xi) = \sum_i \xi^i e_i$$

à savoir, l'ensemble des vecteurs e_k ($k \in I - \{i\}$) forme une base de Y_i par rapport auquel les ξ^i ($i \in I - \{i\}$) sont les composants du vecteur $u(\xi)$.

5. Puisqu'un élément $u(\xi)$ de Y_i est représenté par un point $P(1, \xi^i)$ de \mathcal{G}_i ($u=0$ est représenté par $P=A_i$), on peut induire la topologie de \mathcal{G}_i sur Y_i . D'une manière précise, au vecteur $u(\xi) \in Y_i$ on fait correspondre le point $P \in \mathcal{G}_i$ dont les coordonnées normales sont définies par

$$x^0 = \frac{1}{1 + \sum_s |\xi^s|}, \quad x^i = \frac{\xi^i}{1 + \sum_s |\xi^s|} \quad (i, s \in I - \{i\}),$$

et on désigne par $\mathcal{U}(\xi, \lambda)$ l'ensemble des vecteurs $v(\eta)$ auxquels correspondent les points ayant les coordonnées normales

$$y^0 = \frac{1}{1 + \sum_t |\eta^t|}, \quad y^i = \frac{\eta^i}{1 + \sum_t |\eta^t|} \quad (i, t \in I - \{i\})$$

assujetties à la condition que

$$(5.1) \quad |y^\alpha - x^\alpha| < \lambda \quad (\alpha \in I).$$

On fait, dans Y , l'ensemble ouvert de la réunion des cubes projectifs ainsi définis. Nous conviendrons désormais de prendre comme largeur λ un nombre positif moindre que $\min_i \left(\frac{x^0}{2}, |x^i| \neq 0 \quad (i \in I - \{t\}) \right)$.

En vertu de l'inégalité (5.1), on a

$$\frac{x^t - \lambda}{x^0 + \lambda} < \frac{y^t}{y^0} < \frac{x^t + \lambda}{x^0 - \lambda}$$

ou

$$\frac{x^t - \lambda}{x^0 - \lambda} < \frac{y^t}{y^0} < \frac{x^t + \lambda}{x^0 + \lambda}$$

selon que $x^t \geq 0$, ce qui nous donnent

$$-\frac{2\lambda}{(x^0)^2} < \frac{y^t}{y^0} - \frac{x^t}{x^0} < \frac{2\lambda}{(x^0)^2}.$$

Lorsque $x^t = 0$, on a

$$\frac{|y^t|}{y^0} < \frac{\lambda}{x^0 - \lambda} < \frac{2\lambda}{x^0} < \frac{2\lambda}{(x^0)^2}.$$

Soit e le nombre des indices i tels que $x^i \neq 0 \quad (i \in I - \{t\})$. Comme l'inégalité

$$|x^\alpha| - \lambda < |y^\alpha| \quad (\alpha \in I)$$

est aussi vérifiée, il vient

$$1 - (1+e)\lambda < 1 - \sum_i |y^i|,$$

où la sommation dans le second membre est étendue aux indices i tels que $x^i = 0, y^i \neq 0$. On a ainsi

$$\sum_i |y^i| < \frac{2(1+e)\lambda}{x^0} < \frac{2(1+e)\lambda}{(x^0)^2}.$$

En somme, le cube projectif $\mathbb{C}(\xi, \lambda)$ est contenu dans l'ensemble $C(\xi, \epsilon)$ des vecteurs $\mathbf{v}(\eta)$ satisfaisant à la condition que

$$(5.2) \quad \begin{cases} |\eta^t - \xi^t| < \frac{\epsilon}{1+e} \quad (i \in I - \{t\}), \\ \sum_i |\eta^i| < \epsilon \quad (\xi^i = 0, \eta^i \neq 0), \end{cases}$$

où $\epsilon = 2(1+e)\lambda/(x^0)^2$ et, par suite,

$$0 < \epsilon < 2(1+e)(1 + \sum_s |\xi^s|)^2 (\min_i (\frac{1}{2}, |\xi^i| \neq 0)).$$

Nous appellerons cet ensemble $C(\xi, \epsilon)$ le cube affine de centre $\mathbf{u}(\xi)$ et de largeur ϵ .

6. Pour un point quelconque $\mathbf{u}(\eta) \in C(\xi, \epsilon)$, il existe un nombre positif δ tel que $C(\eta, \delta) \subset C(\xi, \epsilon)$. En effet, si $\mathbf{u}(\eta) \in C(\xi, \epsilon)$, il existe un nombre δ tel que

$$0 < 2\delta < \epsilon - \sum_i |\eta^i|$$

et que, pour $i \in I - \{t\}$

$$\frac{2\delta}{1+f} < \frac{\epsilon}{1+e} - |\eta^t - \xi^t|,$$

où f est le nombre des indices i tels que $\eta^i \neq 0$, car on a $\eta^i - \xi^i = 0$ sauf pour un nombre fini des indices i . Prenons maintenant un point $w(\zeta) \in C(\eta, \delta)$. Il vient

$$(6.1) \quad \begin{cases} |\zeta^i - \eta^i| < \frac{\delta}{1+f}, \\ \sum_j |\zeta^j| < \delta \quad (\eta^j = 0, \zeta^j \neq 0), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\zeta^i - \xi^i| &\leq |\zeta^i - \eta^i + \eta^i - \xi^i| < \frac{\delta}{1+f} + |\eta^i - \xi^i| < \frac{\varepsilon}{1+e}, \\ \sum_i |\zeta^i| + \sum_j |\zeta^j| &\leq \sum_i |\eta^i| + \frac{f-e}{1+f} \delta + \delta < \sum_i |\eta^i| + 2\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Or, comme nous l'avons démontré plus haut, nous pouvons trouver un nombre positif ρ de manière avoir $\mathcal{G}(\eta, \rho) \subset C(\eta, \delta)$. Tout cube affine est donc un ensemble ouvert.

Réproquement, tout cube projectif $\mathcal{G}(\xi, \varepsilon)$ est une réunion des cubes affines. En effet, pour un vecteur quelconque $v(\eta) \in \mathcal{G}(\xi, \varepsilon)$ il existe un nombre positif $\rho < 1$ tel que $\mathcal{G}(\eta, \rho) \subset \mathcal{G}(\xi, \varepsilon)$. Considérons un cube affine $C(\eta, \delta)$ où δ est un nombre positif moindre que $\min(\frac{\rho}{8}, |\xi^i| \neq 0)$. Alors, pour un vecteur $w(\zeta) \in C(\eta, \delta)$ les équations (6.1) sont vérifiées de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} \eta^i - \frac{\delta}{1+f} &< \zeta^i < \eta^i + \frac{\delta}{1+f}, \\ |\eta^i| - \frac{\delta}{1+f} &< |\zeta^i| < |\eta^i| + \frac{\delta}{1+f} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sum_k |\eta^k| - \frac{f}{1+f} \delta < \sum_k |\zeta^k| < \sum_k |\eta^k| + \frac{f}{1+f} \delta \quad (|\eta^k| \neq 0).$$

Maintenant, en tenant compte de la seconde équation de (6.1) on peut déduire

$$1 + \sum_i |\eta^i| - 2\delta < 1 + \sum_i |\zeta^i| < 1 + \sum_i |\eta^i| + 2\delta \quad (i \in I - \{i\}).$$

On a donc, en désignant par y^α et z^α les coordonnées normales de $v(\eta)$ et $w(\xi)$,

$$|z^0 - y^0| < \frac{2\delta}{(1 + \sum_s |\eta^s|)(1 + \sum_t |\zeta^t|)} < 2\delta$$

et aussi

$$\frac{\eta^i - \delta}{1 + \sum_s |\eta^s| + 2\delta} < \frac{\zeta^i}{1 + \sum_t |\zeta^t|} < \frac{\eta^i + \delta}{1 + \sum_s |\eta^s| - 2\delta}$$

ou

$$\frac{\eta^i - \delta}{1 + \sum_s |\eta^s| - 2\delta} < \frac{\zeta^i}{1 + \sum_t |\zeta^t|} < \frac{\eta^i + \delta}{1 + \sum_s |\eta^s| + 2\delta}$$

selon que $\eta^i \geq 0$, ce qui nous donnent

$$|z^i - y^i| < \frac{4\delta}{1 + \sum_s |\gamma^s|} < 4\delta.$$

Lorsque $\gamma^i = 0$ on a, grâce à la seconde équation de (6.1), $|z^i| < \delta$.

En tous cas on a

$$|z^\alpha - y^\alpha| < 4\delta < \rho \quad (\alpha \in I).$$

Cela revient à dire que

$$C(\gamma, \delta) \subset \mathbb{G}(\gamma, \rho) \subset \mathbb{G}(\xi, \varepsilon)$$

et ceci achève la démonstration.

Quant au groupe G_i , les p_j^i ($i \in I - \{i\}$) étant les coordonnées normales d'un point de la frontière \mathfrak{B} du cube projectif \mathbb{G}_i , d'après le raisonnement mentionné au n° 13 de l'article précédent (II), la topologie de G_i est induite de celle du produit $\mathfrak{B}^{I'}$ ($I' = I - \{i\}$).

7. Envisageons maintenant l'espace tensoriel $Y_i \otimes Y_i$. Comme nous l'avons mentionné au n° 2, il admet une base $(e_i \otimes e_j)$, à savoir, son point courant ζ s'écrit

$$\zeta = \zeta^r e_{pr_1r} \otimes e_{pr_2r} \quad (r \in K = (I - \{i\}) \times (I - \{i\})).$$

Nous pouvons donc définir, au moyen d'inégalité de la forme (5.2) où ξ et η sont remplacés par ζ et ζ' , un cube affine qui sert à former une base pour la topologie sur $Y_i \otimes Y_i$.

D'après ce qu'on a remarqué aux n°s 3 et 4, la transformation T_i définie par $\xi'^i = \sum_j p_j^i \xi^j$ induit la transformation de base : $e_k' = \sum_i p_k^i e_i$. Or on a, d'après (2.1),

$$e_k' \otimes e_l' = \left(\sum_i p_k^i e_i \right) \otimes \left(\sum_j p_l^j e_j \right) = \sum_{i,j} p_k^i p_l^j (e_i \otimes e_j).$$

Il résulte de là que la transformation T_i induit, sur $Y_i \times Y_i$, une application linéaire qui fait correspondre, au tenseur $e_k \otimes e_l$ le tenseur $\sum_{i,j} p_k^i p_l^j (e_i \otimes e_j)$.

C'est la transformation qui s'exprime

$$(7.1) \quad \zeta'^{ij} = \sum_{k,l} p_k^i p_l^j \zeta^{kl} \quad ((i,j) \in K).$$

L'ensemble $G_i^{(2)}$ de telles transformations forme un groupe qui est une partie du groupe des applications linéaires générales sur $Y_i \otimes Y_i$ et qui est isomorphe à G_i de sorte qu'on peut faire de $G_i^{(2)}$ une groupe topologique, en y induisant la topologie du produit

$$\prod_{r \in K} \mathfrak{B}_r \quad (\mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}_{pr_1r} \otimes \mathfrak{B}_{pr_2r}; \mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}).$$

8. Soient M un espace topologique, et (U_α) ($\alpha \in a$) un recouvrement ouvert de M . Supposons qu'il existe, pour chaque U_α , une application topologique φ_{U_α} de U_α dans une partie ouverte Ω_α de l'espace projectif S à dimension infinie.

Soient \mathfrak{A} un repère de S (une base munie d'une famille \mathfrak{U} des points d'unité), A_i ($i \in I$) les sommets de \mathfrak{A} (les points de la base).

Prenons un point $x_0 \in M$. Supposons que $x_0 \in U_\alpha$, $\sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} x_0$ et que $S(\sigma_0) = A_k \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m}$ ($S(\sigma_0)$ est l'espace projectif de la moindre dimension qui contient σ_0 et qui est déterminé par des sommets de \mathfrak{A} ([1, p. 5])). Nous pouvons trouver un nombre positif λ tel que le cube projectif $\mathfrak{G}(\sigma_0, \lambda)$ soit contenu dans Ω_α .

Par l'involution T_k (la transformation projective qui permute A_k et A_i (l'élément le plus petit de (A_i) ($i \in I$)) et qui laisse invariant les autres sommets de \mathfrak{A} ainsi que tous les points d'unité), ce cube $\mathfrak{G}(\sigma_0, \lambda)$ devient $\mathfrak{G}(u_0, \lambda)$ ($u_0 = T_k \sigma_0 = T_k \varphi_{U_\alpha} x_0$) dans lequel u^i est positif pour tout point u , u^k ($k \in I$) étant les coordonnées normales de u ([1, p. 5, p. 7]). Dans le voisinage $V_{x_0} = \varphi_{U_\alpha}^{-1} \mathfrak{G}(\sigma_0, \lambda) = (T_k \varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathfrak{G}(u_0, \lambda)$, les u^i ($i \in I - \{i\}$) sont pris comme coordonnées locales de $x \in V_{x_0}$.

Supposons ensuite que $x_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$. L'intersection

$$V_{x_0} = (\varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathfrak{G}(\sigma_0, \lambda) \cap (\varphi_{U_\beta})^{-1} \mathfrak{G}(\tau_0, \mu) \quad (\tau_0 = \varphi_{U_\beta} x_0)$$

est un voisinage ouvert du point x_0 . Les deux domaines

$$\Omega_{\alpha, \beta} = T_k \varphi_{U_\alpha} V_{x_0}, \quad \Omega_{\beta, \alpha} = T_k \varphi_{U_\beta} V_{x_0}$$

$$(S(\tau_0) = A_k \vee A_{j_0} \vee \dots \vee A_{j_n})$$

sont homéomorphes. Les deux systèmes de coordonnées locales (u^i) , (v^j) ($i, j \in I - \{i\}$) du point $x \in V_{x_0}$, qui sont respectivement les coordonnées normales du point $u = T_k \varphi_{U_\alpha} x$ et celles du point $v = \varphi_{U_\beta} x$ se relient au moyen d'équations de la forme

$$v^j = P^j(\dots, u^i, \dots), \quad u^i = Q^i(\dots, v^j, \dots) \quad (i, j \in I - \{i\}),$$

$$0 < v^i = P^i = 1 - \sum |P^j|, \quad 0 < u^i = Q^i = 1 - \sum |Q^j|.$$

Etant donné un point u (resp. un point v), on a $u^i = 0$ ($v^j = 0$) sauf pour un nombre fini des indices $i \in I - \{i\}$ ($j \in I - \{i\}$), et on a aussi $P^j = 0$ ($Q^i = 0$), sauf pour un nombre fini des indices $j \in I - \{i\}$ ($i \in I - \{i\}$).

De $v = T_k \varphi_{U_\beta} (T_k \varphi_{U_\alpha})^{-1} T_k \varphi_{U_\alpha} (T_k \varphi_{U_\beta})^{-1} v$, on déduit

$$(8.1) \quad v^i = P^i(\dots, Q^i(\dots, v^j), \dots, \dots) \quad (v \in \Omega_{\beta, \alpha}; i, j, t \in I - \{i\}).$$

De même, on a

$$(8.2) \quad u^i = Q^i(\dots, P^j(\dots, u^s, \dots), \dots) \quad (u \in \Omega_{\alpha, \beta}; i, j, s \in I - \{i\}).$$

9. Prenons un point $u(x) \in \Omega_{\alpha, \beta}$ ($x \in V_{x_0}$). Soit σ un nombre positif tel que $\mathfrak{G}(u, \sigma) \subset \Omega_{\alpha, \beta}$, et $v = T_k \varphi_{U_\beta} (T_k \varphi_{U_\alpha})^{-1} u$. Il existe alors $\tau > 0$ tel que

$$\mathfrak{G}(v, \tau) \subset \Omega_{\beta, \alpha}, \quad \bar{v}_1 \in \mathfrak{G}(v, \tau) \Rightarrow \bar{u}_1 \in \mathfrak{G}(u, \sigma) \\ (\bar{u}_1 = T_k \varphi_{U_\alpha} (T_k \varphi_{U_\beta})^{-1} \bar{v}_1).$$

Fixons un indice $j_1 \in I - \{i\}$. Prenons, dans $\mathfrak{G}(v, \tau)$, un point v_1 tel que $v_1^{j_1} \neq v^{j_1}$, $v_1^i = v^i$ ($j \neq j_1$) ($j \in I - \{i\}$). Posons $\eta(t) = t v_1 + (1-t) v$ ($0 \leq t \leq 1$).

Puisque

$$|\eta^k(t) - v^k| = t |v_1^k - v^k| < \tau \quad (k \in I),$$

$$\sum_s |\eta^s(t)| = t \sum_s |v_1^s| + (1-t) \sum_s |v^s| = t+1-t=1$$

le point $\eta(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) décrit un segment dans $\mathbb{G}(v, \tau)$ de sorte que le point $\xi(t) = T_k \varphi_{U\sigma} (T_k \varphi_{U\delta})^{-1} \eta(t)$ engendre un arc dans $\mathbb{G}(u, \sigma)$. Si les fonctions $\xi^i(t)$ ($i \in I - \{t\}$) sont continuellement différentiables dans ($0 \leq t \leq 1$), et que la borne inférieure ρ des valeurs absolues de $u'^t = \xi'^t(0) \neq 0$ soit positive à moins que les u'^t ($i \in I - \{t\}$) ne soient tous nuls, cet arc est dit régulier au point $u(x)$. Dans ce cas, si $u'^t \neq 0$, il existe un nombre t_0 tel que $\xi'^t \neq 0$ dans ($0 \leq t \leq t_0$) et, par suite, que $\xi^t(t) - u^t \neq 0$, car

$$\xi^t(t) - u^t = t u'^t(t_1) \quad (0 < t_1 < t).$$

Or, une fois la valeur de t fixée, on a $\xi^t(t) - u^t = 0$ sauf pour un nombre fini des indices l . Il faut donc que

$$(9.1) \quad Q_{j_1}^i(\dots, v^t, \dots) = 0 \quad \left(Q_j^i = \frac{\partial Q^i}{\partial v^j} \quad (i, j \in I - \{t\}) \right)$$

sauf pour un nombre fini des indices i .

Soient (i_1, \dots, i_m) l'ensemble des indices i tels que $\xi^i(t) \neq 0$. En vertu de (8.1) on a

$$\begin{aligned} \delta_{j_1}^j &= \frac{1}{\eta_{j_1}^j(t) - v_{j_1}^j} \left\{ P^j(\dots, 0, \dots, Q^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, \right. \\ &\quad Q^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, 0, \dots) - P^j(\dots, 0, \dots, Q^i(\dots, v^r, \dots, v^{j_1}, \dots), \dots, \\ &\quad \left. Q^i(\dots, v^r, \dots, v^{j_1}, \dots), \dots, 0, \dots) \right\} \\ &= \frac{1}{\eta_{j_1}^j(t) - v_{j_1}^j} \left\{ P^j(\dots, Q^i(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, Q^i(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots) \right. \\ &\quad - P^j(\dots, Q^i(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, Q^{i_{m-1}}(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), Q^i(\dots, v^{j_1}, \dots), \dots) \\ &\quad + P^j(\dots, Q^i(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, Q^{i_{m-1}}(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), Q^i(\dots, v^{j_1}, \dots), \dots) \\ &\quad - \dots \dots \dots \\ &\quad + P^j(\dots, Q^i(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), Q^{i_2}(\dots, v^{j_1}, \dots), \dots, Q^i(\dots, v^{j_1}, \dots), \dots) \\ &\quad \left. - P^j(\dots, Q^i(\dots, v^{j_1}, \dots), Q^{i_2}(\dots, v^{j_1}, \dots), \dots, Q^i(\dots, v^{j_1}, \dots), \dots) \right\}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta_{j_1}^j(t) - v_{j_1}^j} \left\{ Q^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t), \dots) - Q^i(\dots, v^r, \dots, v^{j_1}, \dots) \right\} \\ &= Q_{j_1}^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t'), \dots) \quad (0 < t' < t). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \delta_{j_1}^j &= P_{i_m}^j(\dots, 0, \dots, Q^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, Q^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t_m), \dots), \dots, 0, \dots) \\ &\quad \times Q_{j_1}^i(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t_m'), \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_{i_{m-1}}^j(\dots, Q^{i_1}(\dots, \eta^{j_1}(t), \dots), \dots, Q^{i_{m-1}}(\dots, \eta^{j_1}(t_{m-1}), \dots, Q^{i_m}(\dots, v^j, \dots), \dots) \\
& \times Q_{j_1}^{i_{m-1}}(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t'_{m-1}), \dots) \\
& + \dots \\
& + P_{i_1}^j(\dots, Q^{i_1}(\dots, \eta^{j_1}(t_1), \dots), Q^{i_2}(\dots, v^j, \dots), \dots, Q^{i_m}(\dots, v^j, \dots), \dots) \\
& \times Q_{j_1}^{i_1}(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t'_1), \dots) \quad (0 < t_s, t'_s < t)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, la sommation $\sum_{i_s} P_{i_s}^j Q_{j_1}^{i_s}$ est étendue aux indices i_s telles que $Q_{j_1}^{i_s}(\dots, v^r, \dots, \eta^{j_1}(t'_s), \dots) \neq 0$. Lorsque t tend vers zero, il vient

$$(9.2) \quad \delta_{j_1}^j = \sum_s (P_{i_s}^j)_{u(x)} (Q_{j_1}^{i_s})_{v(x)}.$$

De même, en prenant d'abord $\tau > 0$ et puis $\sigma > 0$ de telle sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}(v, \tau) & \subset \Omega_{\beta, \alpha}, \quad u = T_k \varphi_{U_\alpha} (T_k \varphi_{U_\beta})^{-1} v, \\
\mathbb{G}(u, \sigma) & \subset \Omega_{\alpha, \beta}, \quad \bar{u} \in \mathbb{G}(u, \sigma) \Rightarrow \bar{v} \in \mathbb{G}(v, \tau) \\
(\bar{v} & = T_k \varphi_{U_\beta} (T_k \varphi_{U_\alpha})^{-1} \bar{u})
\end{aligned}$$

et en fixant un indice ($i_1 \in I - \{i\}$), on considère un point $u_1 \in \mathbb{G}(u, \sigma)$ tel que

$$u_1^{i_1} \neq u^{i_1}, \quad u_1^i = u^i \quad (i \neq i_1) \quad (i \in I - \{i\})$$

et le segment décrit par le point $\tilde{\xi} = tu_1 + (1-t)u$ ($0 \leq t \leq 1$) et enfin l'arc décrit par le point $\tilde{\eta}(t) = T_k \varphi_{U_\beta} (T_k \varphi_{U_\alpha})^{-1} \tilde{\xi}(t)$. Si cet arc est régulier au point $v(x)$, on a

$$P_{i_1}^j(\dots, u^s, \dots) = 0 \quad \left(P_{i_1}^j = - \frac{\partial P^j}{\partial u^{i_1}} (i, j \in I - \{i\}) \right)$$

et, en vertu de (5.2),

$$(9.3) \quad \delta_{i_1}^i = \sum_t (Q_{i_1}^i)_{v(x)} (P_{i_1}^t)_{u(x)}.$$

Si les arcs $\xi(t)$ et $\tilde{\eta}(t)$ sont réguliers respectivement aux points $u(x)$ et $v(x)$ pour tout $x \in V_{x_0}$ indépendamment de choix des indices i_1, j_1 fixés auparavant, et aussi de choix du point $x_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$, on dit que les cartes locales $\varphi_{U_\alpha}, \varphi_{U_\beta}$ se relient différentiablement. Si cela arrive, comme nous le supposons désormais, pour toute couple de cartes locales dont les domaines se coupent, l'espace M est dit variété différentiable.

10. Avant d'introduire l'espace fibré tensoriel en point x de M , il faut préciser l'espace fibré tangent dont nous avons mentionné dans un article précédent[†] (II, p.13).

Soient $f(x)$ une fonction réelle dans une partie ouvert U de M . Prenons un

point $x_0 \in U$. Supposons que $x_0 \in U$. Soient

$$\sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} x_0, \quad S(\sigma_0) = A_h \setminus A_{t_1} \setminus \dots \setminus A_{t_m}, \quad \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) \in \varphi_{U_\alpha}(U \cap U_\alpha),$$

$$V(x_0) = (\varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda), \quad T_h \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) = \mathfrak{E}(u_0, \lambda).$$

Introduisons la fonction $f^*(\dots, u^i, \dots)$ ($u \in \mathfrak{E}(u_0, \lambda), i \in I - \{i\}$) telle que

$$f(x) = f^*(\dots, u^i(x), \dots) \quad (x \in V_{x_0}, u(x) = T_h \varphi_{U_\alpha} x).$$

Si cette fonction f^* est différentiable dans $\mathfrak{E}(u_0, \lambda)$ on dit que $f(x)$ est différentiable en point x_0 et si cela arrive pour tout point x_0 de U , la fonction $f(x)$ est dite différentiable dans U . C'est une propriété de $f(x)$ indépendante de choix de la carte dont le domaine contient le point x_0 .

Considérons une famille (f) des fonctions différentiables dont chacune est définie dans une partie ouverte de M contenant un voisinage ouvert du point $x \in M$. Ce qu'on appelle vecteur tangent à M en point x est une application linéaire ∇ de $f \in (f)$ dans R (réels), possédant les propriétés suivantes :

- (i) $\nabla u^i(x) = 0$ sauf pour un nombre fini des indices $i \in I - \{i\}$,
- (ii) ∇ est une différentiation, à savoir,

$$\nabla(x, fg) = f(x) \nabla(x, g) + g(x) \nabla(x, f) \quad (f, g \in (f)).$$

L'application $\frac{\partial}{\partial u^i} (i \in I - \{i\})$ qui fait correspondre le nombre réel $\left(\frac{\partial f^*}{\partial u^i}\right)_u$ à f est un vecteur tangent en x . La famille $\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\} (i \in I - \{i\})$ se fait une base de l'espace vectoriel $T(x)$ formé de l'ensemble des vecteurs tangents en point x ([1, p.12]). Lorsque $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$\frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_s Q_j^s \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_t P_i^t \frac{\partial}{\partial v^t}.$$

Etant donné un point $x_0 \in M$, prenons d'abord un domaine fixe U , contenant x_0 . Soient

$$x_0 \in U, \quad U \cap U_\alpha \cap U_\beta = U, \quad \rho_0 = \varphi_{U_\nu} x_0, \quad \sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} x_0, \quad \tau_0 = \varphi_{U_\beta} x_0,$$

$$\mathfrak{E}(\rho_0, x) \subset \varphi_{U_\nu} U, \quad \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) \subset \varphi_{U_\alpha} U, \quad \mathfrak{E}(\tau_0, \mu) \subset \varphi_{U_\beta} U,$$

$$t_0 = T_\sigma \varphi_{U_\nu} x_0, \quad u_0 = T_h \varphi_{U_\alpha} x_0, \quad v_0 = T_k \varphi_{U_\beta} x_0,$$

$$V_{x_0} = \varphi_{U_\nu}^{-1} \mathfrak{E}(\rho_0, \kappa) \cap \varphi_{U_\alpha}^{-1} \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) \cap \varphi_{U_\beta}^{-1} \mathfrak{E}(\tau_0, \mu),$$

$$\Omega_\nu = T_\sigma \varphi_{U_\nu} V_{x_0}, \quad \Omega_\alpha = T_h \varphi_{U_\alpha} V_{x_0}, \quad \Omega_\beta = T_k \varphi_{U_\beta} V_{x_0}.$$

Pour un point quelconque $x \in V_{x_0}$, on a

$$t(x) \in \Omega_\nu, \quad u(x) \in \Omega_\alpha, \quad v(x) \in \Omega_\beta,$$

$t^i(x), u^i(x), v^j(x)$ ($s, i, j \in I - \{i\}$) étant les coordonnées locales reliées sous la forme

$$t^s = \Phi^s(\dots, u^i, \dots) = \Psi^s(\dots, v^j, \dots),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_s \Phi_i^s \frac{\partial}{\partial t^s}, \quad \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_s \Psi_j^s \frac{\partial}{\partial t^s}.$$

Envisageons l'isomorphisme

$$\chi_{a,z}: Y_i \rightarrow T(x) \quad (x \in V_{x_0})$$

qui fait correspondre au vecteur $\mathbf{u}(\xi^i) \in Y_i$, le vecteur tangent

$$\sum_i \frac{\xi^i}{\sum_l |\Phi_l^i|} \frac{\partial}{\partial u^i} \in T(x).$$

La composée $g_{\hat{f},a}(x) = \chi_{\hat{f},z}^{-1} \chi_{a,z}$ devient un automorphisme $Y_i \rightarrow Y_i$, et on a

$$g_{\hat{f},a}(x) = g_{\hat{f},v}(x) g_{v,a}(x) \quad (x \in V_{x_0}).$$

Or, la transformation $\mathbf{w}(\xi') = g_{v,a}(\mathbf{u}(\xi))$ équivaut à

$$\begin{aligned} \chi_{v,z} \mathbf{w}(\xi') &= \sum_l \xi'^l \frac{\partial}{\partial t^l} = \chi_{a,z} \mathbf{u}(\xi) \\ &= \sum_i \frac{\xi^i}{\sum_s |\Phi_s^i|} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_i \left(\sum_l \frac{\xi^i}{\sum_s |\Phi_s^i|} \Phi_l^i \frac{\partial}{\partial t^l} \right) \end{aligned}$$

où la sommation \sum_i est étendue à un nombre fini des indices i et pour chacun de ces indices i la sommation \sum_l est étendue à un nombre fini des indices l de sorte qu'on peut échanger l'ordre de ces sommations. Il vient donc

$$\xi'^l = \sum_i \frac{\Phi_l^i}{\sum_s |\Phi_s^i|} \xi^i.$$

C'est une équation de la forme (3.2), à savoir, $g_{v,a}$ est une représentation d'un élément de G_i . Il en est de même pour $g_{\hat{f},v} = (g_{v,\hat{f}})^{-1}$ et, par suite, pour $g_{\hat{f},a} = g_{\hat{f},v} g_{v,a}$.

Nous pouvons donc donner à la réunion

$$\bigcup_{x \in M} T(x)$$

une structure d'espace fibré, de base M , de fibre-type Y_i , de groupe structural G_i , et de fonction de transition $g_{\hat{f},a}$.

De même, si l'on désigne par $\chi_{a,z}$ l'application $Y_i \otimes Y_i \rightarrow T(x) \otimes T(x)$ ($x \in V_{x_0}$) qui fait correspondre, au tenseur $\rho^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, le tenseur

$$\sum_{i,j} \frac{\rho^{ij}}{\left(\sum_k |\Phi_k^i| \right) \left(\sum_l |\Phi_l^j| \right)} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \frac{\partial}{\partial u^j}$$

la composée $g_{f,a}(x) = \gamma_{f,x}^{-1} \gamma_{a,x}$ devient une application de l'espace tensoriel $Y_i \otimes Y_i$ dans lui-même, qui s'exprime par une équation de la forme (7.1). On peut en conclure qu'on peut donner à la réunion

$$\bigcup_{x \in M} T(x) \otimes T(x)$$

une structure d'espace fibré, de base M , de fibre-type $Y_i \otimes Y_i$, de groupe structural G_i , et de fonction de transition $g_{f,a}$.

11. Quant à l'ensemble convexe dans l'espace affine à dimension infinie, on déduit les lemmes suivant de la même manière qu'à l'espace euclidienne à dimensions fines (III, p. 598).

D'abord, un ensemble X dans l'espace affine à dimension infinie est dit convexe si, $P(1, \xi')$ et $Q(1, \eta')$ ($i \in I - \{i\}$) étant deux points quelconques de X , tout point $R = (1-\lambda)P + \lambda Q$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) se trouve dans X . Par exemple, le cube affine $C(\xi, \epsilon)$ est convexe.

Lemme 1. Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.

Désignons maintenant par $\check{C}(\xi, \rho)$ un cube affine, où la largeur ρ est libre de la convention de ce qu'elle ne dépasse pas

$$2(1+\epsilon) \left(1 + \sum_s |\xi^s| \right)^2 \left(\min_i \left(\frac{1}{2}, |\xi^i| \neq 0 \right) \right).$$

Lemme 2. Soit X un ensemble convexe, et δ un nombre positif quelconque. Alors l'ensemble

$$U(X, \delta) = \bigcup_{\xi \in X} \check{C}(\xi, \delta)$$

est aussi convexe.

Lemme 3. Si l'ensemble X est convexe, il en est de même pour l'adhérence \overline{X} .

Lemme 4. Soit X un ensemble convexe muni de points intérieurs, ξ un point intérieur à X , et η un point quelconque de X . Tout point $\zeta = (1-\lambda)\eta + \lambda\xi$ ($0 < \lambda \leq 1$) est alors intérieur à X .

Lemme 5. Soit X un ensemble convexe muni de points intérieurs. Toute demi-droite dont l'origine est un point intérieur à X rencontre alors la frontière $\mathfrak{B}(X)$ à un point unique.

12. Parmi les tenseurs de $Y_i \otimes Y_i$, ceux qui sont symétriques forment encore un espace vectoriel Z_i pour lequel la famille

$$(f_r) = \left(\frac{1}{2} (e_{p_{r_1 r}} \otimes e_{p_{r_2 r}} + e_{p_{r_2 r}} \otimes e_{p_{r_1 r}}) \right) \quad (r \in (I - \{i\}) \times (I - \{i\}))$$

est une base. Envisageons en particulier les tenseurs symétriques de la forme

$$\sum_1^n g^{s^i t^i} e_i \otimes e_i \quad (g^{s^i t^i} = g^{t^i s^i}),$$

où la matrice carrée $(g^{s^i t^i})$ ($s, t = 1, \dots, n$) est positive définie (les g^{ij} non contenus

dans cette matrice sont tous nuls).

L'ensemble Θ de ces tenseurs est convexe. En effet, étant donnés deux éléments

$$\sum_1^m g'^{i_s i_t} \mathbf{e}_{i_s} \otimes \mathbf{e}_{i_t} \quad \text{et} \quad \sum_1^n g''^{j_u j_v} \mathbf{e}_{j_u} \otimes \mathbf{e}_{j_v}$$

de Θ , considérons un élément symétrique

$$(1-\lambda) \sum_1^m g'^{i_s i_t} \mathbf{e}_{i_s} \otimes \mathbf{e}_{i_t} + \lambda \sum_1^n g''^{j_u j_v} \mathbf{e}_{j_u} \otimes \mathbf{e}_{j_v} \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Si l'on pose

$$(k_1, \dots, k_l) = (i_1, \dots, i_m) \cup (j_1, \dots, j_n)$$

cet élément s'écrit

$$\sum_1^l g^{k_p k_q} \mathbf{e}_{k_p} \otimes \mathbf{e}_{k_q}$$

et on a, pour un système quelconque (ξ_p) ($p=0, \dots, l$) de nombres réels non tous nuls,

$$\sum_1^l g^{k_p k_q} \xi_{k_p} \xi_{k_q} = (1-\lambda) \sum_1^m g'^{i_s i_t} \xi_{i_s} \xi_{i_t} + \lambda \sum_1^n g''^{j_u j_v} \xi_{j_u} \xi_{j_v} > 0.$$

D'ailleurs, il est aussi facile de voir que Θ est une partie ouverte de Z . En effet, considérons un cube affine

$$C(g, \sigma) \quad \left(g = \sum_1^m g'^{i_s i_t} \mathbf{e}_{i_s} \otimes \mathbf{e}_{i_t} \right)$$

et prenons un tenseur $f \in C(g, \sigma) \cap Z$. $\left(f = \sum_1^n f^{j_u j_v} \mathbf{e}_{j_u} \otimes \mathbf{e}_{j_v} \right)$. Alors la famille

(i_s, i_t) ($s, t=1, \dots, m$) est une partie de (j_u, j_v) ($u, v=1, \dots, n$) et on a

$$|f^{j_u j_v} - g^{j_u j_v}| < \frac{\sigma}{1+m^2}, \quad \sum |f^{j_u j_v} - g^{j_u j_v}| < \sigma \quad (g^{j_u j_v} = 0).$$

Soit ρ_0 la moindre des racines de l'équation $\det. |g'^{i_s i_t} - \rho \delta^{i_s i_t}| = 0$, qui sont toutes positives d'après l'hypothèse. Alors le déterminant $|f^{j_u j_v} - \rho \delta^{j_u j_v}|$ ($\rho < \frac{1}{2} \rho_0$) ne s'annule pas pourvu que la largeur du cube $C(g, \sigma)$ soit assez petite, car ce déterminant tend vers le déterminant $|g'^{i_s i_t} - \rho \delta^{i_s i_t}|$ lorsque σ tend vers zéro.

13. Introduisons maintenant, suivant le procès mentionné au n° 5, l'espace affine dont la topologie est induite sur $Y \otimes Y$. Il admet un sous-espace \mathfrak{S} qui correspond à $Z \subset Y \otimes Y$. La partie X de \mathfrak{S} correspondant à Θ est ouverte relativement à \mathfrak{S} , convexe et homéomorphe à Θ , car au tenseur $(\zeta^r) \in Z$, il correspond le point $(1, \zeta^r) \in \mathfrak{S}$.

Désignons par A , le point de \mathfrak{S} où $\zeta^r = 0$. Ce point n'est pas contenu dans X . Comme nous l'avons remarqué au n° 5, il représente l'élément 0 de Z . En prenant un point $P(1, \zeta^j) \in \mathfrak{S}$ différent de A , et en posant

$$\omega^r = \frac{\varepsilon \zeta^r}{\sum_{\sigma} |\zeta^{\sigma}|},$$

considérons le système de nombres réels

$$(1-\lambda, \lambda \omega^r) \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

où $r = (i, j) \in (I - \{i\}) \times (I - \{i\})$, $\zeta^{\alpha, \beta} = \zeta^{j, i}$, et le signe ε est déterminé suivant la convention faite au n° 6 de l'article précédent ([1], p. 6).

Puisque $1 - \lambda + \lambda \sum |\omega^r| = 1$, nous pouvons faire de l'ensemble \tilde{S} de ces systèmes un espace topologique suivant la méthode mentionnées au n° 7 de l'article précédent ([1]) à propos de l'espace S . L'espace \mathcal{S} devient une partie ouverte de \tilde{S} définie par $\lambda \neq 1$, car si on pose

$$\lambda = \frac{\sum |\zeta^{\sigma}|}{1 + \sum |\zeta^{\sigma}|}$$

le système $(1-\lambda, \lambda \omega^r) \quad (0 \leq \lambda < 1)$ se réduit à

$$\left(\frac{1}{1 + \sum_{\sigma} |\zeta^{\sigma}|}, \frac{\zeta^{\sigma}}{1 + \sum_{\sigma} |\zeta^{\sigma}|} \right)$$

ce qui exprime le point courant de \mathcal{S} . Le complémentaire de \mathcal{S} par rapport à \tilde{S} , qui est défini par $\lambda = 1$ est la frontière de \mathcal{S} . Cela revient à dire que \tilde{S} est l'adhérence de \mathcal{S} .

Si l'on prend comme point $P(1, \zeta^r)$ un point de X , le point $Q(1, \rho \zeta^r) \quad (\rho > 0)$ appartient aussi à X . Les coordonnées normales de ce point s'écrivent

$$(13.1) \quad \left(\frac{1}{1 + \rho \sum_{\sigma} |\zeta^{\sigma}|}, \frac{\zeta^r}{\frac{1}{\rho} + \sum_{\sigma} |\zeta^{\sigma}|} \right) \quad (\rho > 0).$$

Lorsque ρ tend vers 0, le point Q tend le point A_* . Celui-ci est donc un point frontière de X . De plus, le point Q peut s'écrire

$$Q = (1-\rho)A_* + \rho P \quad (\rho > 0),$$

ce qui nous montre que tout point intérieur de la demi-droite D d'origine A_* passant par $P \in X$ appartient à X . Lorsque ρ tend vers ∞ , le point Q tend vers le point $B(0, \omega^r)$ qui est un point frontière de \mathcal{S} . D'ailleurs, d'après le lemme 5 (n° 11), il est le point d'intersection unique de l'intervalle $]A_*, B]$ avec la frontière de X .

Ainsi, pour qu'un point $B(0, \omega^r) \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ soit un point de l'intérieur V de $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{B}(X)$, il faut et il suffit que l'intervalle $]A_*, B]$ contienne un point P de X . En effet, si le point $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ est un point frontière de X , l'adhérence \bar{X} qui est convexe contient l'intervalle $]A_*, B]$. Or, si cet intervalle ne contenait que les points frontière de X , il ne serait pas possible qu'un voisinage ouvert assez petit du point B soit contenu dans $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{B}(X)$, car B est le point d'intersection unique de $]A_*, B]$ avec $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. Donc, si $B \in V$, l'intervalle $]A_*, B[$ contient un

point $P \in X$. Inversement, quand cela est le cas, comme nous l'avons remarqué plus haut, l'intervalle $]A, B[$ se trouve complètement dans X . En particulier le point

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)A + \frac{1}{2}B = C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\omega^r\right)$$

appartient à X . L'ensemble X étant ouvert, il existe un nombre positif ε tel que tout point $C'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\omega'^r\right)$ où $\sum |\omega'^r| = 1$ se trouve dans X pourvu que $|\omega'^r - \omega^r| < \varepsilon$. Si l'on prend, dans (13.1), les coordonnées non homogènes $(1, \omega'^r)$ de ce point C' à la place de $(1, \zeta^r)$, les coordonnées non-homogènes du point Q devient $(1, \rho\omega^r)$ ($\rho > 0$). Il en résulte que, d'après ce qu'on a remarqué plus, tout point $(0, \omega'^r)$ ou $|\omega'^r - \omega^r| < \varepsilon$ se trouve dans $\mathfrak{B}(\Theta) \cap \mathfrak{B}(X)$. Ceci achève la démonstration.

Nous voyons ainsi que les coordonnées non-homogènes du point courant de X s'écrivent $(1, \rho\omega^r)$, où $\rho > 0$ et $B(0, \omega^r) \in V$.

Envisageons un espace normale R et une partie fermée F de R . Supposons qu'on se donne une application continue de F dans X . Il est bien connu qu'on peut prolonger toute application continue f de F dans l'intervall $]A, B[$ à une application continue de R dans cet intervalle, dont la restriction sur F coïncide avec f (N. p. 73). Cela revient à dire que si l'on prolonge l'application donnée l'image dans X s'exprime sous la forme

$$Q(1, \rho(x)\omega^r) \quad (\rho > 0, B(0, \omega^r) \in V),$$

$\rho(x)$ étant une fonction continue définie dans R . Maintenant, on a qu'à remplacer le point $Q(1, \rho\omega^r)$ par le tenseur $\nabla(\rho\omega^r)$ pour avoir la proposition : *étant donnée une application continue de F dans Θ , on peut la prolonger à une application continue de R dans Θ , dont la restriction sur F coïncide avec l'application donnée.*

En utilisant cette proposition on démontre que la structure d'espace fibré

$$\left(\bigcup_{x \in M} T(x) \otimes T(x), M, \Theta, G^{(2)}\right)$$

admet une section au cas où la variété différentiable M est régulier et possède une base dénombrable (N, p. 55).

Références.

I. J. Kanitani. Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ. (Hino City, Tokyo, Japan), No.5 (Science and Engineering), pp. 1-13.

II. J. Kanitani. Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ., No.6 (Science and Engineering), 1971, pp. 1-14.

III. P. Alexandroff und H. Hopf. Topologie. I.

IV. N. Steenrod. The topology of fibre bundles.