相異なる物質の二つの部分より成る棒の熱伝導*

小　平　吉　男

Conduction of Heat in a Bar Composed of Two Parts with Different Materials

Yoshio KODAIRA

緒　言　異なる物質の二つの部分より成る固体の熱伝導，或は絃の振動に対する境界値問題の解は既に何回も発表し，本紀要においても数回発表した。今回は棒の熱伝導を取扱うこととする。この問題の固有値の求め方は，今迄の一次元の場合と異なり，前回に発表した**二次元の熱伝導の問題の固有値の求め方と一致している。これは問題の性質上当然のことではあるが，一応注目に値すると思われる。以下二，三の例によって解法を説明しよう。

1.　棒の両端で温度が0の場合

棒の二つの部分の各々に対する諸量を表わすために夫々脚等 1，2 を附けることとする。棒の第一の部分の長さを a_1，第二の部分のそれを a_2 とし，且つ $a_1+a_2=a$ とする。ここで用いる微分方程式は

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\kappa_1{}^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-b_1{}^2u_1,\qquad [0<x<a_1], \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\kappa_2{}^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-b_2{}^2u_2,\qquad [a_1<x<a] \tag{2}$$

であるとする。棒の両端における境界条件は

$$(u_1)_{x=0}=0,\qquad (u_2)_{x=a}=0 \qquad (3),\ (4)$$

である。又，棒の二つの部分の境界においては

$$(u_1)_{x=a_1}=(u_2)_{x=a_1},\qquad k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=a_1}=k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=a_1} \qquad (5),\ (6)$$

なる境界条件が成立するとする。初期条件としては

$$(u_1)_{t=0}=f_1(x),\qquad (u_2)_{t=0}=f_2(x) \qquad (7),\ (8)$$

を採る。$f_1(x)$，$f_2(x)$は x の関数である。

微分方程式(1)，(2)の特解を

$$u_1=e^{-(b_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2)t}\,(A_{\alpha_1}\cos\kappa_2\alpha_1x+B\alpha_1\sin\kappa_2\alpha_1x), \tag{9}$$

$$u_2=e^{-(b_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2)t}\,\{C_{\alpha_2}\cos\kappa_1\alpha_2(a-x)+D_{\alpha_2}\sin\kappa_1\alpha_2(a-x)\} \tag{10}$$

---

*本論文は本学第一回生中田守人，西山満昭，第二回生小川等，飯島受三，鈴木武男の諸君が著者指導の下に行った卒業論文の一部を整理統合し，且つ足らざるを補ったものである。

**小平吉男：異る二つの物質より成る固体の二次元の熱伝導，明星大学研究紀要理工学部第6号，29—35，1971

なる形に書くこととする。

如何なる時刻においても(5)，(6)の如き境界条件を満足するためには

$$b_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2=b_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2 \tag{11}$$

なる関係が成立しなくてはならない。

境界条件(3)，(4)により

$$A_{\alpha_1}=0, \qquad C_{\alpha_2}=0 \tag{12}$$

となる。又境界条件(5)，(6)により

$$B_{\alpha_1}\sin\kappa_2\alpha_1a_1=D_{\alpha_2}\sin\kappa_1\alpha_2a_2, \tag{13}$$

$$B_{\alpha_1}k_1\kappa_2\alpha_1\cos\kappa_2\alpha_1a_1=D_{\alpha_2}k_2\kappa_1\alpha_2\cos\kappa_1\alpha_2a_2 \tag{14}$$

を得る。(13)，(14)から

$$\frac{\tan\kappa_2\alpha_1a_1}{\tan\kappa_1\alpha_2a_2}+\frac{k_1\kappa_2\alpha_1}{k_2\kappa_1\alpha_2}=0 \tag{15}$$

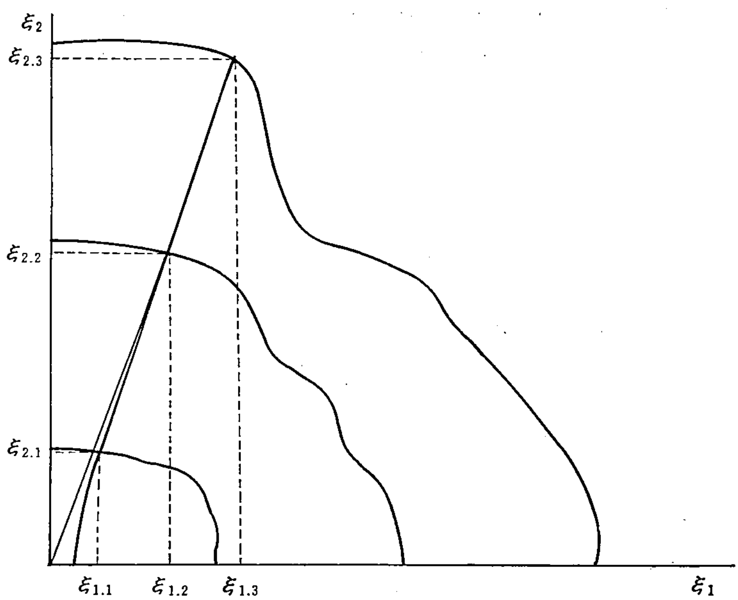
が得られる。

(11)，(15)から α_1，α_2 が決定される。正負絶対値の等しい根が存在していることは容易に分るであろう。その数は然限に多いことは次のように(11)，(15)に対する図を画いて見れば分る。今 $\kappa_2\alpha_1a_1=\xi_1$，$\kappa_1\alpha_2a_2=\xi_2$ と置けば(11)，(15)は

$$b_1^2+\frac{\kappa_1^2\xi_1^2}{a_1^2}=b_1^2+\frac{\kappa_2^2\xi_2^2}{a_2^2} \tag{16}$$

$$\frac{\tan\xi_1}{k_1a_2\xi_1}+\frac{\tan\xi_2}{k_2a_1\xi_2}=0 \tag{17}$$

となる。(16)は



第 1 図

$$\left(\begin{array}{ll} 3\dfrac{\tan\xi_1}{\xi_1}=-\dfrac{\tan\xi_2}{\xi_2}, & \dfrac{\kappa_1^2a_2^2}{\kappa_2^2a_1^2}=9,\ a_1^2a_2^2(b_1^2-b_2^2)=-1 \\ 3\xi_2^2=27\xi_1^2-10, & \dfrac{k_2a_1}{k_1a_2}=3,\ a_1^2\kappa_2^2=0.3 \end{array}\right)$$

$$\frac{\kappa_1\xi_1}{a_1}=\pm\frac{\kappa_2\xi_2}{a_2}$$

を漸近線とする双曲線である。(17)は複雑な曲線であるが，第一象限の部分だけが第1図に画いてある。(17)はこのような曲線を無限に繰返すのである。この曲線と双曲線(16)との交点が根を与えるのであって，その数は無限にあることが了解出来るであろう。

(16)，(17)の正根を大きさの順序に並べて番目のものをと書くこととすれば，

$$\alpha_{1,s}=\frac{\xi_{1,s}}{\kappa_2 a_1},\qquad \alpha_{2,s}=\frac{\xi_{2,s}}{\kappa_1 a_2}$$

に依って与えられる。この $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ を用いれば微分方程式の境界条件を満足する解は

$$u_1=e^{-b_1^2t}\sum_{s=1}^{\infty}M_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2t}X_{1,s} \tag{18}$$

$$u_2=e^{-b_2^2t}\sum_{s=1}^{\infty}M_s e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2t}X_{2,s} \tag{19}$$

のように書くことができる。但し $X_{1,s}$, $X_{2,s}$ は次のものを表わす：

$$X_{1,s}=\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}x, \tag{20}$$

$$X_{2,s}=\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x). \tag{21}$$

(20)，(21)に初期条件(7)，(8)を入れれば，

$$f_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{1,s},\quad f_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}M_sX_{2,s} \qquad (22),\ (23)$$

となる。M_s を決定するには(22)に $k_1\kappa_2^2X_{1,m}$ を掛けて0から a_1 まで積分し，(23)に $k_2\kappa_1^2X_{2,m}$ を掛けて a_1 から a まで積分したものを加え合わせる：

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(x)X_{1,m}dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(x)X_{2,m}dx$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}M_s\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,s}X_{1,m}dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}X_{2,m}dx\right). \tag{24}$$

然るに

$$I_1=\int_0^{a_1}\sin\kappa_2\alpha_{1,s}x\sin\kappa_2\alpha_{1,m}x\,dx$$

$$=\frac{\alpha_{1,m}\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\cos\kappa_2\alpha_{1,m}a_1-\alpha_{1,s}\sin\kappa_2^2\alpha_{1,m}a_1\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1}{\kappa_2(\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2)}, \tag{25}$$

$$I_2=\int_{a_1}^{a}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)\sin\kappa_1\alpha_{2,m}(a-x)\,dx$$

$$=\frac{\alpha_{2,m}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\cos\kappa_1\alpha_{s,m}a_2-\alpha_{2,s}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2}{\kappa_1(\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2)}, \tag{27}$$

$$I_3=\int_0^{a_1}\sin^2\kappa_2\alpha_{1,m}x\,dx=\frac{a_1}{2}\left(1-\frac{\sin\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\cos\kappa_2\alpha_{1,m}a_1}{a_1\kappa_2\alpha_{1,m}}\right), \tag{28}$$

$$I_4=\int_{a_1}^{a}\sin^2\kappa_1\alpha_{2,m}(a-x)=\frac{a_2}{2}\left(1-\frac{\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_1}{a_2\kappa_1\alpha_{2,m}}\right) \tag{29}$$

である。(9)から $\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2=\alpha_{2,s}^2-\alpha_{2,m}^2$ なる関係があるから

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_2}X_{1,s}X_{1,m}dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}X_{2,m}dx$$

$$=k_1\kappa_2^2\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2I_1+k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\sin\kappa_2\alpha_{1,m}a_1I_2$$

$$=\frac{\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\sin\kappa_2\alpha_{1,m}a_1}{\alpha_{1,s}^2-\alpha_{1,m}^2}$$

$$\times\{(k_1\kappa_2\alpha_{1,m}\cot\kappa_2\alpha_{1,m}a_1+k_2\kappa_1\alpha_{2,m}\cot\kappa_1\alpha_{2,m}a_2)$$

$$-(k_1\kappa_2\alpha_{1,s}\cot\kappa_2\alpha_{1,s}a_1+k_2\kappa_1\alpha_{2,s}\cot\kappa_1\alpha_{2,s}a_2)\},\quad [s\neq m] \tag{30}$$

となるが，これは(15)により 0 となる。

又(13)を用いれば，

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,m}^2dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_1k_1\kappa_2^2\sin^2\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+a_2k_2\kappa_1^2\sin^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\right.$$

$$\left.+\frac{k_1\kappa_2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1}{\alpha_{1,s}}+\frac{k_2\kappa_1\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2}{\alpha_{2,s}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a_1k_1\kappa_2^2\sin^2\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+a_2k_2\kappa_1^2\sin^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\alpha_{2,m}^2}-\frac{1}{\alpha_{1,m}^2}\right)k_2\kappa_1\alpha_{2,m}\sin^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\right\}$$

$$\equiv V(\alpha_{1,m},\ \alpha_{2,m}) \tag{31}$$

となる。$V(\alpha_{1,m},\ \alpha_{2,m})$ は(30)の右辺を簡単に表わすために用いたものである。

(30)，(31)の計算によって(24)から係数 M_m が求められる。この係数を用いれば任意の関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$の展開式は次の如くなる：

$$f_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}x}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2^2\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)d\lambda\right), \tag{32}$$

$$f_2(\lambda)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}\lambda\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2^2\sin\kappa_2\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_{2,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\,d\lambda\right). \tag{33}$$

(32)，(33)の展開式により，問題の解は次のようになる：

$$u_1=e^{-b_1^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2t}\frac{\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}x}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$

$$\times\left(k_1\kappa_2^2\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)d\lambda\right), \tag{34}$$

$$u_2=e^{-b_2^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_1^2\alpha_{2,s}^2t}\frac{\sin\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$

$$\times\left(k_1\kappa_2^2\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$+k_1\kappa_1^2 \sin \kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda) \sin \kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)d\lambda\Big). \tag{35}$$

2. 棒の両端で熱を通さない場合

この場合には境界条件(3)，(4)の代りに

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \qquad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=a}=0 \qquad (36),\ (37)$$

を用いるだけで，微分方程式及び他の諸条件は前の問題の場合と同じである。

前の計算方法を踏襲すれば，固有値は

$$b_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2=b_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2, \tag{38}$$

$$k_1\kappa_2\alpha_1 \tan \kappa_2\alpha_1a_1+k_2\kappa_1\alpha_2 \tan \kappa_1\alpha_2a_2=0 \tag{39}$$

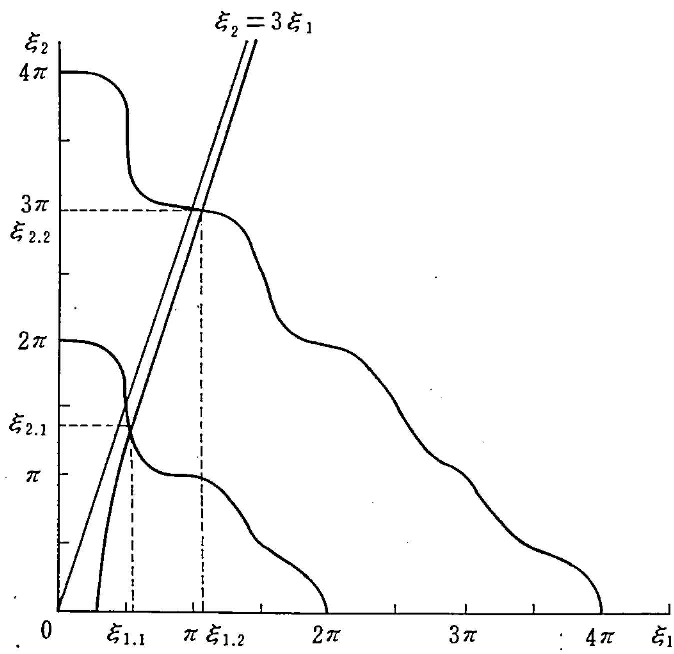
から決定されることが分るであろう。(38)から $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ となる根は $b_1\neq b_2$ の場合には存在しないことが知られる。

(38)，(39)は $\kappa_2\alpha_1a_1=\xi_1$, $\kappa_1\alpha_2a_2=\xi_2$ と置けば

$$b_1^2+\frac{\kappa_1^2\xi_1^2}{a_1^2}=b^2+\frac{\kappa_2^2\xi_2^2}{a_2^2}, \tag{40}$$

$$\frac{k_1}{a_1}\xi_1 \tan \xi_1+\frac{k_2}{a_2}\xi_2 \tan \xi_2=0 \tag{41}$$

と書くことが出来る。これらの曲線は第2図に画いてある。



第 2 図

(40)，(41)から決定される正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを $\xi_{1,s}$, $\xi_{2,s}$ と書き，それに対する固有値を $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ と書けば，

$$\alpha_{1,s}=\frac{\xi_{1,s}}{\kappa_2a_1}, \quad \alpha_{2,s}=\frac{\xi_{2,s}}{\kappa_1a_2}$$

で与えられる。この固有値を用いれば，境界条件を満足する固有関数 $X_{1,s}$, $X_{2,s}$ は

$$X_{1,s}=\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\cos\kappa_2\alpha_{1,s}x, \tag{42}$$

$$X_{2,s}=\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x) \tag{43}$$

と書くことができる。

固有関数(42)，(43)を用いて任意の関数を展開することは前の場合と同様に来来る。結果は次の如くである：

$$f_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}dx+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right), \tag{44}$$

$$f_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right). \tag{45}$$

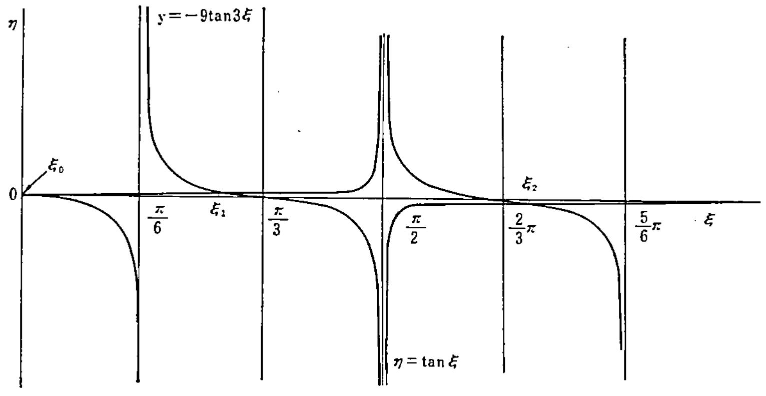
但し $V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})$ は次の式を表わす：

$$V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})=\frac{1}{2}\Big\{k_1\kappa_2{}^2a_1\cos^2\kappa_1\alpha_{2,s}a_2+k_2\kappa_1{}^2a_2\cos^2\kappa_2\alpha_{1,s}a_1$$
$$+\left(\frac{1}{\alpha_{2,s}{}^2}-\frac{1}{\alpha_{1,s}{}^2}\right)k_2\kappa_1\alpha_{2,s}\cos^2\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\Big\}. \tag{46}$$

(44)，(45)の展開式により求める解は次の如く書かれる：

$$u_1=e^{-b_1^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_1^2\alpha_{1,s}^2t}\frac{\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\cos\kappa_2\alpha_{1,s}x}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$
$$\times\Big(k_1\kappa_2{}^2\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda$$
$$+k_1\kappa_1{}^2\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\cos\kappa_1\alpha_{2,1}(a-\lambda)d\lambda\Big), \tag{47}$$

$$u_2=e^{-b_2^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2t}\frac{\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$



第 3 図

$$\times\left(k_1\kappa_2^2\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_1(\lambda)\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)d\lambda\right). \tag{48}$$

特別な場合として $b_1=b_2=b$ を考えれば，微分方程式の特解は

$$u_1=e^{-(b^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2)t}(A_\alpha\cos\kappa_2\alpha x+B_\alpha\sin\kappa_2\alpha x), \tag{49}$$

$$u_2=e^{-(b^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2)t}\{C_\alpha\cos\kappa_1\alpha(a-x)+D_\alpha\sin\kappa_1\alpha(a-x)\} \tag{50}$$

なる形に書けるから，α は

$$\frac{\tan\kappa_2\alpha a_1}{\tan\kappa_1\alpha a_2}+\frac{k_2\kappa_1}{k_1\kappa_2}=0 \tag{51}$$

から決定される。(51)から分るように $\alpha=0$ は根であり，固有値として $\alpha=0$ があり得ることとなる。(51)の根は如何なる点にあるかを見るために $\kappa_2\alpha a_1=\xi$ と置いて(51)を書直せば

$$\tan\xi=-\frac{\kappa_2a_1}{\kappa_1a_2}\;\frac{a_1k_2}{a_2k_1}\;\tan\frac{\kappa_2a_1}{\kappa_1a_2}\xi \tag{52}$$

となる。

$$\eta=\tan\xi,\qquad \eta=-\frac{\kappa_2a_1}{\kappa_1a_2}\cdot\frac{a_1k_2}{a_2k_1}\;\tan\frac{\kappa_2a_1}{\kappa_1a_1}\xi \qquad (53),\ (54)$$

となる二曲線は第3図に画いてある。

(52)の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを ξ_s と書き，それに対する固有値を α_s と書く。それに対する固有関数 $X_{1,s}$, $X_{2,s}$ は

$$X_{1,s}=\cos\kappa_1\alpha_sa_2\cos\kappa_2\alpha_sx, \tag{55}$$

$$X_{2,s}=\cos\kappa_2\alpha_sa_1\cos\kappa_1\alpha_s(a-x) \tag{56}$$

で与えられる。$\alpha_0=0$ と考えれば，そのときの固有関数と(53), (54)で表わされ，$X_{1,0}=1$, $X_{2,0}=1$ である。

任意の関数の固有関数による展開は，今迄と類似の方法でできる。展開に必要な計算をしてみると，

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,0}^2dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,0}^2dx=k_1\kappa_2^2a_1+k_2\kappa_1^2a_2\equiv V(0), \tag{57}$$

$$\begin{aligned}&k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,s}^2dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}^2dx\\&=\frac{1}{2}\Big\{a_1k_1\kappa_2^2\cos^2\kappa_1\alpha_sa_1+a_2k_2\kappa_1^2\cos^2\kappa_2\alpha_sa_2\\&\qquad+\frac{2}{\alpha_s}(k_1\kappa_1\cos^2\kappa_1\alpha_sa_2\sin\kappa_2\alpha_sa_1\cos\kappa_2\alpha_sa_1)\Big\}\equiv V(\alpha_s)\end{aligned} \tag{59}$$

となる。この結果によって展開式を書けば次のようになる：

$$\begin{aligned}f_1(x)=&\frac{1}{V(0)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)d\lambda\right)\\&+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}}{V(\alpha_s)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right),\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}f_2(\lambda)=&\frac{1}{V(0)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)d\lambda\right)\\&+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}}{V(\alpha_s)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right).\end{aligned} \tag{60}$$

以上の展開式により求める解は次の式にて与えられる：

$$\times u_1=e^{-b^2t}\left\{\frac{1}{V(0)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)d\lambda\right)\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2t}\frac{\cos\kappa_1\alpha_s a_2\cos\kappa_2\alpha_s x}{V(\alpha_s)}\left(k_1\kappa_2^2\cos\kappa_1\alpha_s a_2\int_0^{a}f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_s\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.\left.+k_2\kappa_1^2\cos\kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\cos\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda\right)\right\}, \tag{61}$$

$$u_2=e^{-b^2t}\left\{\frac{1}{V(0)}\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)d\lambda\right)\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2t}\frac{\cos\kappa_2\alpha_s a_1\cos\kappa_1\alpha_s(a-x)}{V(\alpha_s)}$$

$$\times\left(k_1\kappa_2^2\cos\kappa_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_s\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.\left.+k_2\kappa_1^2\cos\kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\cos\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda\right)\right\}. \tag{62}$$

次の特別の場合として一様な物質より成る棒を考え，

$$\kappa_1=\kappa_2=\kappa,\qquad k_1=k_2=k$$

であるが，$b_1^2\neq b_2^2$ である場合を考える。微分方程式の特解は

$$u_1=e^{-(b_1^2+\kappa^2\alpha_1^2)t}(A_{\alpha_1}\cos\alpha_2 x+B_{\alpha_1}\sin\alpha_2 x), \tag{63}$$

$$u_2=e^{-(b_2^2+\kappa^2\alpha_2^2)t}\{C_{\alpha_2}\cos\alpha_2(a-x)+D_{\alpha_2}\sin\alpha_2(a-x)\}, \tag{64}$$

固有値は

$$b_1^2+\kappa^2\alpha_1^2=b_2^2+\kappa^2\alpha_2^2, \tag{65}$$

$$\alpha_1\tan\alpha_1 a_1+\alpha_2\tan\alpha_2 a_2=0 \tag{66}$$

で決定され，又固有関数は次の如く与えられる：

$$X_{1,s}=\cos\alpha_{2,s}a_2\cos\alpha_{1,s}x, \tag{67}$$

$$X_{2,s}=\cos\alpha_{1,s}a_1\cos\alpha_{2,s}(a-x). \tag{68}$$

この場合の解は次の如く書かれる：

$$u_1=e^{-b_1^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa^2\alpha_{1,s}^2t}\frac{\cos\alpha_{2,s}a_2\cos\alpha_{1,s}x}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(\cos\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+\cos\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\cos\alpha_{2,s}(a-\lambda)\,d\lambda\right), \tag{69}$$

$$u_2=e^{-b_2^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa^2\alpha_{2,s}^2t}\frac{\cos\alpha_{1,s}a_1\cos\alpha_{2,s}(a-x)}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(\cos\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+\cos\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\cos\alpha_{2,s}(a-\lambda)d\lambda\right). \tag{70}$$

但し $V(\alpha_{1,s},\ V_{2,s})$ は次のものを表わす：

$$V(\alpha_{1,s},\ V_{2,s})=\frac{1}{2}\left\{a_1\cos^2\kappa_{1,s}a_1+a_2\cos^2\kappa_{2,s}a_2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\alpha_{2,s}^2}-\frac{1}{\alpha_{1,s}^2}\right)\alpha_{1,s}\cos^2\alpha_{1,s}a_1\sin\alpha_{2,s}a_2\cos\alpha_{2,s}a_2\right\}.$$

3. 棒の一端で熱をさず，他端で温度が 0 の場合

この場合には棒の両端の境界条件は

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \qquad (u_2)_{x=a}=0 \tag{71), (72}$$

のように採ればよい。

固有値は

$$b_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2=b_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2, \tag{73}$$

$$k_1\kappa_2\alpha_1 \tan \kappa_2\alpha_1a_1-k_2\kappa_1\alpha_2 \tan \kappa_1\alpha_2a_2=0 \tag{74}$$

から決定される。又固有関数は

$$X_{1,s}=\sin \kappa_1\alpha_{2,s}a_2 \cos \kappa_2\alpha_{1,s}x, \tag{75}$$

$$X_{2,s}=\cos \kappa_2\alpha_{1,s}a_1 \sin \kappa_1\alpha_{2,s}(a-x) \tag{76}$$

にて与えられる。

解は前の場合と全く同様に求めることができる。従って解を書いて置けば十分であろう。即ち解は次のようになる：

$$\begin{aligned} u_1=e^{-b_1^2t}\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2t} \frac{\sin \kappa_1\alpha_{2,s}a_2 \cos \kappa_2\alpha_{1,s}x}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})} \\ \times\left(k_1\kappa_2^2 \sin \kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1} f_1(\lambda)\cos \kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right. \\ \left.+k_2\kappa_1^2 \cos \kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda) \sin \kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\, d\lambda\right), \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} u_2=e^{-b_2^2t}\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2t} \frac{\cos \kappa_2\alpha_{1,s}a_1 \sin \kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})} \\ \times\left(k_1\kappa_2^2 \sin \kappa_1\alpha_{2,s}a_2\int_0^{a_1} f_2(\lambda) \cos \kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right. \\ \left.+k_2\kappa_1^2 \cos \kappa_2\kappa_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a} f_2(\lambda) \sin \kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)d\lambda\right). \end{aligned} \tag{78}$$

但し $V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})$ は次の式を表わす：

$$\begin{aligned} V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s}) =\frac{1}{2}\left(k_1\kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1\alpha_{2,s}a_2+k_2\kappa_1^2 \cos^2 \kappa_2\alpha_{1,s}a_1\right. \\ \left.+\frac{k_1\kappa_2 \sin \kappa_2\alpha_{1,s}a_1 \cos \kappa_2\alpha_{1,s}a_1}{\alpha_{1,s}}+\frac{k_2\kappa_1 \sin \kappa_1\alpha_{2,s}a_2 \cos \kappa_1\alpha_{2,s}a_2}{\alpha_{2,s}}\right). \end{aligned} \tag{80}$$

4. 棒の一端で熱を通さず，他端で Newton の輻射の法則に従う熱の放散のある場合

この場合の境界条件は，（3），（4）の代りに

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=0}=0, \qquad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+hu_2\right)_{x=a}=0 \tag{81), (82}$$

を用いることになる。

固有値は

$$b_1^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_1^2=b_2^2+\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_2^2, \tag{83}$$

$$-k_1\kappa_2\alpha_1 \tan \kappa_2\alpha_1a_1=k_2\kappa_1\alpha_2\left(\frac{\kappa_1\alpha_2 \sin \kappa_1\alpha_2a_2-h \cos \kappa_1\alpha_2a_2}{\kappa_1\alpha_2 \cos \kappa_1\alpha_2a_2+h \sin \kappa_1\alpha_2a_2}\right) \tag{84}$$

から決定される。

今 $\kappa_2\alpha_1a_1=\xi_1$, $\kappa_1\alpha_2a_2=\xi_2$ とおけば，(83)，(84)は

$$b_1^2+\frac{\kappa_1^2\xi_1^2}{a_1^2}=b_2^2+\frac{\kappa_2^2\xi_2^2}{a_2^2}, \tag{85}$$

$$-\frac{k_1}{a_1}\xi_1\tan\xi_1=\frac{k_2}{a_2}\xi_2\,\frac{\dfrac{\xi_2}{a_2}\sin\xi_2-h\cos\xi_2}{\dfrac{\xi_2}{a_2}\cos\xi_2+h\sin\xi_2} \tag{86}$$

となる。(86)は

$$-\frac{k_1}{a_1}\xi_1\tan\xi_1=\frac{k_2}{a_2}\xi_2\tan\left(\xi_2-\tan^{-1}\frac{a_2h}{\xi_2}\right) \tag{87}$$

と書くこともできる。これらの曲線は第4図に画いてある。

(83)，(84)から決定される正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを $\alpha_{1,s}$, $\alpha_{2,s}$ と書くこととする。この固有値を用いて固有関数は次のように書かれる：

$$X_{1,s}=\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\right)\cos\kappa_2\alpha_{1,s}x, \tag{88}$$

$$X_{2,s}=\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha(_{2,s}a-x)\right). \tag{89}$$

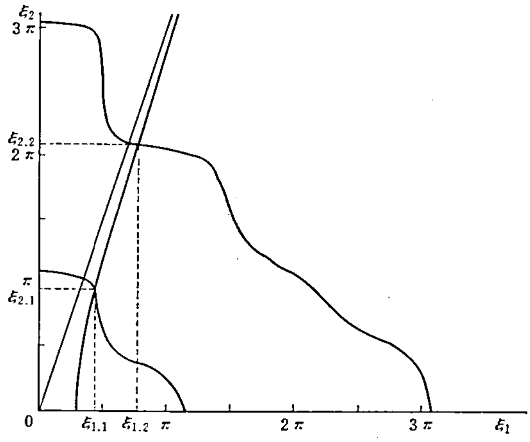
次に問題になるのは，固有関数(88)，(89)を用いて，任意の関数を

$$f_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}N_sX_{1,s},\qquad f_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}N_sX_{2,s}$$

の如き級数に展開することであるが，前と同様に

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}f_1(x)X_{1,m}dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}f_2(x)X_{2,m}dx$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}N_s\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,s}X_{1,m}dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}X_{2,m}dx\right)$$



$$\left(\begin{array}{ll}\xi_1\tan\xi_1=-3\xi_2\tan\left(\xi_2-\tan^{-1}\dfrac{1}{\xi_2}\right), & \kappa_1^2a_2^2/\kappa_2^2a_1^2=9 \quad a_1^2a_2^2(b_1^2-b_2^2)=-1 \\ & k_1a_1/k_1a_2=3 \quad a_1^2\kappa_2^2=0.3 \\ 3\xi_2^2=27\xi_1^2-10 & a_2=2h=2.5\end{array}\right)$$

第 4 図

を作り右辺を計算すればよい。

$s \neq m$ の場合には，前の場合と同様に

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,s}X_{1,m}dx+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,s}X_{2,m}=0$$

であることが言われる。$s=m$ の場合には次のように計算する。

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}X_{1,m}^2dx=k_1\kappa_2^2\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,m}}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\right)^2\int_0^{a_1}\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}x dx$$

$$=k_1\kappa_2^2\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,m}}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\right)^2\left(\frac{a_1}{2}+\frac{\sin 2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1}{4\kappa_2\alpha_{1,m}}\right). \qquad (90)$$

次に

$$k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}^2dx$$

$$=k_2\kappa_1^2\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\int_{a_1}^{a}\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,m}(a-x)+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,m}}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}(a-x)\right)^2dx$$

を計算しなくてはならない。 $X_{2,m}$ は

$$\frac{d^2X_{2,m}}{dx^2}+\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2X_{2,m}=0$$

を満足するから

$$\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2\int_0^{a}X_{2,m}^2dx=-\int_{a_1}^{a}\frac{d^2X_{2,m}}{dx^2}X_{2,m}dx$$

$$=-\left[\frac{dX_{2,m}}{dx}X_{2,m}\right]_{a_1}^{a}+\int_{a_1}^{a}\left(\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)^2dx \qquad (91)$$

となる。一方

$$\frac{dX_{2,m}}{dx}=\kappa_1\alpha_{2,m}\cos\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\left(\sin\kappa_1\alpha_{2,m}(a-x)-\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,m}}\cos\kappa_1\alpha_{2,m}(a-x)\right)$$

であるから，

$$\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2X_{2\cdot m}^2+\left(\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)^2=(\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2+h^2)\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1 \qquad (92)$$

となる。これを a_1 から a まで積分すれば，

$$\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}^2dx+\int_{a_1}^{a}\left(\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)^2dx=\{(\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2+h^2)\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1\}a_2 \qquad (93)$$

を得る。(91)と(93)とから $\int_{a_1}^{a}\left(\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)^2dx$ を消去すれば，

$$2\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}^2dx=a_2(\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2+h^2)\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1-\left[X_{2,m}\frac{dX_{2,m}}{dx}\right]_{a_1}^{a} \qquad (94)$$

が得られる。

この式の右辺を計算するには境界条件を用いる。境界条件：

$$\left(\frac{dX_{2,m}}{dx}+hX_{2,m}\right)_{x=a}=0$$

に $X_{2,m}$ を掛けて

$$\left(X_{2,m}\frac{dx_{2,m}}{dx}\right)_{x=a}=-h(X_{2,m}^2)_{x=a} \qquad (95)$$

を得るので，(94)は

$$2\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}^2dx=a_2(\kappa_1^2\alpha_{2,m}^2+h^2)\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1$$

$$+h(X_{2,m}^2)_{x=a}+\left(X_{2,m}\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)_{x=a_1} \qquad (96)$$

となる。然るに

$$(X_{2,m}{}^2)_{x=a}=\cos^2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1 \tag{97}$$

であり，又

$$\left(\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)_{x=a_1}=\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{dX_{1,m}}{dx}\right)_{x=a_1},\qquad (X_{1,m})_{x=a_1}=(X_{2,m})_{x=a_1}$$

であるから，

$$\left(X_{2,m}\frac{dX_{2,m}}{dx}\right)_{x=a_1}=\frac{k_1}{k_2}\left(X_{1,m}\frac{dX_{1,m}}{dx}\right)_{x=a_1}$$
$$=-\frac{k_1\kappa_1\alpha_{1,m}}{k_2}\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,m}}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\right)^2\cos\kappa_2\kappa_{1,m}a_1\sin\kappa_1\alpha_{1,m}a_1 \tag{98}$$

となるから，(96)は次のようになる：

$$\int_{a_1}^{a}X_{2,m}{}^2dx=\frac{1}{2\kappa_1{}^2\alpha_{2,m}{}^2}(\kappa_1{}^2\alpha_{2,m}{}^2a_2+h^2a_2+h)\cos^2\kappa_1\alpha_{1,m}a_1$$
$$-\frac{k_1\kappa_2\alpha_{1,m}}{4k_2\kappa_1{}^2\alpha_{2,m}{}^2}\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+\frac{h}{\kappa\alpha_{2,m}}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\right)^2\sin2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1. \tag{99}$$

(90)，(99)により

$$k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}X_{1,m}{}^2dx+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}X_{2,m}dx$$
$$=\frac{k_1\kappa_2{}^2}{2}\left\{\kappa^2a_1+\frac{\sin2\kappa_2\alpha_{1,m}a_1}{2\kappa_2\alpha_{1,m}}\left(1-\frac{\alpha_{1,m}{}^2}{\alpha_{2,m}{}^2}\right)\right\}\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,m}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,m}}\sin\kappa_1\alpha_{2,m}a_2\right)^2$$
$$+\frac{k^2(\kappa_1{}^2\alpha_{2,m}{}^2a_2+h^2a_2+h)}{2\alpha_{2,m}}\cos2\kappa_1\alpha_{1,m}a_1\equiv V(\alpha_{1,m},\ \alpha_{2,m}) \tag{100}$$

が得られる。

(100)により任意の関数の展開式は次のようになる：

$$f_1(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{1,s}}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right), \tag{101}$$

$$f_2(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{X_{2,s}}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{s,s})}\left(k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}f_1(\lambda)X_{1,s}d\lambda+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)X_{2,s}d\lambda\right). \tag{102}$$

又問題の解は次の如くなる：

$$u_1=e^{-b_1^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{1,s}^2t}\frac{\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\right)\cos\kappa_1\alpha_{1,s}x}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$
$$\times\left\{k_1\kappa_2{}^2\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\right)\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$
$$+k_2\kappa_2{}^2\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\right)d\lambda\right\}, \tag{103}$$

$$u_2=e^{-b_2^2t}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_{2,s}^2t}\frac{\cos\kappa_2\alpha_{1,s}a_1\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-x)+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_{2,s}(a-x)\right)}{V(\alpha_{1,s},\ \alpha_{2,s})}$$
$$\times\left\{k_2\kappa_1{}^2\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}a_2+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}a_2\right)\int_0^{a_1}f_1(\lambda)\cos\kappa_2\alpha_{1,s}\lambda d\lambda\right.$$
$$+k_2\kappa_1{}^2\cos\kappa^2\alpha_{1,s}a_1\int_{a_1}^{a}f_2(\lambda)\left(\cos\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h}{\kappa_1\alpha_{2,s}}\sin\kappa_1\alpha_{2,s}(a-\lambda)\right)d\lambda\right\}. \tag{104}$$