

# Sur l'ensemble des transformations projectives normales dans l'espace projectif à dimension infinie

Par Jôyô Kanitani

## Résumé

Nous démontrons d'abord que, dans l'espace projectif  $S$  à dimension infinie, au changement d'un repère  $\mathfrak{U}$  (une base de  $S$  munie d'une famille  $\mathfrak{U}$  des points d'unité dont nous avons vérifié l'existence dans un article précédent) à un autre  $\mathfrak{U}'$ , il correspond une et une seule transformation projective  $T$ , et qu'un repère une fois donné, nous pouvons choisir, pour tout autre repère, une famille des points d'unité en telle sorte que les équations de la transformation  $T$  prennent une forme typique. Cet article est consacré à l'étude de l'ensemble de telles transformations: on démontre qu'il forme un groupe topologique, et qu'il contient un sous-groupe  $G$  qui conserve le cube projectif  $\mathfrak{G}(A_i, 1)$  et qui y opère comme un groupe d'homeomorphisme. L'ensemble des classes des vecteurs géométriques équivalents dans ce cube se note  $Y_i$ . En prenant  $G$  et  $Y_i$  pour le groupe structural et le fibre-type on peut construire l'espace fibré tangent à une variété différentiable dont les cartes locales sont des applications topologiques dans l'espace projectif à dimension infinie.

## § 1 Changement de repère

1. Etant donné un repère  $\mathfrak{U}$ , dans l'espace projectif à dimension infinie, considérons un autre  $\mathfrak{U}'$ . Soient  $p_j^i$  ( $i \in I$ ) les coordonnées normales des sommets  $A_j'$  de  $\mathfrak{U}'$  par rapport à  $\mathfrak{U}$ . Un point  $P$  de  $S$  est contenu dans un espace projectif à dimensions finies déterminé par une sous-famille finie de la base  $\mathfrak{U}$  (nous désignons une base par la même lettre que le repère homologue). Soient

$$S'(P) = A'_{j_0} \vee \dots \vee A'_{j_r}$$

l'espace à la moindre dimension de tels espaces projectifs ( $I$ , p. 5). Les coordonnées homogènes du point  $U'_{j_0 \dots j_r}$  associé à la sous-famille finie  $(A'_{j_0}, \dots, A'_{j_r})$  s'expriment sous la forme

$$\kappa^{j_0} A'_{j_0} + \dots + \kappa^{j_r} A'_{j_r}$$

Soient  $x^i$  ( $i \in I$ ) et  $x'^j$  ( $j \in J$ ) les coordonnées du point  $P$  par rapport respectivement aux repères  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{U}'$ . Comme nous l'avons remarqué dans l'article précédent ( $I$ , p. 7), on a

$$\rho x^i = x'^{j_0} \kappa^{j_0} p_{j_0}^i + \dots + x'^{j_r} \kappa^{j_r} p_{j_r}^i \quad (\rho \neq 0, i \in I).$$

Nous démontrons maintenant que nous pouvons faire toujours  $\kappa^j=1$  en choisissant convenablement la famille  $\mathcal{W}$  des points d'unité associée à la base  $\mathcal{W}$ .

Soit  $A'_\nu$  le plus petit élément de la base  $\mathcal{W}$  (on la donne un bon ordre appliquant le théorème de Zelmero). Lorsque la dite correspondance se trouve entre chaque sous-famille finie du segment  $[A'_\nu, A'_\beta]$  et le point homologue de  $\mathcal{W}$ , nous dirons que la relation  $R\{\beta\}$  est vraie. Il suffit alors de prouver que

$$(1.1) \quad (\beta \in J \text{ et } \forall \gamma (\gamma \in J \text{ et } \gamma < \beta) \Rightarrow R\{\gamma\}) \Rightarrow R\{\beta\}.$$

Supposons que la relation  $R\{\gamma\}$  est vraie lorsque  $A'_\gamma \in [A'_\nu, A'_\beta]$ . Conformément la loi de la formation de la famille  $\mathcal{W}$  (I, p. 3) nous prenons comme  $U'_{\nu\beta}$  le point  $p'_\nu + p'_\beta$ . Envisageons une sous-famille finie  $(A'_{j_0}, \dots, A'_{j_r}, A'_\beta)$  ( $A'_{j_0} < \dots < A'_{j_r} < A'_\beta$ ) du segment  $[A'_\nu, A'_\beta]$ . Lorsque  $A'_{j_0} = A'_\nu$ , d'après la loi de la formation de  $\mathcal{W}$ , on a

$$U'_{\nu j_0 \dots j_r \beta} = (A_\beta \vee U'_{\nu j_0 \dots j_r}) \cap (U'_{j_\beta} \vee A'_{j_1} \vee \dots \vee A'_{j_r}).$$

Or, puisque le point  $U'_{\nu j_0 \dots j_r}$  s'exprime sous la forme  $p'_\nu + p'_{j_1} + \dots + p'_{j_r}$  grâce à l'hypothèse de récurrence, un point sur la droite  $A_\beta \vee U_{\nu j_1 \dots j_r}$  s'écrit

$$p'_\nu + p'_{j_1} + \dots + p'_{j_r} + \tau^\beta p'_\beta$$

tandis qu'un point sur l'espace  $U'_{\nu\beta} \vee A'_{j_1} \vee \dots \vee A'_{j_r}$  s'écrit

$$\sigma^1 p'_{j_1} + \dots + \sigma^r p'_{j_r} + \gamma^\nu (p'_\nu + p'_\beta).$$

Pour que ces deux points soient en coïncidence, il faut et il suffit que

$$\sigma^1 = \dots = \sigma^r = \gamma^\nu, \quad \tau^\beta = \frac{\sigma^1}{\gamma^\nu} = 1.$$

Autrement dit le point  $U'_{\nu j_1 \dots j_r \beta}$  s'écrit

$$p'_\nu + p'_{j_1} + \dots + p'_{j_r} + p'_\beta.$$

Lorsque  $A'_{j_0} < A'_\nu$ , d'après ce que nous venons de remarquer, le point

$$U'_{\nu j_0 \dots j_r \beta} = (A'_\beta \vee U'_{\nu j_0 \dots j_r}) \cap (U'_{\nu\beta} \vee A'_{j_0} \vee \dots \vee A'_{j_r})$$

s'écrit  $p'_\nu + p'_{j_0} + \dots + p'_{j_r}$  et on a

$$U'_{j_0 \dots j_r \beta} = (A'_\nu \vee U'_{\nu j_0 \dots j_r \beta}) \cap (A'_{j_0} \vee A'_{j_1} \vee \dots \vee A'_{j_r} \vee A'_\beta)$$

Or, un point sur la droite  $A'_\nu \vee U'_{\nu j_0 \dots j_r \beta}$  s'écrit

$$\sigma^\nu p'_\nu + p'_{j_0} + \dots + p'_{j_r} + p'_\beta$$

tandis qu'un point sur  $A'_{j_0} \vee A'_{j_1} \vee \dots \vee A'_{j_r} \vee A'_\beta$  s'écrit

$$\sigma^0 p'_{j_0} + \dots + \sigma^r p'_{j_r} + \sigma^\beta p'_\beta.$$

Pour que ces deux points soient en coïncidence, il faut et il suffit que

$$\sigma^\nu = 0, \quad \sigma^0 = \dots = \sigma^r = \sigma^\beta.$$

Donc, le point  $U'_{j_0 \dots j_r \beta}$  s'exprime en tous cas sous la forme

$$p'_{j_0} + \dots + p'_{j_r} + p'_\beta,$$

c'est-à-dire, la relation  $R\{\beta\}$  est vraie.

Les équations du changement du repère  $\mathfrak{U}$  à  $\mathfrak{U}'$  s'écrivent donc

$$(1.2) \quad \rho x^i = \sum_j p_j^i x'^j \quad (i \in I, \quad \rho \neq 0, \quad \sum_i |p_j^i| = 1).$$

2. Par un raisonnement pareil on démontre qu'en choisissant convenablement les coordonnées homogènes  $p_j^i$  des sommets  $A'_j$  ( $j \in J$ ), on peut mettre les équations du changement  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}'$  sous la forme susdite sans modifier la famille  $\mathfrak{U}'$ . Convenons maintenant de dire que  $R\{\beta\}$  est vraie si, par un choix convenable des coordonnées homogènes  $p_j^i$ , on peut faire  $\kappa=1$  pour toute sous-famille finie du segment  $[A'_\nu, A'_\beta]$ . Il s'agit de prouver (1.1) sous cette convention. Or, le point  $U'_{\nu\beta}$  s'exprime sous la forme  $p'_\nu + \sigma^\beta p'_\beta$ . Donc, si l'on prend  $\sigma^\beta p'_\beta$  comme les coordonnées homogènes de  $A'_\beta$ , le point  $U'_{\nu\beta}$  s'écrit  $p'_\nu + p'_\beta$ .

De là, on peut déduire la relation  $R\{\beta\}$  comme tout à l'heure en utilisant l'hypothèse récurrence.

## § 2 Transformation projective attachée à un changement de repère

3. Théorème. Soient  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{U}'$  deux repères dont les sommets sont respectivement  $(A_i)$  ( $i \in I$ ) et  $(A'_j)$  ( $j \in J$ ). Il existe alors une et une seule transformation projective  $T$  qui possède les propriétés suivantes.

1° Pour chaque sommet  $A_i$  ( $i \in I$ ), l'image  $TA_i$  est en coïncidence avec un sommet  $A'_{j(i)}$  de telle sorte qu'en particulier,  $TA_i = A'_\nu$  ( $A_i$  est le plus petit élément de  $(A_i)$  ( $i \in I$ ), et que  $A_{i_1} < A_{i_2} \Rightarrow A'_{j(i_1)} < A'_{j(i_2)}$ , et enfin que l'ensemble  $\{TA_i\}$  ( $A_i \in [A_i, A_a]$ ) soit en coïncidence avec le segment  $[A'_\nu, A'_{j(a)}]$ .

2° Pour chaque sous-famille finie  $(A_{i_0}, \dots, A_{i_r})$  de la base  $\mathfrak{U}$ , on a

$$T(U_{i_0 \dots i_r}) = U'_{j(i_0) \dots j(i_r)},$$

où  $U_{i_0 \dots i_r}$  est le point d'unité associé à cette sous-famille.

Ou dit que cette transformation  $T$  est attachée au changement  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}'$ .

L'unicité de  $T$  est évidente d'après la théorie concernant l'espace projectif à dimensions finies. Nous allons maintenant prouver l'existence.

4. Lemme. Il existe une application  $f$  du repère  $\mathfrak{U}$  dans  $\mathfrak{U}'$ , jouissant les propriétés 1° et 2° où  $T=f$ .

Considérons une application  $f_\beta$  qui possède les propriétés suivantes.

(i)  $f_\beta$  fait correspondre, à chaque point  $A_i$  du segment  $[A_i, A_\beta]$  un sommet de  $\mathfrak{U}'$  de telle sorte qu'en particulier,  $f_\beta A_i = A'_\nu$ , que  $A_i \leq A_{i_1} < A_{i_2} \leq A_\beta \Rightarrow f_\beta A_{i_1} <$

$f_\beta A_{t_2}$ , que l'ensemble  $\{f_\beta A_t\}$  ( $A_t \in [A_i, A_a]$ ,  $A_a \in [A_i, A_\beta]$ ) soit en coïncidence avec le segment  $[A'_y, f_\beta A_a]$  de  $\mathcal{W}'$ , et que

$$A_t \leq A_{\beta'} < A_\beta \Rightarrow f_{\beta'} A_t = f_\beta A_t$$

(ii)  $f_\beta$  fait correspondre, au point d'unité associé à une sous-famille finie  $(A_{t_0}, \dots, A_{t_r})$  de  $\mathcal{W}$ , le point d'unité associé à  $(f_\beta A_{t_0}, \dots, f_\beta A_{t_r})$ .

Convenons maintenant de dire que  $R\{\beta\}$  est vraie lorsqu'une telle application existe. La démonstration se réduit alors à prouver que

$$(A_\beta \in \mathcal{W} \text{ et } \forall A_r (A_r \in \mathcal{W} \text{ et } A_r < A_\beta) \Rightarrow R\{\gamma\}) \Rightarrow R\{\beta\}.$$

Or, si l'on considère l'ensemble

$$\mathfrak{B} = \mathcal{W}' - \mathfrak{Q}, (\mathfrak{Q} = \bigcup_i \{f_\gamma A_i\} \text{ } (A_i \in [A_i, A_\gamma], A_\gamma \in [A_i, A_\beta[),$$

en supposant que la relation  $R\{\gamma\}$  ( $A_i \leq A_r < A_\beta$ ) est vraie, comme  $\mathfrak{Q}$  est bien ordonné d'après la propriété (i) de  $f_\gamma$ ,  $\mathfrak{B}$  est une partie de  $\mathcal{W}'$  et admet le plus petit élément  $A'_b$ . Pour tout point  $A'_j \in \mathfrak{Q}$  on a  $A'_j < A'_b$ . car sinon,  $\mathcal{W}'$  étant bien ordonné et le point  $A'_j$  étant différent de  $A'_b$ , on aurait  $A'_b < A'_j$  et, par suite,  $A'_b \in [A'_y, A'_j]$ , ce qui entraîne, grâce à la propriété (i) de  $f_\gamma$ ,  $A'_b \in \mathfrak{Q}$  contrairement à l'hypothèse. On a donc

$$\mathfrak{Q} \cup \{A'_b\} = [A'_y, A'_b].$$

Maintenant en posant

$$f_\beta A_t = f_\gamma A_t \text{ } (A_t \leq A_r < A_\beta), \quad f_\beta A_\beta = A'_b,$$

on obtient l'application  $f_\beta$  qui possède la propriété (i).

Posons ensuite

$$f_\beta U_{t_0 \dots t_r} = f_\gamma U_{t_0 \dots t_r} \quad (A_{t_0} < \dots < A_{t_r} \leq A_r < A_\beta),$$

$$f_\beta U_{t_\beta} = U'_{y_b}.$$

Nous obtenons alors

$$f_\beta U_{t_0 \dots t_\beta} = U'_{j(t_0) \dots b},$$

puisque le repère

$$[A'_{j(t_0)}, \dots, A'_{j(t_r)}, A'_b; U'_{j(t_0) \dots j(t_r) b}]$$

est complet (I, p. 3), à savoir, l'application  $f_\beta$  possède aussi la propriété (ii). La relation  $R\{\beta\}$  est ainsi vraie.

5. La vérification du théorème est maintenant immédiate. Si l'ensemble  $\{f A_t\}$  ( $i \in I$ ) n'est pas en coïncidence avec  $\mathcal{W}'$ , l'ensemble  $\mathcal{W}' - \{f A_t\}$  ( $t \in I$ ) admet le plus petit élément  $A'_b$  et on a  $\{f A_t\} \cup \{A'_b\} = [A'_y, A'_b]$ . Il faut donc,  $I \subset J$ . De même, en considérant l'application de  $\mathcal{W}'$  dans  $\mathcal{W}$ , on conclut  $J \subset I$ . Il vient donc  $I = J$ ,  $\mathcal{W}' = \{f A_t\}$  ( $i \in I$ ). Prolongeons maintenant  $f$  à l'application  $S \rightarrow S$  de la manière suivante. Prenons un point  $P \in S$ . Soient

$$S(P) = A_{t_0} \vee \dots \vee A_{t_r},$$

et  $x^{t_0}, \dots, x^{t_r}$  les coordonnées de ce point par rapport au repère  $[A_{t_0}, \dots, A_{t_r}; U_{t_0}$

... $t_r$ ]. Prenons comme l'image  $fP$  le point  $P'$  qui a  $x^{t_0}, \dots, x^{t_r}$  pour les coordonnées par rapport au repère  $[fA_{t_0}, \dots, fA_{t_r}; fU_{t_0} \dots t_r]$  (les autres  $x^{t'}$  sont tous nuls). L'application  $f$  ainsi prolongée devient la transformation projective  $T$  attachée au changement  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}'$ .

### § 3 Transformations projectives normales

6. D'après ce que nous avons remarqué plus haut, en écrivant  $A'_i$  à la place de  $A'_{j(t_i)} = TA_{t_i}$ , nous obtenons  $\mathfrak{U}' = (A'_i) (i \in I)$ . Ceci fait, comme nous l'avons remarqué au n° 2, les coordonnées du point  $U'_{t_i}$  s'écrivent  $p^t_i + p^j_i$  par un choix convenable des coordonnées homogènes des sommets  $A'_j$  par rapport à  $\mathfrak{U}$  de sorte que les équations du changement de  $\mathfrak{U}$  à  $\mathfrak{U}'$  s'expriment sous la forme (1.1). Si l'on choisit la famille  $\mathfrak{U}$  des points d'unité de la manière mentionnée au n° 1, les équations de ce changement s'écrivent sous la forme (1.1) où les  $p^t_j$  sont les coordonnées normales des sommets  $A'_j$ . Par conséquent, si l'on regarde  $(x^t)$  et  $(x'^t)$  respectivement comme les coordonnées de  $P$  et  $TP$  par rapport à  $\mathfrak{U}$ , les équations de la transformation projective  $T$  attachée à ce changement deviennent

$$(6.1) \quad \rho x'^t = \sum_j p^t_j x^j \quad (\rho \neq 0, i \in I, \sum_i p^t_i = 1).$$

Dans ce cas nous dirons que la transformation projective  $T$  est normale. S'il est convenu de prendre comme  $x^t$  et  $x'^t$  les coordonnées normales de  $P$  et  $TP$ , la valeur du facteur commun  $\rho$  est uniquement déterminée une fois que le point  $P$  soit donné. En particulier,  $p^t_i$  étant les coordonnées normales du point  $A'_i = TA_{t_i}$ , on a

$$(6.2) \quad \rho(A_{t_i}) = 1 \quad (i \in I).$$

7. Il suit du raisonnement des n°s précédents que si l'on choisit convenablement les coordonnées homogènes  $q^j_i (i \in I)$  des sommets  $A_i$  de  $\mathfrak{U}$  par rapport au repère  $\mathfrak{U}'$ , la transformation projective  $\tilde{T}$  attachée au changement du repère  $\mathfrak{U}'$  à  $\mathfrak{U}$  qui fait correspondre au sommet  $A'_i$  de  $\mathfrak{U}'$  le point  $A_i$  et au point d'unité  $U'_{t_i}$  le point  $U_{t_i} = T^{-1}U'_{t_i}$ , est représentée par

$$(7.1) \quad \tau x^j = \sum_i q^j_i x'^t,$$

où  $(x'^t)$  et  $(x^j)$  sont les coordonnées homogènes des points courants  $Q$  et  $\tilde{T}Q$  par rapport à  $\mathfrak{U}'$ . Grâce à l'unicité d'une telle transformation projective, il vient  $\tilde{T} = T^{-1}$ .

Les coordonnées homogènes  $q^j_i$  des sommets  $A_i$  étant ainsi définies, on peut déterminer uniquement la valeur commune  $\tau$  par donner le point  $Q$ , pourvu qu'on convienne de prendre comme  $x'^t$  et  $x^j$  les coordonnées normales de  $Q$  et  $\tilde{T}Q$ . De

plus, nous pouvons multiplier un facteur commun à toutes les coordonnées  $q_i^j$  ( $i, j \in I$ ) sans changer la forme des équations (7.1).

La transformation (7.1), suivie par la transformation (6.1), donne

$$\gamma x''^j = \sum_m p_m^i q_j^m x'^j$$

qui doit être une identité, c'est-à-dire,  $x''^i = x'^i$  si l'on choisi convenablement le facteur commun  $\gamma \neq 0$ . En y faisant  $Q = A'_h$ , on obtient

$$\sum_m p_m^i q_h^m = 0 \quad (i \neq h), \quad \sum_m p_m^h q_h^m \neq 0.$$

Si l'on fait  $Q = U'_{ih}$ , il vient  $x'^i = x'^h$ ,

$$\gamma x'^i = \sum_m p_m^i q_j^m x'^j = \sum_m p_m^i q_i^m x'^i$$

$$\gamma x'^h = \sum_m p_m^h q_j^m x'^j = \sum_m p_m^h q_h^m x'^h$$

d'où

$$\sum_m p_m^i q_i^m = \sum_m p_m^h q_h^m.$$

Ainsi, en multipliant un facteur commun à toutes les coordonnées  $q_i^j$ , on obtient

$$(7.2) \quad \sum_m p_m^i q_h^m = \delta_h^i.$$

Donc, si l'on normalise les coordonnées des points  $T^{-1}Q$ ,  $Q(=TT^{-1}Q)$ ,  $\tilde{T}Q$ , il vient

$$\tau(Q) \quad \rho(T^{-1}Q) \quad x'^i = x'^i,$$

c'est-à-dire,

$$(7.3) \quad \tau(Q) \quad \rho(T^{-1}Q) = 1,$$

ce qui nous donne, si l'on y fait  $Q = A'_i$  ( $=TA_i$ ),

$$(7.4) \quad \tau(A'_i) = 1,$$

grâce à (6.2). Donc, d'après (7.1), les  $q_i^j$  ( $=q_i^j / \tau(A'_i)$ ) sont les coordonnées normales du point  $A_i = T^{-1}A'_i$  par rapport à  $\mathcal{U}$ . Autrement dit, l'inverse d'une transformation projective normale est aussi normale.

Ensuite, si l'on normalise les coordonnées des points  $P$ ,  $TP$ ,  $T^{-1}(TP) = P$ , la transformation (6.1), suivie par la transformation (7.1) donne

$$\rho(P) \quad \tau(TP) \quad x^j = \sum_{i,m} q_i^j p_i^m x^m.$$

Si l'on y fait  $P = A_i$ , il vient, grâce à (6.2) et (7.4),

$$(7.5) \quad \sum_i q_i^j p_i^i = \delta_k^j.$$

8. On démontre de même que la composée de deux transformations projectives normales est aussi normale. Supposons que les transformations projectives  $T$  et  $T'$  attachées respectivement aux changements  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}'$  et  $\mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}''$  sont normales, et que la première est définie par (6.1) et la deuxième par

$$\rho' x'^i = \sum_j r'_j{}^i x^j.$$

Alors la composée

$$(8.1) \quad T' \circ T : \sigma x''^i = \sum_{t,m} r'_t{}^i p_m{}^t x^m$$

est la transformations projective attachée au changement  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}''$  qui fait correspondre, aux points  $A_t$  et  $U_{it}$ , respectivement les points  $A''_i$  et  $U''_{it}$ .

Supposons que l'inverse  $\tilde{T}$  de cette transformation est donnée par (7.1), à savoir, que les  $q_j^i$  ( $j \in I$ ) sont les coordonnées choisies de la manière mentionnée au n°2 du sommet  $A_i$  de  $\mathfrak{U}$  par rapport à  $\mathfrak{U}''$ . La transformation

$$\tilde{T} \circ T' \circ T : \gamma x'''^i = \sum_{t,m,n} q_t^i r'_m{}^t p_n{}^m x^n$$

étant alors une identité, par la multiplication d'un facteur commun à toutes les coordonnées  $q_t^j$ , on peut déduire

$$\sum_{t,m} q_t^i r'_m{}^t p_h{}^m = \delta_h^i,$$

d'après le raisonnement mentionné plus haut, et par suite

$$(8.2) \quad \rho(P) \rho'(TP) \tau(\tilde{T}(TP)) = 1,$$

en particulier,

$$\rho(A_h) \rho'(A'_h) \tau(A''_h) = 1.$$

Or, puisque les transformations  $T$  et  $T'$  sont normales on a  $\rho(A_h) = 1$ ,  $\rho'(A'_h) = 1$ .

Il vient donc  $\tau(A''_h) = 1$ , ce qui nous montre que la transformation  $\tilde{T}$  et, par suite, la transformation  $(T' \circ T) = \tilde{T}^{-1}$  sont normales.

Nous voyons ainsi que l'ensemble des transformations projectives normales forme un groupe  $\mathfrak{G}$ .

D'ailleurs, d'après (7.5), (8.1), (8.2), on a

$$\sigma(A_h) = \frac{1}{\tau(A''_h)} = \rho(A) \rho'(A'_h) = 1.$$

C'est à dire que les  $\sum_t r'_t{}^i p_h{}^t$  ( $i \in I$ ) sont les coordonnées normales du point  $A''_h$  par rapport au repère  $\mathfrak{U}$ .

9. En prenant d'abord un repère  $\mathfrak{U}_0$ , nous conviendrons de choisir dorénavant les familles  $\mathfrak{U}$  des points d'unité pour les autres repères de telle sorte qu'ils soient, avec  $\mathfrak{U}_0$ , en rapport mentionné au n° 1. Alors, toute transformation projective attachée à un changement d'un repère  $\mathfrak{U}$  à un autre  $\mathfrak{U}'$  deviendra normale. En effet, si l'on désigne par  $T$ ,  $T'$ ,  $\tilde{T}$  les transformations projectives attachées resp-

ectivement aux changements  $\mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ , la composée  $\tilde{T} \circ T$  devient la transformation projective attachée au changement  $\mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}'$  et, par suite, on a, grâce à l'unicité d'une telle transformation,  $\tilde{T} \circ T = T'$ , c'est-à-dire,  $\tilde{T} = T' \circ T^{-1}$ . Les transformations  $T$  et  $T'$  étant normales, il résulte de là que la transformation  $\tilde{T}$  est aussi normale.

#### § 4 Opérations des transformations projectives normales sur le cube projectif $\mathfrak{E}(A, 1)$

10. Soit  $a$  un point de  $S$  tel que

$$S(a) = A_{h_0} \vee \dots \vee A_{h_l}$$

Pour chaque  $h_\sigma$  ( $\sigma=0, \dots, l$ ) les indices  $i$  tel que  $p_{h_\sigma}^i \neq 0$  sont de nombre fini. Soit  $(u_0, \dots, u_r)$  l'ensemble des tels indices  $i$ . Les  $r+1$  nombres

$$\sum_j p_j^{u_\lambda} a^j \quad (\lambda=0, 1, \dots, r)$$

contiennent au moins un nombre différent de zéro, car sinon, tous les  $a^{h_\sigma}$  ( $\sigma=0, \dots, l$ ) n'étant pas nuls, la matrice  $(p_{h_\sigma}^{u_\lambda})$  serait du rang moindre que  $l+1$  contrairement à l'égalité

$$\left| \begin{pmatrix} q_{u_0}^{h_0} & \dots & q_{u_r}^{h_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{u_0}^{h_l} & \dots & q_{u_r}^{h_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{h_0}^{u_0} & \dots & p_{h_l}^{u_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{h_0}^{u_r} & \dots & p_{h_l}^{u_r} \end{pmatrix} \right| = 1$$

qui s'obtient comme conséquence de (7.4).

Soit  $M$  le plus petit nombre de  $|a^{h_\sigma}|$ ,  $|\sum_j p_j^{u_\lambda} a^j|$  ( $\sigma=0, \dots, l$ ;  $i \in I$ ). En prenant un nombre  $\delta$  tel que

$$(10.1) \quad 0 < \delta < \frac{M}{4(1+l)},$$

considérons le cube projectif  $\mathfrak{E}(a, \delta)$ . Pour un point quelconque  $x \in \mathfrak{E}(a, \delta)$ , on a

$$a^i - \delta < x^i < a^i + \delta$$

et, grâce à (10.1), tout membre de ces inégalités est positif ou négatif selon que  $a^i \geq 0$ . Donc, l'ensemble  $(k_0, \dots, k_m)$  des indices  $i$  tels que  $x^i \neq 0$  contient l'ensemble  $(h_0, \dots, h_l)$ . Soient  $(f_1, \dots, f_{m-l})$  le complément du dernier ensemble dans le premier. On a aussi

$$|a^{h_\sigma} - \delta| < |x^{h_\sigma}| < |a^{h_\sigma}| + \delta$$

d'où, par la sommation étendue de 0 à  $l$  par rapport à  $\sigma$ ,

$$1 - (1+l)\delta < 1 - \sum_{s=1}^{m-l} |x^{f_s}|,$$

c'est-à-dire,



$$(10.2) \quad 0 \leq \sum_{s=1}^{m-l} |x^f s| < (1+l)\delta.$$

11. Reprenons la transformation projective normale  $T$  définie par (6.1). De l'inégalité

$$|p_j^t x^j - p_j^t a^j| < |p_j^t| \delta,$$

on tire

$$\sum_{\sigma=0}^l p_{h\sigma}^t a^{h\sigma} - \sum_{\sigma=0}^l |p_{h\sigma}^t| \delta < \sum_{\tau=0}^m p_{k\tau}^t x^{k\tau} - \sum_{s=1}^{m-l} p_{fs}^t x^f s < \sum_{\sigma=0}^l p_{h\sigma}^t a^{h\sigma} + |p_{h\sigma}^t| \delta.$$

Or on a, en vertu de (10.2),

$$\left| \sum_{s=1}^{m-l} p_{fs}^t x^f s \right| \leq \sum_{s=1}^{m-l} |p_{fs}^t| |x^f s| \leq \sum_{s=1}^{m-l} |x^f s| \leq (1+l)\delta.$$

Il vient donc

$$(11.1) \quad \sum_j p_j^t a^j - 2(1+l)\delta < \sum_j p_j^t x^j < \sum_j p_j^t a^j + 2(1+l)\delta$$

et, grâce à (10.1), tout membre de ces inégalités est positif ou négatif selon que  $\sum_j p_j^t a^j \geq 0$ . Il en est de même pour les inégalités

$$\begin{aligned} \sum_j p_j^t a^j - \sum_{\sigma=0}^l |p_{h\sigma}^t| \delta - \sum_{s=1}^{m-l} |p_{fs}^t| |x^f s| &< \sum_j p_j^t x^j \\ &< \sum_j p_j^t a^j + \sum_{\sigma=0}^l |p_{h\sigma}^t| \delta + \sum_{s=1}^{m-l} |p_{fs}^t| |x^f s| \end{aligned}$$

de sorte que ces inégalités sont vérifiées même quand on y remplace

$\sum_j p_j^t a^j$  et  $\sum_j p_j^t x^j$  par  $|\sum_j p_j^t a^j|$  et  $|\sum_j p_j^t x^j|$ . Sommons par rapport à  $i$  dans les inégalités ainsi obtenues. Il vient alors

$$|\rho(a)| - 2(1+l)\delta < |\rho(x)| < |\rho(a)| + 2(1+l)\delta.$$

En tenant compte de ces inégalités, on déduit de (11.1)

$$\frac{\sum_j p_j^t a^j - 2(1+l)\delta}{|\rho(a)| + 2(1+l)\delta} < \frac{\sum_j p_j^t x^j}{|\rho(x)|} < \frac{\sum_j p_j^t a^j + 2(1+l)\delta}{|\rho(a)| - 2(1+l)\delta}$$

ou

$$\frac{\sum_j p_j^t a^j - 2(1+l)\delta}{|\rho(a)| - 2(1+l)\delta} < \frac{\sum_j p_j^t x^j}{|\rho(x)|} < \frac{\sum_j p_j^t a^j + 2(1+l)\delta}{|\rho(a)| + 2(1+l)\delta}$$

selon que  $\sum_j p_j^t a^j \geq 0$ . En tous cas, il résulte de là que

$$(11.2) \quad \left| \frac{\sum_j p_j^t x^j}{|\rho(x)|} - \frac{\sum_j p_j^t a^j}{|\rho(a)|} \right| < \frac{4(1+l)\delta}{|\rho(a)| - 2(1+l)\delta} < \frac{8(1+l)\delta}{|\rho(a)|}.$$

car par définition  $|\rho(a)| > M$  et, par suite,

$$2(1+l)\delta < \frac{1}{2} |\rho(a)|.$$

12. Lorsque  $\sum_j p_j^i a^j \neq 0$ , on a, en vertu de (10.1), (11.1),  $\sum_j p_j^i x^j \neq 0$  et  $\sum_j p_j^i x^j \geq 0$  selon que  $\sum_j p_j^i a^j \geq 0$ . En particulier, si  $a^i \neq 0$ , on a  $x^i \neq 0$ . D'ailleurs, ces deux nombres sont positifs par la convention faite au n° 6 de l'article précédent (I, p. 5).

Donc, dans ce cas,  $\rho(a)$  et  $\rho(x)$  sont du même signe de sorte que l'inégalité (11.2) devient

$$|x^i - a^i| < \frac{8(1+l)\delta}{|\rho(a)|},$$

ce qui nous montre que la transformation  $T$  est continue dans le domaine  $T^{-1}\mathbb{G}_i$  ( $\mathbb{G}_i \equiv \mathbb{G}(A_i, 1)$ ).

La transformation projective normale telle que  $T^{-1}\mathbb{G}_i = \mathbb{G}_i$  opère sur  $\mathbb{G}_i$  comme un homéomorphisme. On a, dans ce cas,  $q_j^i = 0$  ( $j \in I - \{i\}$ ). Il en suit, en vertu de  $\sum_i q_i^i p_i^i = \delta_i^i$  ( $i \in I$ ),

$$p_i^i > 0, \quad q_i^i > 0, \quad p_i^i q_i^i = 1, \quad p_j^i = 0 \quad (j \in I - \{i\}).$$

Si l'on introduit les coordonnées non-homogènes

$$\xi^i = \frac{x^i}{x^i},$$

cette transformation  $T$  s'exprime par

$$p_i^i \xi^i = p_i^i + \sum_j p_j^i \xi^j \quad (i, j \in I - \{i\}).$$

Ensemble  $G$  des telles transformations projectives normales forme un sous-groupe de  $\mathbb{G}$ .

Dans  $\mathbb{G}_i$ , un couple de deux points  $(P, Q)$  s'appelle vecteur géométrique d'origine  $P$  et d'extrémité  $Q$ . Les deux vecteurs géométriques  $(P, Q)$  et  $(P', Q')$  sont dits parallèles lorsque les droites  $P \vee Q$  et  $P' \vee Q'$  se coupent en un point de la frontière de  $\mathbb{G}_i$ . Les deux vecteurs géométriques  $(P(\xi^i), Q(\eta^i))$  et  $(P(\xi'^i), Q'(\eta'^i))$  sont regardés équivalents lorsque  $\eta^i - \xi^i = \eta'^i - \xi'^i$  ( $i \in I - \{i\}$ ). L'ensemble  $Y_i$  des classes de cette équivalence forme un espace vectoriel usuel, chaque classe étant représentée par un vecteur géométrique dont l'origine est le point  $A_i$ .

## § 5 Groupe topologique des transformations projectives normales.

13. Nous induisons sur l'ensemble des transformations projectives normales la topologie de l'ensemble produit

$$E = \prod_{j \in I} S_j \quad (S_j = S \quad (j \in I))$$

qui est, par définition, la moins fine des topologies pour lesquelles toutes les fo-

ctions coordonnées sont continues dans  $E$  (II, p. 61). D'une manière précise, un ensemble quelconque de  $E$  est une réunion des ensembles ouverts de la forme

$$(13.1) \quad \bigcap_{j \in I} U_j,$$

où  $U_j = S_j$  sauf pour un nombre fini d'indices  $j$ , soit  $(j_1, \dots, j_e)$  et

$$U_{j_s} = \mathcal{C}(a_{j_s}, \varepsilon) \quad (a_{j_s} \in S_{j_s}, \quad (s=1, \dots, e)).$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, la composée  $C = B \circ A$  des transformations projectives normales

$$A: \alpha x'^t = \sum_j a_j^t x^j,$$

$$B: \beta x'^t = \sum_j b_j^t x^j$$

est aussi normale et elle est définie par

$$C: \gamma x'^t = \sum_j c_j^t x^j \quad (c_j^t = \sum_i b_i^t a_j^i).$$

Supposons maintenant qu'un voisinage ouvert de  $C$  est donné par (13.1) où les  $a_j^t$  sont remplacés par  $c_j^t$ .

Pour chaque  $j_s$  ( $1 \leq s \leq e$ ) on a  $a_{j_s}^t = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices  $i$ . La réunion des ensembles des indices  $i$  tels que  $a_{j_s}^t \neq 0$  ( $s=1, \dots, e$ ) se note  $(h_1, \dots, h_f)$ . On a encore, pour chaque  $h_t$  ( $1 \leq t \leq f$ ),  $b_{j_s}^t = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices  $i$ . La réunion des ensembles des indices  $i$  tels que  $b_{h_t}^t \neq 0$  ( $t=1, \dots, f$ ) se note  $(k_1, \dots, k_g)$ .

Soit  $M$  le nombre le plus petit de  $|a_{j_s}^t| \neq 0$ ,  $|b_{h_t}^t| \neq 0$ ,  $|\sum_k b_k^t a_{j_s}^k| \neq 0$  et soit  $\delta$  un nombre tel que

$$0 < \delta < \frac{M}{5g}.$$

Prenons un voisinage ouvert de  $A$  défini par (13.1) où  $\varepsilon$  est remplacé par  $\delta$ . Au moyen des points

$$\xi_j \in U_j \quad (j \in I)$$

on peut définir une transformation projective normale

$$X: \rho x'^t = \sum_j \xi_j^t x^j$$

Comme nous l'avons remarqué au n° 10, puisque  $1 \leq e \leq f \leq g$  d'après définition, l'inégalité

$$a_{j_s}^t - \delta < \xi_{j_s}^t < a_{j_s}^t + \delta \quad (s=1, \dots, e)$$

donne

$$(13.2) \quad 0 \leq \sum_i |\xi_{j_s}^i| < g\delta,$$

où la sommation est étendue aux indices  $\bar{i}$  tels que  $a_{js}^{\bar{i}} = 0$ .

On a encore comme (11.1)

$$(13.3) \quad \sum_k b_k^t a_{js}^k - 2g\delta < \sum_k b_k^t \xi_{js}^k < \sum_k b_k^t a_{js}^k + 2g\delta.$$

Prenons ensuite un voisinage ouvert de  $B$ , défini par (13.1) où  $a_{js}$  et  $\varepsilon$  sont remplacés respectivement par  $b_{k_t}$  et  $\delta$ . Au moyen des points

$$\eta_j \in U_j \quad (j \in I)$$

on peut définir une transformation projective normale

$$Y: \rho x'^t = \sum_j \eta_j^t x^j$$

et, par suite, la composée

$$Z = Y \circ X: \rho x'^t = \sum_j \zeta_j^t x^j \quad (\zeta_j^t = \sum_i \eta_i^t \xi_j^i).$$

On a

$$(13.4) \quad 0 < \sum_i |\eta_{h_t}^{\bar{i}}| < g\delta,$$

où la sommation est étendue aux indices  $\bar{i}$  tels que  $b_{h_t}^{\bar{i}} = 0$ .

En tenant compte de (13.2) et (13.3), des inégalités

$$\begin{aligned} |\eta_{h_t}^t \xi_{js}^{h_t} - b_{h_t}^t \xi_{js}^{h_t}| &< |\xi_{js}^{h_t}| \delta, \\ |\eta_t^t \xi_{js}^t - b_t^t \xi_{js}^t| &< 2 |\xi_{js}^t| \end{aligned}$$

on déduit

$$\sum_k b_k^t a_{js}^k - 5g\delta < \sum_k \eta_k^t \xi_{js}^k < \sum_k b_k^t a_{js}^k + 5g\delta.$$

Nous pouvons ainsi choisir  $\delta$  en sorte que la transformation  $Y \circ X$  se trouve dans le voisinage ouvert de  $C$  préalablement donné.

14. Nous démontrons enfin que l'opération de groupe  $g \rightarrow g^{-1}$  ( $g \in \mathbb{G}$ ) est continue. Supposons que  $B = A^{-1}$  de sorte qu'on a

$$(14.1) \quad \sum_i b_i^t a_j^t = \sum_i a_i^t b_j^t = \delta_j^t,$$

et qu'un voisinage ouvert de  $B$  est donné par (13.1) où les  $a_j^t$  sont remplacés par  $b_j^t$ . Soient  $(h_1, \dots, h_r)$  la réunion des ensembles des indices  $i$  tels que  $b_{js}^t \neq 0$  ( $s = 1, \dots, e$ );  $(k_1, \dots, k_p)$  celle des ensembles des indices  $i$  tels que  $a_{h_t}^t \neq 0$  ( $t = 1, \dots, f$ );  $M$  le nombre le plus petit de  $|b_{js}^t| \neq 0$ ,  $|a_{h_t}^t| \neq 0$ ;  $\delta$  un nombre tel que

$$0 < \delta < \frac{M}{2g}.$$

Prenons un voisinage ouvert de  $A$ , défini par (13.1) où  $a_{js}$  et  $\varepsilon$  sont remplacés respectivement par  $a_{h_t}$  et  $\delta$ . Au moyen des points

$$\xi_j \in U_j \quad (j \in I)$$

on peut définir une transformation projective normale

$$X: \rho x'^i = \sum_j \xi_j^i x^j,$$

et on a

$$(14.2) \quad 0 < \sum_i |\xi_{h_i}^{\bar{i}}| < g\delta,$$

où la sommation est étendue aux indices  $\bar{i}$  tels que  $a_{h_i}^{\bar{i}} = 0$ . Soient

$$Y: \rho x'^i = \sum_j \eta_j^i x^j$$

l'inverse de  $X$  de sorte qu'il vient

$$(14.3) \quad \sum_i \eta_i^t \xi_j^i = \sum_i \xi_i^t \eta_j^i = \delta_j^t.$$

On a

$$|\xi_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i - a_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i| < |\eta_{k_u}^i| \delta,$$

c'est-à-dire,

$$a_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i - |\eta_{k_u}^i| \delta < \xi_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i < a_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i + |\eta_{k_u}^i| \delta.$$

Sommons par rapport à  $k_1, \dots, k_g$  en tenant compte des relations

$$\begin{aligned} \left| \sum_i a_{h_i}^i b_i^t - \sum_{u=1}^g \xi_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i \right| &= \left| \sum_i \xi_{h_i}^i \eta_i^t - \sum_{u=1}^g \xi_{h_i}^{k_u} \eta_{k_u}^i \right| \\ &< \left| \sum_i \xi_{h_i}^{\bar{i}} \eta_i^t \right| < \sum_i |\xi_{h_i}^{\bar{i}}| < g\delta \end{aligned}$$

qui s'obtiennent grâce à (14.1), (14.2), (14.3). Nous obtenons

$$a_{h_i}^i \eta_i^t - 2g\delta < \sum_i a_{h_i}^i b_i^t < a_{h_i}^i \eta_i^t + 2g\delta$$

d'où

$$-2g\delta < \left| \sum_i a_{h_i}^i (b_i^t - \eta_i^t) \right| < 2g\delta$$

et, par suite,

$$|b_{j_s}^{h_i} a_{h_i}^i (\eta_i^t - b_i^t)| < 2g |b_{j_s}^{h_i}| \delta.$$

Sommons par rapport à  $h_1, \dots, h_f$ . Il vient

$$|\eta_{j_s}^t - b_{j_s}^t| < 2g\delta$$

ce qui nous montre qu'on peut choisir  $\delta$  de manière à avoir

$$\eta_{j_s} \in \mathcal{U}(b_{j_s}, \varepsilon),$$

et ceci achève la démonstration.

Dans un article précédent (I) nous avons décrit comment peut-on généraliser la notion de l'espace vectoriel tangent  $T(x)$  pour une variété différentiable  $M$  dont les cartes locales sont des applications topologiques dans l'espace projectif à dimension infinie. D'après ce que nous avons vérifié jusqu'ici, nous pouvons donn-

er à la réunion

$$\bigcup_{x \in M} T(x)$$

une structure d'espace fibré, de base  $M$ , de fibre-type  $Y$ , et de groupe structural  $G$ .

#### Références

- I. J. Kanitani, Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infinie. Research Bulletin, Meisei Univ. (Hino-City, Tokyo, Japan), No. 5 (Science and Engineering), 1970, pp. 1—13.
- II. N. Bourbaki, Elément de Mathématiques, Première Partie, Livre III, Chapitre I.
- III. N. Bourbaki, Eléments de Mathématiques- Première Partie, Livre II, Chapitre III.
- IV. N. Steenrod, The topology of fibre bundles.
- V. A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.
- VI. O. Veblen and J. W. Young, Projective geometry.
- VII. E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.