

異なる二つの物質より成る固体の 二次元の熱伝導

小 平 吉 男

Conduction of Heat in Two Dimensions in a Solid Composed
of Two Parts of Different Materials.

Yoshio Kodaira

二つの異なる部分から成る物体の熱伝導、或は類似の問題については既に数回に亘ってその解き方を発表した*。今回は二次元の熱伝導の問題を考える。物体は四角な長い柱状の固体であって、四角な二辺の長さは夫々 a, b であるとし、熱は柱の長さの方向へは流れないとする。 x, y 軸を切口の面に沿って取り、 y 方向は一樣な物から成るが、 x 方向は 0 から a_1 までと、 a_1 から a までとは異なる物質から成るとする。脚符 1 を 0 から a_1 までの間の諸量につけ、2 なる脚符を a_1 から a までの間の諸量につけることとする。

熱伝導の微分方程式として

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \kappa_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right), \quad [0 < x < a_1], \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa_2^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right), \quad [a_1 < x < a] \quad (2)$$

を用いる。境界条件としては

$$(u_1)_{x=0} = 0, \quad (u_2)_{x=a} = 0, \quad (3)(4)$$

$$(u_1)_{x=a_1} = (u_2)_{x=a_1}, \quad k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=a_1} = k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=a_1} \quad (5)(6)$$

$$(u_1)_{y=0} = 0, \quad (u_1)_{y=b} = 0, \quad (u_2)_{y=0} = 0, \quad (u_2)_{y=b} = 0 \quad (7)(8)(9)(10)$$

を使用し、初期条件を次の如く採る：

$$(u_1)_{t=0} = f_1(x, y), \quad (u_2)_{t=0} = f_2(x, y). \quad (11)(12)$$

熱伝導の微分方程式(1), (2)の特解として

$$u_1 = E_{\alpha_1, \beta_1} e^{-\kappa_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) t} (A_{\alpha_1} \cos \kappa_2 \alpha_1 x + B_{\alpha_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 x) \\ \times (C_{\beta_1} \cos \kappa_2 \beta_1 y + D_{\beta_1} \sin \kappa_2 \beta_1 y) \quad (13)$$

* Y. Kodaira : Conduction of Heat in an Infinite Solid made of Two Different Parts. Geophys. Mag. Vol. 21, 217—219, 1950.

Y. Kodaira : Vibration of String made of Two Different Parts when a Special Condition exists between the Velocities of Propagation and the Lengths of the Different Parts.

Geophys. Mag. Vol. 21, 214—216 1950

小平吉男：相異なる二つの物質の部分より成る半無限固体の熱伝導。明星大学研究紀要 理工学部 第1号 25—31, 1965

小平吉男：二つの相異なる部分より成る弦の振動解に対する注意。明星大学研究紀要 理工学部 第2号 21—26, 1966.

小平吉男：一樣な球の外側に別の物質より成る一樣な球殻がある場合の熱伝導。明星大学研究紀要 理工学部第5号, 15—29, 1970.

$$u_2 = E_{\alpha_2, \beta_2} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) t} \{ A_{\alpha_2} \cos \kappa_1 \alpha_2 (a-x) + B_{\alpha_2} \sin \kappa_1 \alpha_2 (a-x) \} \\ \times (C_{\beta_2} \cos \kappa_1 \beta_2 y + D_{\beta_2} \sin \kappa_1 \beta_2 y) \quad (14)$$

を用いることにする。

境界条件(3), (4)によれば

$$A_{\alpha_1} = 0, \quad A_{\alpha_2} = 0 \quad (15)$$

である。又境界条件(7)~(10)により

$$C_{\beta_1} = 0, \quad C_{\beta_2} = 0, \quad \kappa_2 \beta_1 = \frac{n\pi}{b}, \quad \kappa_1 \beta_2 = \frac{n\pi}{b}, \quad [n=1, 2, 3, \dots] \quad (16)$$

でなくてはならない。

境界条件(5), (6)を満足するためには, t を含む因数は互に等しくなくしてはならないから

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2, \quad (17)$$

或は, (16)により

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 b^2} (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \quad (18)$$

である。境界条件(5), (6)によれば

$$E_{\alpha_1, \beta_1} B_{\alpha_1} D_{\beta_1} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1 = E_{\alpha_2, \beta_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2, \quad (19)$$

$$k_1 \kappa_2 \alpha_1 E_{\alpha_1, \beta_1} \beta_1 D_{\beta_1} \cos \kappa_2 \alpha_1 a_1 = -k_2 \kappa_1 \alpha_2 E_{\alpha_2, \beta_2} B_{\alpha_2} D_{\beta_2} \cos \kappa_1 \alpha_2 a_2$$

を得る。但し $a - a_1 = a_2$ とおいてある。これから

$$B_{\alpha_1} D_{\beta_1} E_{\alpha_1, \beta_1} = M_{\alpha_1, \alpha_2, n} \sin \kappa_1 \alpha_2 a_2, \quad (20)$$

$$B_{\alpha_2} D_{\beta_2} E_{\alpha_2, \beta_2} = M_{\alpha_1, \alpha_2, n} \sin \kappa_2 \alpha_1 a_1$$

と置けばよい。又(19)から

$$\frac{\tan \kappa_2 \alpha_1 a_1}{\tan \kappa_1 \alpha_2 a_2} + \frac{k_1 \kappa_2 \alpha_1}{k_2 \kappa_1 \alpha_2} = 0 \quad (21)$$

が得られる。(18)と(21)とから α_1 及び α_2 が決定される。

(18)と(21)とを満足する根には絶対値の等しい正負の根があることは容易に分かる。これらの式を満足する α_1 及び α_2 は無限に多くあることは次の如くすると分かる。

$$\kappa_2 \alpha_1 a_1 = \xi_{1,n}, \quad \kappa_1 \alpha_2 a_2 = \xi_{2,n}$$

と置けば(18), (21)は

$$\frac{\xi_{1,n}^2}{\alpha_1^2 \kappa_2^2} - \frac{\xi_{2,n}^2}{\alpha_2^2 \kappa_1^2} = \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2 b^2} (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \quad (22)$$

$$\frac{\tan \xi_{1,n}}{\kappa_1 a_2 \xi_{1,n}} + \frac{\tan \xi_{2,n}}{\kappa_2 a_1 \xi_{2,n}} = 0 \quad (23)$$

となる。(22)は

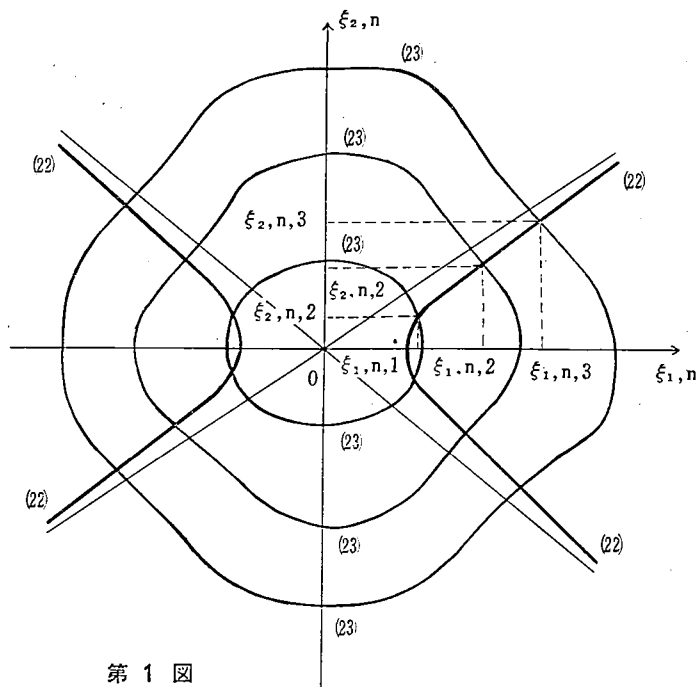
$$\frac{\xi_{1,n}}{\kappa_2 a_1} = \pm \frac{\xi_{2,n}}{\kappa_1 a_2}$$

を漸近線とする雙曲線である。(23)は複雑な曲線であるが, 同じような形を繰返している曲線である。これらの曲線は第1図に画いてある。

(22)及び(23)を満足する正根を大きさの順に並べて s 番目のものを各々 $\xi_{1,n,s}$, $\xi_{2,n,s}$ と書くこととし, それらに対する α_1 , α_2 の値を各々 $\alpha_{1,n,s}$, $\alpha_{2,n,s}$ と書けば, これらは

$$\alpha_{1,n,s} = \frac{\xi_{1,n,s}}{\kappa_2 a_1}, \quad \alpha_{2,n,s} = \frac{\xi_{2,n,s}}{\kappa_1 a_2}, \quad [s=1, 2, 3, \dots] \quad (24)$$

にて与えられる。



第 1 図

(20), (24)を(13), (14)に代入し, $M_{\alpha_1, \alpha_2, n}$ の代りに $M_{n, s}$ と書き, n 及び s の許し得る総ての値に対して和をとれば, (15), (16)により(13), (14)は次の如くなる:

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{n, s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left(\alpha_1^2, n, s + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_2^2 b^2} \right) t} \sin \kappa_1 \alpha_2, n, s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_1, n, s x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (25)$$

$$u_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{n, s} e^{-\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left(\alpha_2^2, n, s + \frac{n^2 \pi^2}{\kappa_1^2 b^2} \right) t} \sin \kappa_2 \alpha_1, n, s a_1 \sin \kappa_1 \alpha_2, n, s (a-x) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (26)$$

これに初期条件を入れれば

$$f_1(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{n, s} \sin \kappa_1 \alpha_2, n, s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_1, n, s x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (27)$$

$$f_2(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{n, s} \sin \kappa_2 \alpha_1, n, s a_1 \sin \kappa_1 \alpha_2, n, s (a-x) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (28)$$

を得る, $f_1(x, y)$ と $f_2(x, y)$ とを x について展開すれば

$$f_1(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{b} y \int_0^b f_1(x, \mu) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\mu, \quad (29)$$

$$f_2(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{b} y \int_0^b f_2(x, \mu) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\mu \quad (30)$$

であるから,

$$F_1(x) \equiv \frac{2}{b} \int_0^b f_1(x, \mu) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\mu = \sum_{s=1}^{\infty} M_{n, s} \sin \kappa_1 \alpha_2, n, s a_2 \sin \kappa_2 \alpha_1, n, s x \quad (31)$$

$$F_2(x) \equiv \frac{2}{b} \int_0^b f_2(x, \mu) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\mu = \sum_{s=1}^{\infty} M_{n, s} \sin \kappa_2 \alpha_1, n, s a_1 \sin \kappa_1 \alpha_2, n, s (a-x) \quad (32)$$

を満足するように $M_{n, s}$ を決定すればよい。

$M_{n,s}$ を決定するためには (31) の両辺に $k_1 k_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{2,n,m} x$ を掛けて 0 から a_1 まで積分し, (32) の両辺に $k_2 k_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-x)$ を掛けて a_1 から a まで積分して加へ合わせればよい:

$$\begin{aligned} & k_1 k_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \int_0^{a_1} F_1(x) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} dx \\ & + k_2 k_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \int_{a_1}^a F_2(x) \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-x) dx \\ = & \sum_{s=1}^{\infty} M_{n,s} k_1 k_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \int_0^{a_1} \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} x \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} x dx \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} M_{n,s} k_2 k_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \int_{a_1}^a \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} (a-x) \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-x) dx. \quad (33) \end{aligned}$$

しかるに

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{a_1} \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} x \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} x dx \\ &= \frac{\alpha_{1,n,m} \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \cos \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 - \alpha_{1,n,s} \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \cos \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1}{\kappa_2 (\alpha_{1,n,s}^2 - \alpha_{1,n,m}^2)}, \quad [s \neq m], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^{a_1} \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} (a-x) \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-x) dx \\ &= \frac{\alpha_{2,n,m} \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 - \alpha_{2,n,s} \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2}{\kappa_1 (\alpha_{2,n,s}^2 - \alpha_{2,n,m}^2)}, \quad [s \neq m], \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{a_1} \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,n,m} x dx = \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{\sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \cos \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1}{\alpha_{1,n,m}^2} \right)$$

$$I_4 = \int_{a_1}^a \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-x) dx = \frac{a_2}{2} \left(1 - \frac{\sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \cos \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2}{\alpha_{2,n,m}^2} \right)$$

である。(33)により

$$\alpha_{1,n,s}^2 - \alpha_{1,n,m}^2 = \alpha_{2,n,s}^2 - \alpha_{2,n,m}^2$$

であるから,

$$\begin{aligned} & k_1 k_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 I_1 + k_2 k_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 I_2 \\ &= \frac{\sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1}{\alpha_{1,n,s}^2 - \alpha_{1,n,m}^2} \\ & \times \{ (k_1 k_2 \alpha_{1,n,m} \cot \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 + k_2 k_1 \alpha_{2,n,m} \cot \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2) \\ & - (k_1 k_2 \alpha_{1,n,s} \cot \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 + k_2 k_1 \alpha_{2,n,s} \cot \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2) \} \end{aligned}$$

となるが, (34)は

$$k_1 k_2 \alpha_{1,n,m} \cot \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 + k_2 k_1 \alpha_{2,n,m} \cot \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 = 0, \quad (34)$$

$$k_1 k_2 \alpha_{1,n,s} \cot \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 + k_2 k_1 \alpha_{2,n,s} \cot \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 = 0 \quad (35)$$

であるから, 上の式は 0 となる。

又

$$\begin{aligned} & k_1 k_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 I_3 + k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 I_4 \\ &= \frac{1}{2} (a_1 k_1 k_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 + a_1 k_2 k_1^2 \sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1) \end{aligned}$$

$$-\frac{\sin^2 \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2}{2} \left(\frac{k_1 \kappa_2 \cot \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1}{\alpha_{1,n,m}} + \frac{k_2 \kappa_1 \cot \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2}{\alpha_{2,n,m}} \right)$$

となるが、第二項の括弧内の式2は③により

$$k_1 \kappa_1 \alpha_{1,n,m} \cot \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \left(\frac{1}{\alpha_{1,n,m}^2} - \frac{1}{\alpha_{2,n,m}^2} \right)$$

と書くことも出来る。

$$k_1 \kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{2,n,m} I_3 + k_2 \kappa_1^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_{1,n,m} \alpha_1 I_4 = V(\alpha_{1,n,m}, \alpha_{2,n,m}) \quad (36)$$

と置くことにする。

③により③1, ③2の x に関する展開式は次のようになる：

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} x}{V(\alpha_{1,n,s}, \alpha_{2,n,s})} \\ &\quad \times \left(k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + k_2^2 \kappa_1 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \int_{a_1}^a F(\lambda) \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} (a-\lambda) d\lambda \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \sin \kappa_1 \alpha_{1,n,s} (a-x)}{V(\alpha_{1,n,s}, \alpha_{2,n,s})} \\ &\quad \times \left(k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} a_2 \int_0^{a_1} F_1(\lambda) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,s} a_1 \int_{a_1}^a F_2(\lambda) \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,s} (a-\lambda) d\lambda \right). \end{aligned} \quad (38)$$

③7, ③8により②9, ③0の展開式は次の如くなる：

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} x}{V(\alpha_{1,n,m}, \alpha_{2,n,m})} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad \times \left(k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \int_0^{a_1} \int_0^b f_1(\lambda, \mu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} \lambda \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right. \\ &\quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b f_2(\lambda, \mu) \sin \kappa_1 \alpha_{1,n,m} (a-\lambda) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \sin \kappa_2 \alpha_{2,n,m} (a-x)}{V(\alpha_{1,n,m}, \alpha_{2,n,m})} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad \times \left(k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \int_0^{a_1} \int_0^b f_1(\lambda, \mu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} \lambda \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right. \\ &\quad \left. + k_1 \kappa_1^2 \sin \kappa_1 \alpha_{1,n,m} a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b f_2(\lambda, \mu) \sin \kappa_1 \alpha_{1,n,m} (a-\lambda) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right). \end{aligned} \quad (40)$$

③9, ④0により求める温度は次の式で与えられる：

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2 \left(\kappa_2^2 \alpha_{1,n,m}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) t} \frac{\sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} x}{V(\alpha_{1,n,m}, \alpha_{2,n,m})} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad \times \left(k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \int_0^{a_1} \int_0^b f_1(\lambda, \mu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} \lambda \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right. \\ &\quad \left. + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b f_2(\lambda, \mu) \sin \kappa_1 \alpha_{1,n,m} (a-\lambda) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$u_2 = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa_2^2 \left(\kappa_1^2 \alpha_{2,n,m}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) t}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-x)}{V(\alpha_{1,n,m}, \alpha_{1,n,m})} \sin \frac{n\pi}{b} y \\
& \times \left(k_1 \kappa_2^2 \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} a_2 \int_0^{a_1} \int_0^b f_1(\lambda, \mu) \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} \lambda \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right. \\
& \left. + k_2 \kappa_1^2 \sin \kappa_2 \alpha_{1,n,m} a_1 \int_{a_1}^a \int_0^b f_2(\lambda, \mu) \sin \kappa_1 \alpha_{2,n,m} (a-\lambda) \sin \frac{n\pi}{b} \mu d\lambda d\mu \right). \quad (42)
\end{aligned}$$