

内挿法上における問題点

小 野 英 夫

〔0〕 序 文

函数表をひき、函数値を求める場合、変数の値が表に与えられていないとき、その前後の値から中間における値を計算するのが、補間法の起源である。通例、補間法は、表に与えられた変数値 x_0, x_1, \dots, x_n において、函数値 f_0, f_1, \dots, f_n の値をとる n 次多項式 $P_n(x)$ をつくり、 x における $P_n(x)$ の値を計算して、目的の函数値の近似値としている。このために $P_n(x)$ が、どの程度に $f(x)$ を近似するかが問題になる。この近似の問題に関し、ここでは、まず等間隔補間のとき、〔I〕補間間隔を固定(non zero の間隔)し、とる点の個数 $n \rightarrow \infty$ とした場合を考察する。次には、〔II〕区間を固定して、補間間隔 $h \rightarrow 0$ とした場合は、どうなるかを考察する。

〔I〕補間間隔を固定(non zero の補間)し、 n (とる点の個数) を、ふやしたらどうなるか。

1—1 補間間隔が粗なとき

内挿法を適用するときに、補間間隔が粗すぎると具合が悪いことがある。たとえば、端的な例として、 $\sin k\pi(x+\theta)$, (k =奇整数, $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$) を $x=0, 1, 2, \dots$ で補間すると、これは $\sin\theta\cos\pi x$ を同じ x の値について補間することになり、 n が大きいとき、補間関数は、 $\sin\theta\cos\pi x$ の近似値を与える。(1—4参照)。これは、うなり現象による幻影になる。

以下では、A. D. Booth が、その著書の中で扱った $y=4^x$ の補間をとりあげ、これにつき、さらにいろいろ考察をすすめていく。

(ex.1) 補間間隔 $h=1$ として、1—1表をあたえて、その関数(じつは 4^x)を補間し、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算する。

| x | $f(x)$ | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 | Δ^6 | Δ^7 | Δ^8 |
|-----|--------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0 | 1 | 3 | | | | | | | |
| 1 | 4 | 12 | 9 | | | | | | |
| 2 | 16 | 48 | 36 | 27 | 81 | | | | |
| 3 | 64 | 192 | 144 | 432 | 324 | 243 | 729 | | |
| 4 | 256 | 768 | 576 | 1728 | 1296 | 972 | 2916 | 2187 | |
| 5 | 1024 | 3072 | 2304 | 6912 | 5184 | 3888 | 11664 | 8748 | 6561 |
| 6 | 4096 | 1228 | 9216 | 27648 | 20736 | 15552 | | | |
| 7 | 16384 | 49152 | 36864 | | | | | | |
| 8 | 85536 | | | | | | | | |

1—1 表

Newton の内挿式を用いると

$$f(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n! h^n} \Delta^n y_0 + \dots,$$

$h=1$ であるから

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} \times \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \times 9 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} \times 27 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!} \\ &\quad \times 81 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{5!} \times 243 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)}{6!} \\ &\quad \times 729 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)}{7!} \times 2187 \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{13}{2}\right)}{8!} \times 6561 + \dots \\ &= 1 + 1.5 - 1.13 + 1.69 - 3.16 + 6.64 - 14.95 + 35.24 - 87.22 + \dots \end{aligned}$$

これから見られるように、級数の各項は増大し、真の値 $(4)^{\frac{1}{2}}=2$ になることは決してないようにみえる。

実際、

$$\text{第 } n \text{ 項は } \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} \times 3^n$$

$$\text{第}(n+1)\text{項は } \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{(n+1)!} \times 3^{n+1}$$

第 n 項と第 $(n+1)$ 項の比 M は、

$$M = \left| \frac{(n+1)\text{項}}{n\text{項}} \right| = \left| \frac{x-n}{n} \right| \times 3$$

$n \rightarrow \infty$ とすると $M \rightarrow 3$ なり、この級数は、発散する。

このように、あまり補間間隔が粗な場合においては、補間級数が収束せず、発散してしまい、真の値からほど遠い値がでてくることがある。

しかし、ここで、補間間隔 $h=1$ のときは、発散してしまったが、 h をいろいろかえてみるとどうなるか。

1-2. 収束する h の範囲

Newton の内挿公式の $(n+1)$ 項と n 項の比を、 M とすると、

$$M = \left| \frac{(n+1)\text{項}}{n\text{項}} \right| = \left| \frac{x-n}{n} \right| \times \frac{\Delta^{n+1}f(x)}{\Delta^n f(x)}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、

$$M \rightarrow \frac{\Delta^{n+1}f(x)}{\Delta^n f(x)}$$

ここで、

$$\Delta(4^x) = 4^{x+h} - 4^x = 4^x(4^h - 1)$$

$$\Delta^2(4^x) = \Delta(4^x) \cdot (4^h - 1) = 4^x(4^h - 1)^2$$

.....

$$\Delta^n(4^x) = 4^x(4^h - 1)^n$$

したがって、

$$\frac{4^{n+1}f(x)}{4^n f(x)} = \frac{4^x(4^h-1)^{n+1}}{4^x(4^h-1)^n} = 4^h-1$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $M < 1$ となるには

$$4^h-1 < 1$$

$$4^h < 2$$

$$\therefore h < \frac{1}{2}$$

したがって、補間間隔 $h < \frac{1}{2}$ にとれば、Newton の補間級数は収束する。 $h = \frac{1}{2}$ のときは、級数は、交項無限級数となって同じく収束する。

補間級数は、収束しても、一般には、補間級数 $= f(x)$ ではない。実際、補間点で 0 となり、周期 h とする周期函数、たとえば、 $C \sin \frac{m\pi x}{h}$ を $f(x)$ に加えたものは、補間点における値が、 $f(x)$ と同じになって、同じ補間函数を与える。今の場合 $f(x) = 4^x$ では、 $h \leq \frac{1}{2}$ のとき、たまたま 補間級数 $= f(x)$ となる。

ここで $h < \frac{1}{2}$ で収束したとき、原函数との差をよく知られている (Rolle の定理による) 誤差公式で考察すると、

$$f(x) = 4^x = e^{x \log 4}$$

$$f_{(x)}^{(n+1)} = (\log 4)^{n+1} e^{x \log 4}$$

$$R = \binom{q}{n+1} h^{n+1} \cdot f_{(S)}^{(n+1)} \quad (\text{ここに } S \text{ は、} a, a+nh. \text{ } a+qh \text{ のうち最大の値と最小値との間にはさまれる一数。})$$

$$= \frac{q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \cdot f_{(S)}^{(n+1)}$$

$$< \frac{n!}{(n+1)!} h^{n+1} \cdot |\log 4|^{n+1} \cdot e^{nh \log 4}$$

$$= \frac{1}{n+1} h^{n+1} \cdot (2|\log 2|)^{n+1} \cdot e^{nh \log 4}$$

$$= \frac{1}{n+1} (2h \cdot |\log 2|)^{n+1} \cdot (4h)^n$$

$$= \frac{1}{n+1} (2h \cdot |\log 2|)^{n+1} \cdot \frac{4^{(n+1)h}}{4h}$$

$$= \frac{1}{(n+1)4^h} (2h \cdot |\log 2|)^{n+1}$$

$n \rightarrow \infty$ としたとき

$$2h |\log 2| 4^h < 1$$

すなわち、

$h \cdot 4^h < \frac{1}{2|\log 2|} = \frac{1}{2 \times 0.693}$ であれば、 $R \rightarrow 0$. となって、補間級数は $f(x)$ と一致する。 $h \leq \frac{1}{2}$ でも $h \cdot 4^h > \frac{1}{2|\log 2|}$ だと、この評価ではわからないが、 x を固定し級数を h の解析函数と考えれば、その一様収束な範囲全部にわたって、収束補間級数 $= 4^x$ となることは、一致の定理から結論される。

(ex. 2) 説明のための数値実例として補間間隔 $h = \frac{1}{2}$ のとき、前の函数 ($f(x) = 4^x$) を補間し、 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めてみる。

| x | $f(x)$ | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 | Δ^6 | Δ^7 | Δ^8 | Δ^9 | Δ^{10} | Δ^{11} |
|----------------|--------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 4 | 2 | 1 | | | | | | | | | |
| $\frac{3}{2}$ | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | | | | |
| $\frac{5}{2}$ | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | | | |
| 3 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | | |
| $\frac{7}{2}$ | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | | |
| 4 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | |
| $\frac{9}{2}$ | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | | |
| 5 | 1024 | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | |
| $\frac{11}{2}$ | 2048 | 1024 | 512 | 256 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |

1-2 表

Newton の補間公式を用いると

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{3}\right) &= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)}{2! \cdot \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{3! \cdot \frac{1}{8}} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)}{4! \cdot \frac{1}{16}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{5! \cdot \frac{1}{32}} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)}{6! \cdot \frac{1}{64}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{7! \cdot \frac{1}{128}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{19}{6}\right)}{8! \cdot \frac{1}{256}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{19}{6}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)}{9! \cdot \frac{1}{512}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{19}{6}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)\left(-\frac{25}{6}\right)}{10! \cdot \frac{1}{1024}} \\
 &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{13}{6}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{19}{6}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)\left(-\frac{25}{6}\right)\left(-\frac{14}{3}\right)}{11! \cdot \frac{1}{2048}} \\
 &= 1 + 0.6667 - 0.1111 + 0.0494 - 0.0288 + 0.0188 - 0.0277 + 0.0104 - 0.0082 \\
 &+ 0.0067 - 0.0056 + 0.0054 = 1.576
 \end{aligned}$$

となり、収束は非常におそいが、12項までの部分和として、真の値 $(4)^{\frac{1}{4}}=1.5874$ に近いところの値がでてくる。

★ h をかえて 4^x を考察する代り $h=1$ と固定して a^x を考えてもよいので、後に引用する次の二例を考える。

(ex. 3) 関数 $f(x)=1.2^x$ を補間間隔 $h=1$ での 1-3 表をあたえて補間し、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を計算する。

| x | $f(x)$ | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 |
|-----|---------|----------|------------|------------|------------|------------|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1.2 | 0.2 | | | | |
| 2 | 1.44 | 0.24 | 0.04 | | | |
| 3 | 1.728 | 0.288 | 0.048 | 0.008 | | |
| 4 | 2.0736 | 0.3456 | 0.0576 | 0.0096 | 0.0016 | |
| 5 | 2.48832 | 0.41472 | 0.06912 | 0.01152 | 0.00192 | 0.00032 |

1-3 表

Newton 内挿式を用いると、

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{1}{2} \times 0.2 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \times 0.04 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} \times 0.008 \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right)}{4!} \times 0.0016 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}\right)}{5!} \\
 &\quad \times 0.00032 = 1.09544625
 \end{aligned}$$

第 6 項までで、これは真の値 $(1.2)^{\frac{1}{2}}=1.09544511$ と小数点 5 ケタまで正確にできた。

(ex. 4) 同じく補間間隔 $h=1$ にとって 1-4 表において、その函数 (じつは 1.02^x) を補間し、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を求める。

| x | $f(x)$ | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1.02 | 0.02 | | | | |
| 2 | 1.0404 | 0.0204 | 0.0004 | | | |
| 3 | 1.061208 | 0.020808 | 0.000408 | 0.000008 | | |
| 4 | 1.08243216 | 0.02122416 | 0.00041616 | 0.00000816 | 0.00000016 | |
| 5 | 1.1040808032 | 0.0216486432 | 0.0004244832 | 0.0000083232 | 0.0000001632 | 0.0000000032 |

1-4 表

同じく Newton 内挿式を用いると、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times 0.02 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \times 0.0004 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} \times 0.000008$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}\times 0.00000016+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{5!}\times 0.0000000032=1.009950493875$$

となる。(真の値 $(1.02)^{\frac{1}{2}}=1.00995049$)

1-3. 逆内挿法 (Inverse Interpolation)

内挿公式を漠然と用いることから生ずる危険は、今までの実例で例示されている。さて『 $f(x)$ をあたえて x をもとめよ』によって定義されている逆内挿法(Inverse Interpolation)とよばれる逆算は注意しないとより多くの危険をかもしたす可能性が多い。

ここで、また前節で出した Booth の例をとって、これについて考察をする。この例において Newton の補間級数が発散したときの逆補間は、真の値から全くいちじるしくずれたものができてくる。また、補間級数が収束したときの逆補間は、真の値がでてくる。このことを示すため、前に与えた例のそれぞれについて逆補間をやってみた。

(ex. 5) 右の 1-5 表をあたえて、 $x=32$ にたいする $g(x)$ の値を求める。(これは、(ex. 1) にすでにあたえたものの逆補間である。)

Lagrange の公式を用いると

$$g(x)=\sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

$$g(32)=1\times\frac{31\times 16\times(-32)\times(-224)}{3\times(-12)\times(-60)\times(-252)}+2\times\frac{31\times 28\times(-32)\times(-224)}{15\times 12\times(-48)\times(-240)}+3\times\frac{31\times 28\times 16\times(-224)}{63\times 60\times 48\times(-192)}+4\times\frac{31\times 28\times 16\times(-32)}{255\times 252\times 240\times 192}=-0.263$$

| x | $g(x)$ |
|-----|--------|
| 1 | 0 |
| 4 | 1 |
| 16 | 2 |
| 64 | 3 |
| 256 | 4 |

1-5 表

となり、これは真の値+2.5 から、全くずれている。

(ex. 6) 1-6 表をあたえて、この関数(じつは $\log_2 x$)を 4 次多項式で補間し、 $g(6)$ を求める ((ex. 2)の逆補間)

Lagrange の公式を使って

$$g(6)=\frac{-25}{42}+\frac{25}{18}+\frac{75}{168}-\frac{1}{126}=1.2321$$

となる。(真の値=1.292)

(ex. 7) 次の 1-7 表の関数(じつは $\log_{1.2} x$)を、4 次多項式で補間し、 $g(2)$ の値を計算する。(これは、(ex. 3)の逆補間)

Lagrange の公式を用いると、

$$g(2)=1\times\frac{1\times 0.56\times 0.272\times(-0.0736)}{0.2\times(-0.24)\times(-0.528)\times(-0.8736)}+2\times\frac{1\times 0.8\times 0.272\times(-0.0736)}{0.44\times 0.24\times(-0.288)\times(-0.6336)}+3\times\frac{1\times 0.8\times 0.56\times(-0.0736)}{0.728\times 0.528\times 0.288\times(-0.3456)}+4\times\frac{1\times 0.8\times 0.56\times 0.272}{1.0736\times 0.8736\times 0.6336\times 0.3456}=3.8029$$

となる。(真の値=3.801)

| x | $g(x)$ |
|-----|---------------|
| 1 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 4 | 1 |
| 8 | $\frac{3}{2}$ |
| 16 | 2 |

1-6 表

| x | $g(x)$ |
|--------|--------|
| 1 | 0 |
| 1.2 | 1 |
| 1.44 | 2 |
| 1.728 | 3 |
| 2.0736 | 4 |

1-7 表

(ex. 8) 下の関数(じつは $\log_{1.02} x$) を, 4 次多項式で補間し, $g(1.05)$ をもとめる。(これは(ex. 4)の逆補間である)。

Lagrange の公式を使って計算すると $g(1.05)=2.484$ となる。(真の値=2.46)

以上の例では, 順補間のときの補間級数が収束して $f(x)$ の近似値を与える場合には, 逆補間がもとの x をよく近似してくれた。一般に, この事が成立つかいなかをしらべる事が問題であるが, これはなお, 今後に研究することにする。

| x | $g(x)$ |
|------------|--------|
| 1 | 0 |
| 1.02 | 1 |
| 1.0404 | 2 |
| 1.061208 | 3 |
| 1.08243216 | 4 |

1-8 表

1-4. [I] の総括

補間級数は, 補間間隔 $h=1$ で $n \rightarrow \infty$ としたときの総括的一般原理としては, 次の定理がある。 $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ において $f(x)$ の値を与えたときの Stirling 公式の極限については, これが

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{x} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{f(i)}{x-i} + \frac{f(-i)}{x+i} \right) \right\}$$

と同じ振舞をし, 後者が収束するとき, 前者も収束してこれに等しくなり, 後者が発散するとき, 前者も発散する。(日本数学物理学会記事, 1934, p. 268~p. 272)。

たとえば, 1-1 の最初にあげた $f(x)=\sin k\pi(x+\theta)$ をこの定理にあてはめる。このとき $f(i)=(-1)^i \sin \theta$ となるので, 上の級数は

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} \sin \theta \left\{ -\frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i} \right) \right\} = -\frac{\sin \pi x}{\pi} \sin \theta \cdot \pi \cot \pi x = \sin \theta \cos \pi x$$

となって 1-1 最初の考察で幻影出現の例として引用したことがでてくる。

[II] 区間を固定し, 補間点の数を無限にふやすとき

閉区間 $[a, b]$ で, 定義された連続関数 $f(x)$ を考える。この区間における $f(x)$ の n 次補間多項式を $P_n(x)$ とし, $n \rightarrow \infty$ としたとき, $P_n(x) \rightarrow f(x)$ となるかどうかの問題を論ずる。

2-1 $f(x)$ が解析的である場合

区間 $[0, 1]$ で $f(x)$ が解析的であるとし, また補間は等間隔補間の場合を考える。このときは, この区間内に適当な部分区間 $\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]$ があり, この中では, 必らず $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \rightarrow f(x)$ となることがしめされ, しかもこの近似は $|f(x)-P_n(x)| < \rho'^n$ のようになっていることがわかっている。($0 < \rho' < 1$)

これは, いかなる理由にもとずくか。まず, $f(x)$ が解析的であるときは, 最良近似の理論から, その最良近似多項式を $R_n(x)$ とすると, この区間での近似度

$$E_n = \max_x |f(x) - R_n(x)|$$

につき, 適当な正定数 M, ρ ($0 < \rho < 1$) があって,

$$E_n < M \rho^n$$

となることを注目しておく。

次に補間多項式を Lagrange の形で次のように書いておく。

$$P_n(x) = S(x) \sum_{i=0}^n \frac{f\left(\frac{i}{n}\right)}{\left(x - \frac{i}{n}\right) S'\left(\frac{i}{n}\right)}.$$

ここに, $S(x) = x\left(x - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(x - \frac{n}{n}\right)$ である。

最良近似 n 次式 $R_n(x)$ については, もちろん,

$$R_n(x) = S(x) \sum_{i=0}^n \frac{R_n\left(\frac{i}{n}\right)}{\left(x - \frac{i}{n}\right) S'\left(\frac{i}{n}\right)}$$

であるから, 両者の差を作って

$$P_n(x) - R_n(x) = S(x) \sum_{i=0}^n \frac{A_i}{\left(x - \frac{i}{n}\right) S'\left(\frac{i}{n}\right)} \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$\text{ここに} \quad A_i = f\left(\frac{i}{n}\right) - R_n\left(\frac{i}{n}\right)$$

とした。この A_i については, E_n に関する上の不等式から n を十分大きくとれば,

$$|A_i| < \rho_1^n \quad (0 < \rho_1 < 1)$$

であるような ρ_1 がとれる。

補間公式の中で, 値 $f\left(\frac{i}{n}\right)$ が点 x におよぼす影響は, それにかかる係数

$$H_i = \frac{S(x)}{\left(x - \frac{i}{n}\right) S'\left(\frac{i}{n}\right)}$$

によってきまり, これが大きいほど x における $P_n(x)$ の値に及ぼす $f\left(\frac{i}{n}\right)$ の寄与が大きい。ゆえに, この係数を第 i 点の函数値の x なる場所に与える寄与率とよぶことにする。

寄与率はどんな値の分布をするかを, たとえば, $i=0$ の場合についてしらべてみる。

| 寄 与 率 | | x |
|------------|-----|--------------------|
| -1.3469814 | +04 | $11 + \frac{1}{2}$ |
| +9.4165860 | +02 | $10 + \frac{1}{2}$ |
| -1.1564230 | +02 | $9 + \frac{1}{2}$ |
| +2.1040254 | +01 | $8 + \frac{1}{2}$ |
| -5.2344043 | +00 | $7 + \frac{1}{2}$ |
| +1.7635044 | +00 | $6 + \frac{1}{2}$ |
| -7.0735195 | -01 | $5 + \frac{1}{2}$ |
| +3.7051771 | -01 | $4 + \frac{1}{2}$ |
| -2.4540782 | -01 | $3 + \frac{1}{2}$ |
| +2.1057574 | -01 | $2 + \frac{1}{2}$ |
| -2.5414314 | -01 | $1 + \frac{1}{2}$ |
| +6.4947691 | -01 | $\frac{1}{2}$ |

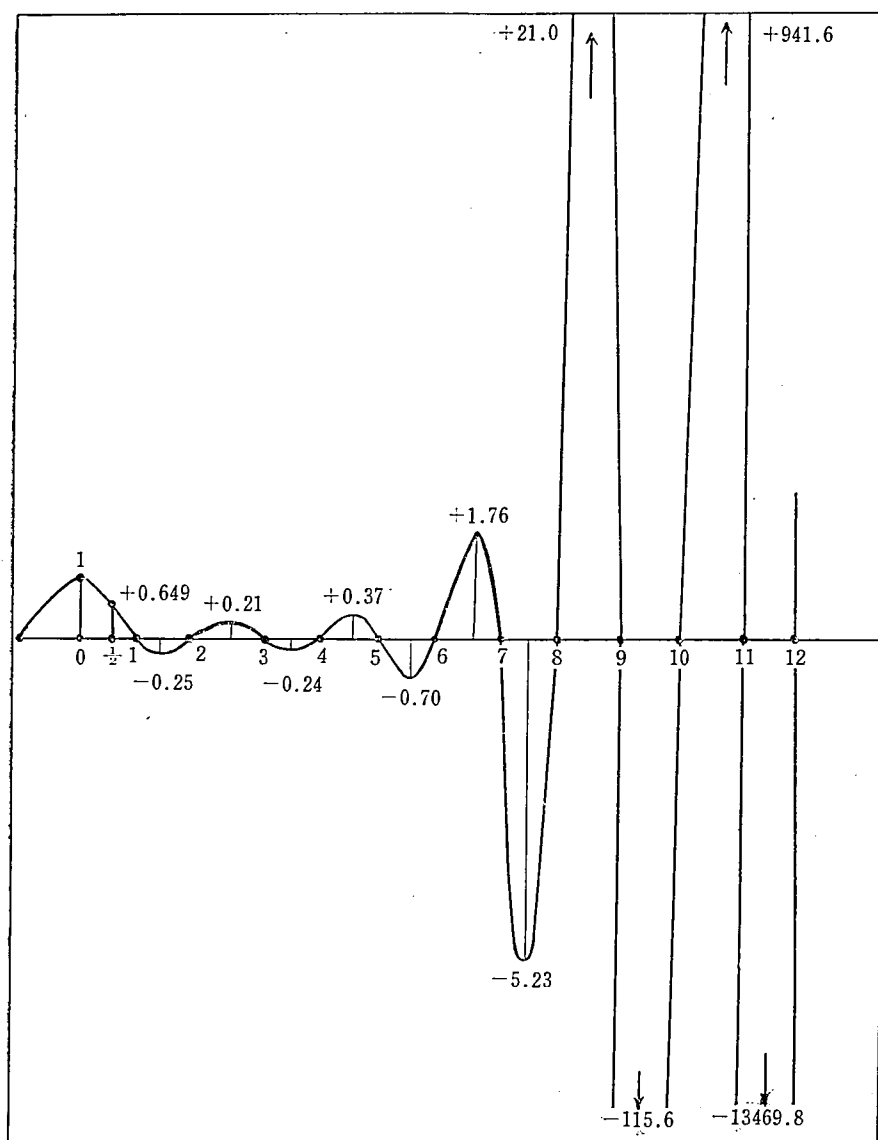


図 1

区画(+1, -1)を $2n=24$ 等分し, 寄与率を計算すると, はしにいくと -1.3×10^4 と大きくなっていく。したがってくいちがいが出てくるわけである。

これからわかるように, 区間の中央ではこの値は小さいが, 区間の端に近づくと異常に大きくなるのがわかる。

以後の目的は, まず $|P_n(x) - R_n(x)|$ の大きさを評価しようとするのであるが, 式 (4) の和において上のことから区間の近くの i では寄与率が非常に大きくなるので, 適当な C をとって区間を

$$\text{i)} \left| \frac{i}{n} - \frac{1}{2} \right| < C \text{ と, ii)} \left| \frac{i}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq C \text{ の 2 組に分けて考える。}$$

i) においては

$$\begin{aligned}
 H_i &= \left| \frac{S(x)}{\left(x - \frac{i}{n}\right) S'\left(\frac{i}{n}\right)} \right| \quad \left(\delta = \frac{\lambda}{2n} \right) \\
 &< C \sqrt[n]{\left[\frac{(n+\lambda)^{n+\lambda} (n-\lambda)^{n-\lambda}}{(n+h)^{n+h} (n-h)^{n-h}} \right]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= C \sqrt[n]{\left(\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta} (1-2\delta)^{1-2\delta}}{\left(1 + \frac{2h}{n}\right)^{1+\frac{h}{n}} \left(1 - \frac{2h}{n}\right)^{1-\frac{h}{n}}} \right)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

ii) においては

$$H_i < C \sqrt[n]{\left[\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta} (1-2\delta)^{1-2\delta}}{(1+2C')^{1+2C'} (1-2C')^{1-2C'}} \right]^{\frac{n}{2}}}.$$

すべての i につき (h の如何に限らず)

$$H_i < C \sqrt[n]{(1+2\delta)^{1+2\delta} (1-2\delta)^{1-2\delta}}^{\frac{n}{2}}.$$

$$\rho_1 [(1+2\delta)^{1+2\delta} (1-2\delta)^{1-2\delta}]^{\frac{1}{2}} < \rho' < 1,$$

このように δ をえらんでおくと,

$$\left[\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta} (1-2\delta)^{1-2\delta}}{(1+2C')^{1+2C'} (1-2C')^{1-2C'}} \right]^{\frac{1}{2}} < \rho'.$$

x について, 区間 $\left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right)$ を考える。

ここでは $|f(x) - P_n(x)|$ を評価すると

$$|f(x) - P_n(x)| < |R_n(x) - P_n(x)| + |f(x) - R_n(x)|$$

$$\therefore |f(x) - P_n(x)| < (n+1) C \sqrt[n]{\rho'^n} + \rho_1^n.$$

となって, 区間 $\left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right)$ において $P_n(x)$ が最良近似と同じ程度に $f(x)$ を近似することがわかる。

2-2. $f(x)$ が解析的でない場合

区間で $f(x)$ が解析的でない場合には, $P_n(x)$ は 2-1 のように簡明な振舞はせず, いろいろな場合が起こる。その一, 二例をあげる。

<第一例>

区間 $(-1, +1)$ での函数 $|x|$ 。

これについては次のようにして $P_n(x)$ の発散することがわかる。

$2n$ 次の Newton の多項式 $P_{2n}(x)$ をかいてみる。

$$\begin{aligned}
 P_{2n}(x) &= 1 - \frac{(x+1) \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{(x+1) \left(x+1 - \frac{1}{n}\right) \left(x+1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(x+1 - \frac{n-1}{n}\right) x}{(n+1)! \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \times \left(\frac{2}{n}\right) \\
 &\quad - \frac{(x+1) \left(x+1 - \frac{1}{n}\right) \left(x+1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(x+1 - \frac{n-1}{n}\right) x \left(x - \frac{1}{n}\right)}{(n+2)! \left(\frac{1}{n}\right)^{n+2}} \times {}_n C_1 \cdot \left(\frac{2}{n}\right) \\
 &\quad + \frac{(x+1) \left(x+1 - \frac{1}{n}\right) \left(x+1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(x+1 - \frac{n-1}{n}\right) x \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - \frac{2}{n}\right)}{(n+3)! \left(\frac{1}{n}\right)^{n+3}} \\
 &\quad \times {}_{n+1} C_2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right) - \cdots
 \end{aligned}$$

| x | $f(x)$ | Δf | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ | $\Delta^5 f$ | | | $\Delta^6 f$ | $\Delta^7 f$ | $\Delta^8 f$ | $\Delta^9 f$ |
|--------------------|-------------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| -1 | 1 | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $-1 + \frac{1}{n}$ | $1 - \frac{1}{n}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $-1 + \frac{2}{n}$ | $1 - \frac{2}{n}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $-1 + \frac{3}{n}$ | $1 - \frac{3}{n}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $-\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| $1 - \frac{1}{n}$ | $1 - \frac{1}{n}$ | $-\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | $\frac{1}{n}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |

$$\begin{aligned}
 &= 1 - (x+1) + \sum_{t=1}^n \frac{(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right)\left(x+1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{i-1}{n}\right)}{(n+i)! \left(\frac{1}{n}\right)^{n+i}} \\
 &\quad \times (-1)^{t-1} \cdot {}_{n+t-2}C_{t-1} \cdot \left(\frac{2}{n}\right) \\
 &= -x + \sum_{i=1}^n \frac{(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right)\left(x+1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{i-1}{n}\right)}{(n+i)! \left(\frac{1}{n}\right)^{n+i}} \times \Delta_{n+i} \\
 \Delta_{n+i} &= (-1)^{t-1} \cdot {}_{n+t-2}C_{t-1} \cdot \left(\frac{2}{n}\right) \\
 &= (-1)^{t-1} \cdot \frac{(n+i-2)!}{(n+i-2-i+1)! (i-1)!} \times \frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{i-1} \frac{(n+i-2)!}{(n-1)!(i-1)!} \times \frac{2}{n} \\
&= (-1)^{i-1} \frac{2 \cdot (n+i-2)!}{n!(i-1)!}
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
P_{2n}(x) &= -x + 2 \sum_{i=1}^n \frac{(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right)\left(x+1-\frac{2}{n}\right) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{i-1}{n}\right)}{(n+i)! \left(\frac{1}{n}\right)^{n+i}} \times \Delta_{n+i} \\
&= -x + 2 \sum_{i=1}^n \frac{(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right)\left(x+1-\frac{2}{n}\right) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{i-1}{n}\right)}{(n+i)! \frac{1}{n^{n+i}}} \times \Delta_{n+i} \\
&= -x + 2 \sum_{i=1}^n \frac{n^{n+i}}{(n+i)!} (x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{(-1)^{i-1}(n+i-2)!}{n!(i-1)!} \\
&= -x + 2 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} n^{n+i}}{(n+i)(n+i-1) \cdot n!(i-1)!} \cdot (x+1) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{i-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$|x|$ の対称性から負の値を考察するだけでよい。そうすると、和の各項はみな同符号である。故に $P_{2n}(x)$ が間隔のあらゆる点において、あらゆる限界を越えて増大することを認識するためには、唯一つの項がそうなることを証明するだけで事足りる。

$i=n$ のときの項 I_n とすると、

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{2 \cdot (-1)^{n-1} n^{2n}}{2n \cdot (2n-1) \cdot n!(n-1)!} \cdot (x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{n-1}{n}\right) \\
&= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{2n} \cdot (x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{n-1}{n}\right)}{n(2n-1)!(n-1)!} \\
&= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{2n} \cdot (x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right) \cdots x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{n+1}{n}\right)}{(2n-1)(n!)^2}
\end{aligned}$$

で n に伴って無限に増大する。

$$x = \frac{-\lambda}{2} - \frac{1}{2n} \text{ の間では,}$$

$$\begin{aligned}
|I_n(x)| &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(n-\lambda-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)}{(2n-1)(n!)^2} \\
&> \frac{(n-\lambda-1)(n+\lambda-1)!}{8n(n!)^2} \\
&> e^{-\frac{\lambda^2}{n}} \\
&> \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{n}}}{8n^3}
\end{aligned}$$

となって、ここでの補間級数の発散がしめされた。

<第2例>

$P_n(x)$ が $f(x)$ に収束するが、近似度 $\max_x |f(x) - P_n(x)|$ が、 ρ^n の order にならない場合、 $f(x)$ をつぎのようにして作る。

$$S_n = x\left(x-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(x-\frac{n}{n}\right)$$

から

$$Q_n(x) = \frac{(4e)^n}{n^3} \cdot S_n(x) \cdot x^{\frac{n}{2}} (1-x)^{\frac{n}{2}-1}$$

とする。 $|Q_n(x)| < \frac{8\pi}{n^2}$ なる評価ができるので

$$\text{級数 } Q_2(x) + Q_4(x) + Q_8(x) + \dots$$

は絶対かつ一様収束するので、これを $f(x)$ とおく。

$f(x)$ については、その部分和相关列

$$Q_2(x), Q_2(x) + Q_4(x), Q_2(x) + Q_4(x) + Q_8(x), \dots$$

は、その補間多項式 $P_2(x), P_4(x), P_8(x), \dots$ になっていて、 $|f(x) - P_n(x)| = Q_{2n}(x) + Q_{4n}(x) + \dots$ である。

これについては、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$ であるが、一方、各 $Q_k(x)$ は、皆正なので、

$$|f(x) - P_n(x)| > Q_{2n}(x)$$

であるが、一方 $|Q_{2n}(x)| > \frac{k}{(2n)^3}$ なる評価できるので $|f(x) - P_n(x)|$ は、order ρ^n のようにはならない。

以上のような例もあるので、補間級数の振舞いは、 $f(x)$ が解析的である場合のように簡明には行かない。

末尾ながら本研究に際し、いろいろご助言を下された日本数学教育学会名誉会長・明星大学教授佐藤良一郎先生、また本論文において終始ご指導を賜った日大大学院教授宇野利雄先生に対し深謝致します。

参 考 文 献

- (1) PROPRIÉTÉS EXTRÊMALES et la MEILLEURE APPROXIMATION des FONCTIONS ANALYTIQUES d'une VARIABLE REELLE (SERGE BERNSTEIN)
- (2) LEÇONS sur les PROPRIÉTÉS EXTREMALES DES FONCTIONS ANALYTIQUES d'une VARIABLE REELLE (SERGE BERNSTEIN)
- (3) NUMERICAL METHODS by ANDREW D. BOOTH, D. SE. 1955
- (4) "SUR LA SÉRIE D'INTERPOLATION DE STIRLING" par TOSIO UNO et YOSIHARU HASIMOTO (日本数学物理学会記事, 1934)
- (5) NUMERICAL METHODS IN FORTRAN, 1964. JOHN M. McCORMICK & MARIO G. SALVADOR.
- (6) INTERPOLATORY FUNCTION THEORY by J. M. WHITTAKER, M. A. 1964.
- (7) 計算機のための数値計算 (宇野利雄)
- (8) 数値解析セミナー報告(2), 数値解析研究所講究録17. 京都大学数理解析研究所講録刊行会 1966年11月
- (9) 数値計算法 (乗松立木)
- (10) 過剰情報の処理についての一注意 (日本数学会) 宇野利雄
- (11) 数値計算応用数学講座第7巻 (赤坂 隆)