一様な球の外側に別の物質より成る一様な球殻がある場合の熱伝導

小　平　吉　男

Conduction of Heat in a Sphere Composed of a Uniform Sphere and a Uniform Spherical Shell of Different Material

Yoshio Kodaira

著者は二つの部分から成る絃の横振動及び二つの部分より成る板の熱伝導の問題を解いたが，同一の方法を二つの部分から成る球の熱伝導の問題に応用したので，その結果をここに発表する。

I　微分方程式と境界条件

半径のなる球が二つの部分から成っているとする。即ち半径 a_1 の球は一様な物質から成り，その外側半径 a_1 から半径 a までの間は，半径 a_1 の球の物質とは異なるが，然し一様な物質から成る球殻であるとする。

球の温度には球の半径 r のみに関係しているとすれば，球の二つの部分に対して熱伝導の微分方程式は

$$\frac{\partial (ru_1)}{\partial t}=\kappa_1{}^2\frac{\partial^2 (ru_1)}{\partial r^2}, \qquad [0<r<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial (ru_2)}{\partial t}=\kappa_2{}^2\frac{\partial^2 (ru_2)}{\partial r^2}, \qquad [a_1<r<a] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

のように書くことが出来る。脚符 1 は半径 a なる球に対し，2 なる脚符は外の球殻に対して用いてある。

中の球と外の球殻の境界面 $r=a_1$ においては

$$(u_1)_{r=a_1}=(u_2)_{r=a_1}, \qquad k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a_1}=k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a_1} \qquad \cdots\cdots(3),\ (4)$$

---

* Y. Kodaira: Conduction of Heat in an infinite Solid made of Two Different Parts. Gerophys. Mag. Vol. 21, 217-219, 1590.

Y. Kodaira: Vibration of a String made of Two Different Parts when a Special Condition exists between the Velocities of Propagation and the Lengths of the Different Parts. Geophys. Mag. Vol. 21, 214-216, 1950.

小平吉男：相異なる二つの物質の部分より成る半無限固体の熱伝導　明星大学研究紀要　理工学部　第1号　25-31, 1965.

小平吉男：二つの相異なる部分より成る絃の振動解に対する注意　明星大学研究紀要　理工学部　第2号　21-26, 1966.

なる境界条件が成立するとする。

$r=a$ における境界条件としては次の三つの場合を考える：

$$(u_2)_{r=a}=0,\qquad \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a}=0,\qquad \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}-hu_2\right)_{r=a}=0. \qquad (5),\ (6),\ (7)$$

(7)の条件は所謂 Newton の輻射の法則を表わし，h は定数である。

初期条件は次のように与えられるとする：

$$(u_1)_{t=0}=f_1(r),\qquad (u_2)_{t=0}=f_2(r). \qquad \cdots\cdots(8),\ (9)$$

II 球面の温度が 0 の場合

この場合に先づ解を求めることとしよう。$v=ru$ と置くときは，この場合には次の微分方程式及び諸条件を満足する解を求めればよいことになる：

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=\kappa_1^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2},\ [0<r<a_1],\qquad \frac{\partial v_2}{\partial t}=\kappa_2^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2},\ [a_1<r<a] \qquad \cdots\cdots(10),\ (11)$$

$$(v_1)_{r=0}=0,\qquad (v_2)_{r=a}=0, \qquad \cdots\cdots(12),\ (13)$$

$$(v_1)_{r=a_1}=(v_2)_{r=a_1}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$k_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial r}\right)-\left(\frac{v_1}{r}\right)_{r=a_1}=k_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)_{r=a_1}-\left(\frac{v_2}{\partial r}\right)_{r=a_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$(v_1)_{t=0}=rf_1(r),\qquad (v_2)_{t=0}=rf_2(r). \qquad \cdots\cdots(16),\ (17)$$

微分方程式(10)，(11)の特解を

$$v_1=e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\,(A_{1,\alpha}\cos\kappa_2\alpha r+B_{1,\alpha}\sin\kappa_2\alpha r), \qquad \cdots\cdots(18),\ (19)$$
$$v_2=e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\,\{A_{2,\alpha}\cos\kappa_2\alpha(a-r)+B_{2,\alpha}\sin\kappa_2\alpha(a-r)\}$$

なる形に置く。時間の因子は同じにしてある。$A_{1,\alpha}$，$A_{2,\alpha}$，$B_{1,\alpha}$，$B_{2,\alpha}$ は積分定数であって，α の関数である。

境界条件(12)，(13)から $A_{1,\alpha}=0$，$A_{2,\alpha}=0$ を得る。又境界条件(14)，(15)から

$$B_{1,\alpha}\sin\kappa_2\alpha a_1=B_{2,\alpha}\sin\kappa_2\alpha a_2, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$B_{1,\alpha}k_1\left(\kappa_2\alpha\cos\kappa_2\alpha a_1-\frac{1}{a_1}\sin\kappa_2\alpha a_1\right)$$
$$=-B_{2,\alpha}k_2\left(\kappa_1\alpha\cos\kappa_1\alpha a_2-\frac{1}{a_1}\sin\kappa_1\alpha a_2\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

を得る。但 $a_2=a-a_1$ と置いてある。

(20)，(21)から

$$k_1\kappa_2\cot\kappa_2\alpha a_1+k_2\kappa_1\cot\kappa_1\alpha a_2=\frac{k_1-k_2}{\alpha a_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

が得られる。この式によって α が決定される。

(22)には正負で絶対値の等しい根があることは容易に分る。根が無限に多くあることは次のようにすると明らかになる。

$$\frac{\kappa_2 \alpha a_1}{\kappa_1 \alpha a_1} = \frac{\kappa_2 a_1}{\kappa_1 a_2} = p, \qquad \kappa_1 \alpha a_2 = \xi, \qquad \kappa_2 \alpha a_1 = p\xi$$

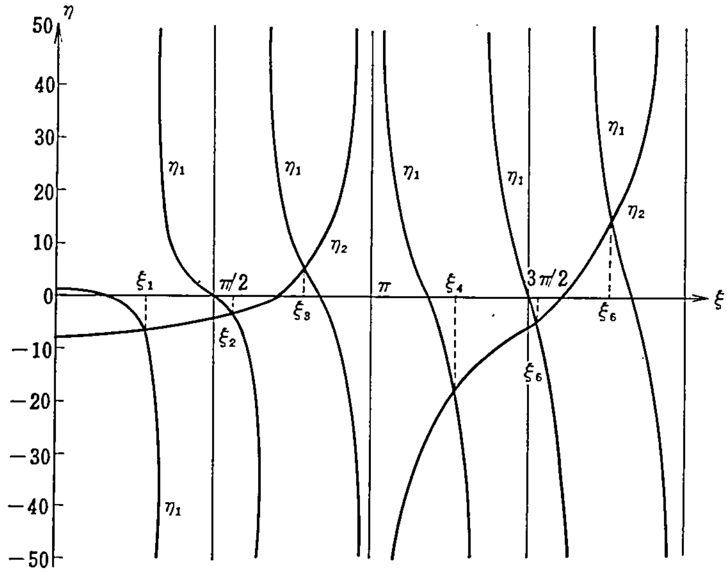
を置けば(22)は

$$p\xi \cot p\xi = -\frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}\xi \cot \xi + \frac{k_1 - k_2}{k_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

となる。今

$$\eta_1 = p\xi \cot p\xi, \qquad \eta_2 = -\frac{k_2 a_1}{k_1 a_2}\xi \cot \xi + \frac{k_1 - k_2}{k_1}$$

なる2曲線を直交軸を用いて画き，その交点を求めればよい。これらの曲線は第1図に画いてある。（図は $p=3$, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{2}$, $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}=6$，$\frac{k_2}{k_1}=6$ として画いてある。）



第　1　図

(23)の正根を大きさの順序に並べて s 番目のものを ξ_s と書き，それに対する α を α_s と書くことにすれば，

$$\alpha_s = \frac{\xi_s}{\kappa_1 a_1} = \frac{p\xi_s}{\kappa_2 a_1} \qquad [s=1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots\cdots]$$

である。この α_s を用いて境界条件を満足する解を書けば次のようになる：

$$v_1 = \sum_{s=1}^{\infty} B_{1,\alpha_s}\, e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2 t} \sin \kappa_2 \alpha_s r, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$v_2 = \sum_{s=1}^{\infty} B_{2,\alpha_s}\, e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2 t} \sin \kappa_1 \alpha_s (a - r). \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

但し(20)により，新しい定数 C_s を用いて

$$B_{1,\alpha_s}=C_s \sin \kappa_1\alpha_s a_2,\quad B_{2,\alpha_s}=C_s \sin \kappa_2\alpha_s a_1$$

と書ける。これらの関係により，(24)，(25)は

$$v_1=\sum_{s=1}^{\infty} C_s\, e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\, R_{1,s}(r), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$v_2=\sum_{s=1}^{\infty} C_s\, e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\, R_{2,s}(r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

と書くことが出来る。但し $R_{1,s}(r)$，$R_{2,s}(r)$ は

$$R_{1,s}(r)=\sin \kappa_1\alpha_s a_2 \sin \kappa_2\alpha_s r,\quad R_{2,s}(r)=\sin \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s (a-r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

を表わしている。

$R_{1,s}(r)$，$R_{2,s}(r)$ は無論次の微分方程式及び境界条件を満足している：

$$\frac{d^2R_{1,s}(r)}{dr^2}+\kappa_2^2\alpha_s^2R_{1,s}(r)=0,\qquad \frac{d^2R_{2,s}(r)}{dr^2}+\kappa_1^2\alpha_s^2R_{2,s}(r)=0, \qquad \cdots\cdots(29),\ (30)$$

$$(R_{1,s}(r))_{r=0}=0,\qquad (R_{2,s}(r))_{r=a}=0, \qquad \cdots\cdots(31),\ (32)$$

$$(R_{1,s}(r))_{r=a_1}=(R_{2,s}(r))_{r=a_1}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$k_1\left(\frac{dR_{1,s}(r)}{dr}-\frac{R_{1,s}(r)}{r}\right)_{r=a_1}=k_2\left(\frac{dR_{2,s}(r)}{dr}-\frac{R_{2,s}(r)}{r}\right)_{r=a_1}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

(26)，(27)に初期条件を入れれば

$$rf_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty} C_sR_{1,s}(r),\qquad [0<r_2<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

$$rf_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty} C_sR_{2,s}(r),\qquad [a_1<r_2<a] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

となる。この二式を満足するように C_s を決定することが出来れば問題は解けるのである。

(33)の両辺に $k_1\kappa_2^2R_{1,m}(r)$ を掛けて 0 が a_1 まで積分したものに(34)の両辺に $k_2\kappa_1^2R_{2,m}(r)$ を掛ける a_1 から a まで積分したものを辺辺加え合わせれば，次のようになる：

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} rf_1(r)\,R_{1,m}(r)\,dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} rf_2(r)R_{2,m}(r)\,dr$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty} C_s\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} R_{1,s}(r)R_{1,m}(r)\,dr+k_2r_1^2\int_{a_1}^{a} R_{2,s}(r)R_{2,m}(r)\,dr\right). \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$s\neq m$ の場合には，

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} R_{1,s}(r)R_{1,m}(r)\,dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} R_{2,s}(r)R_{2,m}(r)\,dr=0,\qquad [s\neq m] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

であることがいえる。それは次のように証明出来る。$R_{1,s}(r)$ は(25)をも満足するから，

$$k_1\kappa_2^2\alpha_s^2\int_0^{a_1}R_{1,s}R_{1,s}\,R_{1,m}dr=-k_1\int_0^{a_1}\frac{d^2R_{1,s}}{dr^2}R_{1,m}\,dr$$

が得れる。同様に(29)において s の代りに m と置いたものから，

$$k_1\kappa_2^2\ \alpha_m^2\int_0^{a_1}R_{1,m}R_{1,s}\ dr=-k_1\int_0^{a_1}\frac{\alpha^2R_{,1m}}{dr^2}R_{1,s}\,dr$$

$$=-k_1\left(\left[\frac{dR_{1,m}}{dr}R_{1,s}\right]_0^{a_1}-\int_0^{a_1}\frac{dR_{1,m}}{dr}\ \frac{dR_{1,s}}{dr}dr\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

である。これら2式から

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}R_{1,m}\ dr=\frac{k_1}{\alpha_m^2-\alpha_s^2}\left[\frac{dR_{1,s}}{dr}R_{2,m}-\frac{dR_{1,m}}{dr}R_{1,s}\ \right]_0^{a_1}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

を得る。全く同様な計算から，

$$k_2\kappa_1^2\int_0^{a_1}R_{2,s}R_{2,m}\ dr=\frac{k_2}{\alpha_m^2-\alpha_s^2}\left[\frac{dR_{1,s}}{dr}R_{2,m}-\frac{dR_{2,m}}{dr}R_{2,s}\ \right]_{a_1}^{0}.\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

(40)，(41)から

$$I\equiv k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}R_{1,m}\ \alpha r+k_2\,k_1^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}R_{2,m}\ dr$$

$$=\frac{1}{\alpha_m^2-\alpha_s^2}\left(k_1\left[\frac{dR_{1,s}}{dr}R_{1,m}-\frac{dR_{1,m}}{dr}\right]_0^{a1}+k_2\left[\frac{dR_{2,s}}{dr}R_{2,m}-\frac{dR_{2,m}}{dr}\ R_{2,s}\right]_{a_1}^{a}\right)$$

となる。これに(29)〜(34)を用いれば

$$I\equiv\frac{1}{\alpha_m^2-\alpha_s^2}\left\{k_1\left(\frac{dR_{s,1}}{dr}R_{1,m}\right)_{r=a1}-k_2\left(\frac{dR_{2,m}}{dr}R_{2,m}\right)_{r=a_1}\right.$$

$$\left.-k_1\left(\frac{dR_{1,m}}{dr}R_{1,s}\right)_{r=a_1}+k_2\left(\frac{dR_{2,m}}{dr}\right)_{r=a_2}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha_m^2-\alpha_s^2}\left\{(R_{1,m})_{r=a_1}\cdot\frac{1}{a_1}(R_{1,s})_{r=a_1}\ (k_1-k_2)\right.$$

$$\left.-(R_{1,s})_{r=a_1}\cdot\frac{1}{a_1}(R_{1,m})_{r=a_1}\right\}=0\qquad[s\neq m]\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

となり，証明が出来たのである。

次に $s=m$ の場合を考える。

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}^2(r)dr=k_1\kappa_2^2\sin\kappa_1a_sa_2\int_0^{a_1}\sin^2\kappa_2\alpha_s r dr$$

$$=\frac{k_1\kappa_2^2 \sin^2 \kappa_1 \alpha_s a_2}{2}\left(a_1-\frac{\sin^2 \kappa_2\alpha_1 \cos \kappa_2\alpha_s a_1}{\kappa_2\alpha_s}\right)$$

であるから，同様に得られる R_{2s} の a_1 から a までの積分を加え合わせて， それに(22)を用いれば，次の如くなる

$$K-k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1} R_{1,s}^2(r)\,dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a} R_{2,s}^2(r)\,dr$$

$$=\frac{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1 \cos^2 \kappa_1\alpha_s a_2}{2}\left(\frac{k_1\kappa_s^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}+\frac{k_2\kappa_1^2 a_2}{\sin^2 \kappa_1\alpha_s a^2}\right.$$

$$\left.-\frac{k_1\kappa_2}{\alpha_s}\cot \kappa_2\alpha_s a_1-\frac{k_2\kappa_1}{\alpha_s}\cot \kappa_1\alpha_s a_2\right)$$

$$=\frac{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1 \cos^2 \kappa_1\alpha_s a_2}{2}\left(\frac{k_2\kappa_1^2\alpha_2}{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}+\frac{k_2\kappa_1^2\alpha_2}{\sin^2 \kappa_1\alpha_s a_2}-\frac{k_1-k_2}{a_s^2 a_1}\right)\equiv V(\alpha_s) \quad \cdots\cdots(42)$$

(41), (42)により C_s は次の如く与えられる：

$$C_s=\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\, R_{1,s}(\lambda)\,d\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\, R_{2,s}(\lambda)\,d\lambda\right)\Big/ V(\alpha_s). \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

これにより求める展開式を得る：

$$rf_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty} R_{1,s}(r)\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\, R_{1,s}(\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\; R_{2,s}(\lambda)\,d\lambda\right)\Big/ V(\alpha_s) \quad [0<r<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

$$rf_2(r)=\sum_{s=}^{\infty} R_{2,s}(r)\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\; R_{1,s}(\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\; R_{2,s}(\lambda)\,d\lambda\right)\Big/ V(\alpha_s), \quad [a_1<r<a]. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

C_s の値が(44)によって与えられることが分ったから，この値を(26), (27)に代入すれば，v_1, v_2 が得られ，それから問題の解が得られる。

$$u_1=\frac{2}{r}\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t} \sin \kappa_1\alpha_s a_2 \sin r_2\, \alpha_s\, r$$

$$\times\left(k_1\kappa_2^2 \sin \kappa_1\alpha_s a_2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda) \sin \kappa_2\alpha_s\lambda\, d\lambda\right.$$

$$+k_2\kappa_1^2 \sin \kappa_2\alpha_s a_1 \int_{a_1}^{a} \lambda f_2(\lambda) \sin \kappa_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda \Big)\div\Big\{ \sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s a_2$$

$$\times\left(\frac{k_1\kappa_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}+\frac{k_2\kappa_1^2 a_2}{\sin^2 \kappa_1\alpha_s a_2}+\frac{k_1-k_2}{\alpha_s^2\alpha_1}\right)\Big\},\ [0<r<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

$$u_2=\frac{2}{r}\sum_{s=1}^{\infty} e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t} \sin \kappa_2\alpha_s a_1 \sin \kappa_1\alpha_s\ (a-r)$$

$$\times\Big(k_1\kappa_2^2 \sin \kappa_2^2\alpha_s a_2 \int_0^{a_1} \lambda f_1(\lambda) \sin \kappa_2\alpha_s\lambda\, d\lambda$$

$$+k_2\kappa_1^2 \sin \kappa_s\alpha_s a_1 \int_{a_1}^{a} \lambda f_2(\lambda) \sin \kappa_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda \Big)$$

$$\div\Big\{ \sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1 \sin^2 \kappa_1\alpha_s a_2$$

$$\times\left(\frac{k_1\kappa_2^2 a_1}{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}+\frac{k_2\kappa_1^2 a_2}{\sin^2 \kappa_1^2\alpha_s a_2}-\frac{k_1-k_2}{\alpha_s^2 a_1}\right)\Big\},\ [a_1<r<a]. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

II　球の表面で熱を通さない場合

境界条件(6)を用いる場合である。微分方程式及び他の条件はIIの場合と変りはない。(6)は v_2 を用いて書けば

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial r}-\frac{v_2}{r}\right)_{r=a}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

となる。

微分方程式の特解として，前と同様に

$$v_1=D_{1,\alpha}\, e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t} \sin \kappa_2\alpha r \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

とすればよい。v_2 は微分方程式と境界条件(49)を満足する特解として

$$v_2=D_{2,\alpha}\, e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha^2 t}\ \{\sin \kappa_1\alpha(a-r)-\kappa_1\alpha a \cos \kappa_1\alpha(a-r)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

を採ればよいことが分るであろう。

境界条件(14)，(15)により

$$D_{1,\alpha} \sin \kappa_2\alpha a_1=D_{2,\alpha}(\sin \kappa_1\alpha a_2-\kappa_1\alpha a \cos \kappa_1\alpha a_2), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

$$D_{1,\alpha}\, k_1\Big(\ \kappa_2\alpha \left(\cos \kappa_2\alpha a_1-\frac{1}{a_1}\sin \kappa_2\alpha a_1\right)$$

$$=D_{2,\alpha}\, k_2\Big\{-\kappa_1\alpha a_2+\kappa_1\alpha a \sin \kappa_1\alpha a_2)$$

$$-\frac{1}{a^2}(\sin \kappa_1\alpha a_2-\kappa_1\alpha a \cos \kappa\alpha a_2)\Big\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

となる。これら二式から

$$k_1\kappa_2\alpha\cot\kappa_2\alpha a_1=k_2\kappa_1\alpha\,\frac{\cos\kappa_1\alpha a_2+\kappa_1\alpha a\sin\kappa_1\alpha a_2}{\kappa_1\alpha a\cos\kappa_1\alpha a_2-\sin\kappa_1\alpha a_2}+\frac{k_1-k_2}{a_1}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

が得られる。但し $a_2=a-a_1$ である。今

$$\frac{\cos\kappa_1\alpha a_2+\kappa_1\alpha a_1\sin\kappa_1\alpha a_2}{\kappa_1\alpha a\cos\kappa_1\alpha a_2-\sin\kappa_1\alpha a_2}=\tan(\kappa_1\alpha a_2+\beta)$$

と置けば，

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa_1{}^2\alpha^2a^2}},\quad \cos\beta=\frac{\kappa_1\alpha a}{\sqrt{1+\kappa_1{}^2\alpha^2a^2}},\quad \cot\beta=\kappa_1\alpha a$$

である。これから

$$\beta=\cot^{-1}\kappa_1\alpha a$$

となる。従って(54)は次のように書かれる。

$$k_1\kappa_2\alpha\cot\kappa_2\alpha a_1=k_2\kappa_1\tan(\kappa_1\alpha a_2+\cot^{-1}\kappa_1\alpha a)+\frac{k_1-k_2}{a_1}.\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

この式から α が決定される。α には正負絶対値の等しい根があることは容易に分かる。根が無数にあることはIIの場合と同様に図を画いて見れば明らかになる。今簡単のために

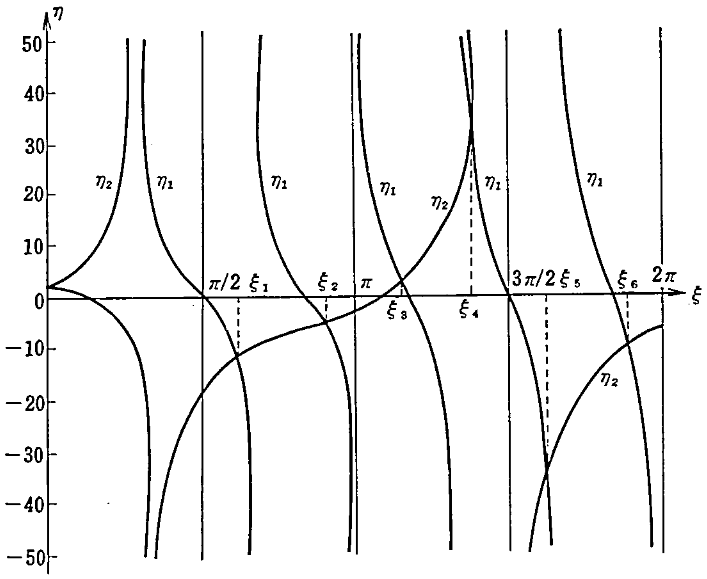
$$p\xi\cot p\xi=\frac{k_2a_1}{k_1a_2}\xi\tan(\xi+\cot^{-1}p'\xi)+\frac{k_1-k_2}{a_1}$$

と置く，但し

$$\kappa_1\alpha a_2=\xi,\qquad \frac{\kappa_2a_1}{\kappa_1a_2}=p,\qquad \frac{a}{a_2}=p'$$

と書いてある。直交座標を $\eta_1\,\xi$ 採り

$$\eta_1=p\xi\tan p\xi,\qquad \eta_2=\frac{k_2a_1}{k_1a_2}\xi\tan(\xi+\cot^{-1}p'\xi)+\frac{k_1-k_2}{a_1}$$



第　2　図

を画くと第2図のようになる。この図の二曲線の交点からξが決定されるが，図からその値は無数にあることが分る。従ってξから決まるαの値も無数にある。(図では$p=3$, $p'=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{k_1}{k_2}=6$としてある)

ξの正根を大きさの順序に並べてs番目のものをξ_sと書き，それに対するαをα_sと書けば，

$$\alpha_s=\frac{\xi_s}{\kappa_1 a_2},\quad \text{或は}\ \alpha_s=p\frac{\xi_s}{\kappa_2 a_1},\qquad [s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots]$$

である。このα_sを用いれば解は

$$v_1=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\ e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2t}\ R_{1,s}(r), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

$$v_2=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\ e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2t}\ R_{1,s}(r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

と書くことが出来る。但し$R_{1,s}(r)$, $R_{2,s}(r)$は

$$R_{1,s}=(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1 d_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)\ \sin\kappa_2\alpha_s r, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

$$R_{2,s}=\sin\kappa_2\alpha_s a_2\{\sin\kappa_1\alpha_s(a-r)-\kappa_1\alpha_s a\sin\kappa_1\alpha(a-r)\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

を表わす。

初期条件により

$$rf_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\,R_{1,s}(r),\qquad [0<r<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

$$rf_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\,R_{2,s}(r),\qquad a_1[<r<a] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

であるから，これを満足するようにD_sを決定すればよい。

IIの場と同様に

$$k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1} rf_1(r)\ R_{1,m}(r)\ dr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a} rf_2(r)\ R_{2,m}(r)dr$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\left(k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}R_{1,s}(r)\ R_{1,m}(r)\ dr+k_2\kappa_1{}^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}(r)\ R_{2,m}(r)dr\right)$$

を作ってみればD_sが決定される。

先ず$s\neq m$とすれば$R_{1,s}(r)$, $R_{2,s}(r)$, $R_{1,m}(r)$, $R_{2,m}(r)$, 満足する境界条件により

$$k_1\kappa_2{}^2\int_0^{a_1}R_{1,s}\ R_{1,m}\ dr+k_2\kappa_2{}^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}\ R_{2,m}\ dr$$

$$=\frac{1}{\alpha_m{}^2-\alpha_s{}^2}\left(k_1\left[\frac{dR_{1,s}}{dr}R_{1,m}-\frac{dR_{1,m}}{dr}R_{1,s}\right]_0^{a_1}\right.$$

$$+k_2\left[\frac{dR_{2,s}}{dr}R_{2,m}-\frac{dR_{2,m}}{dr}R_{2,s}\right]_{a_1}^{a}\Bigg)=0 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

となることが言われる。

$s=m$ の場合には,

$$\int_0^{a_1} R_{1,s}^2(r)\ dr=(\sin \kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a \cos \kappa_1\alpha_s\alpha_2)^2 \int_0^{a_1}\sin^2 \kappa_1\alpha_s r\ dr$$

$$=\frac{(\sin \kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a \cos \kappa_1\alpha_s a_2)^2}{2}\left(a_1-\frac{1}{\kappa_2\alpha_s}\sin \kappa_2\alpha_s a_1 \cos \kappa_2\alpha_s a_1\right)$$

$$\int_{a_1}^{a}R_{2,s}(r)\ dr=\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}\{\sin \kappa_1\alpha_s(a-r)-\kappa_1\alpha_s a \sin \kappa_1\alpha\ (a-r)\}^2\ dr$$

$$=\frac{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}{2}\left\{\frac{1}{\kappa_1\alpha_s}(\kappa_1\alpha_s a \cos \kappa_1\alpha_s a_2-\sin \kappa_1\alpha_s\alpha_2)\right.$$

$$\left.(\kappa_1\alpha_s a \sin \kappa_1\alpha_s a_2+\cos \kappa_1\alpha_s a_2)-a_1+\kappa_1^2\alpha_s^2a^2a_2\right\}$$

となる。これら二式から

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}^2(r)\ \ dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}^2(r)dr$$

$$=\frac{\sin^2 \kappa_2\alpha_s\alpha_1(\kappa_1\alpha_s\alpha \cos \kappa_1\alpha_s a_2-\sin \kappa_1\alpha_s a_2)^2}{2}\left(-\frac{k_1\kappa_2^2}{\alpha_s}\cot \kappa_2\alpha_s a_1\right.$$

$$\left.+\frac{k_2\kappa_1}{\alpha_s}\tan\ (\kappa_1\alpha_s a_2+\cot^{-1}\kappa\alpha_s a)+\frac{k_1\kappa_2^2a_1}{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}+\frac{k_2\kappa_1^2(\kappa_1^2\alpha_s a^2a_2-a_1)}{\kappa_1\alpha_s a\ (\cos \kappa_1\alpha_s\alpha_2-\sin \kappa_1\alpha_s a_2)^2}\right)$$

$$=\frac{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1\,(\kappa_1\alpha_s a \cos \kappa_1\alpha_s a_2-\sin \kappa_1\alpha_s a_2)^2}{2}\left(\frac{k_1\kappa_2^2a_1}{\sin^2 \kappa_2\alpha_s a_1}\right.$$

$$\left.+\frac{k_2\kappa_1^2\ (\kappa_1\alpha_s^2a^2a_2-a_1)}{(\kappa_1\alpha_s a \cos \kappa_1\alpha_s a_2-\sin \kappa_1\alpha_s a_2)^2}-\frac{k_1-k_2}{\alpha_s^2a_1}\right)\equiv V_2(\alpha_s) \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

なる結果が得られる。

(62), (63)により D_s は計算されるから, $rf_1(r)$, $rf_2(r)$ の展開式は次のようになる：

$$rf_1(r)\ =\sum_{s=1}^{\infty}R_{1,s}\ (r)\ \left(k_2\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\ R_{1,s}(\lambda)a\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\,R_{2,s}(\lambda)d\lambda\right)\Big/V_2(\alpha_s),$$

$$rf_2(r)\ =\sum_{s=1}^{\infty}R_{2,s}\ (r)\ \left(k_2\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\ R_{1,s}(\lambda)a\lambda+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\,R_{2,s}(\lambda)d\lambda\right)\Big/V_2(\alpha_s).$$

v_1, v_2 も同様に得られるが, それから求められる u_1, u_2 を書けば次の通りである：

$$u_1=\frac{2}{r}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2t}\sin\kappa_2\alpha_s r(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)$$

$$\times\Bigl(k_1\kappa_2{}^2(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_s\lambda\,d\lambda$$

$$+k_2\kappa_1{}^2\sin\kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)(\sin\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda)$$

$$\div\Bigl\{\sin^2\kappa_1\alpha_s a_2(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)^2\Bigl(\frac{k_1\kappa_2{}^2a_1}{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1}$$

$$+\frac{k_2\kappa_1{}^2(\kappa_1{}^2\alpha_s{}^2a^2a_2-a_1)}{(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)^2}-\frac{k_1-k_2}{a_1}\Bigr)\Bigr\},\quad[0<r<a_1],\qquad\cdots\cdots\cdots(64)$$

$$u_2=\frac{2}{r}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2t}\{\sin\kappa_1\alpha_s(a-r)-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s(a-r)\}\sin\kappa_2\alpha_s a_1$$

$$\times\Bigl(k_1\kappa_2{}^2(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_s\lambda\,d\lambda$$

$$+k_2\kappa_1{}^2\sin\kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\{\sin\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)d\lambda\}$$

$$+\Bigl\{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_2)^2\Bigl(\frac{k_1\kappa_2{}^2a_1}{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1}$$

$$+\frac{k_2\kappa_1{}^2(\kappa_1{}^2\alpha_s{}^2a^2a_2-a_1)}{(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\kappa_1\alpha_s a\cos\kappa_1\alpha_s a_5)^2}-\frac{k_1-k_2}{\alpha_s{}^2a_1}\Bigr)\Bigr\},\quad[a_1<r<a].\qquad\cdots\cdots\cdots(65)$$

IV　表面から Newton の輻射の法則に従う熱の放散のある場合

この場合には境界条件(7)を用いることになる。これを v を用いて書けば，

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial r}-\frac{1+rh}{r}v_2\right)_{r=a}=0\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

となる。他の条件は今迄と同じである。

微分方程式の特解として，

$$v_1=E_{1,\alpha}\,e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha^2t}\sin\kappa_2\alpha r,\qquad[0<r<a]\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

$$v_2=E_{2,\alpha}\,e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha^2t}\left(\sin\kappa_1\alpha(a-r)-\frac{\kappa_1\alpha a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha(a-r)\right)$$

$$[a_1<r<a]\cdots\cdots\cdots\cdots(68)$$

を採れば $r=0$ と $r=a$ における境界条件を満足している。

$r=a_1$ における境界条件を満足するためには，

$$k_1\kappa_2\alpha\ \cot\kappa_2\alpha a_1=k_2\kappa_1\alpha\ \tan\left(\kappa_1\alpha a_2+\cot^{-1}\frac{\kappa_1\alpha a}{1+ah}\right)+\frac{k_1-k_2}{a_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(69)$$

を満足するように α を決定しなくてはならない。

α には正負の絶対値の等しい根があることが分る。(69) に無数に多くの根があることは次のようにすると分る。先づ(69)を

$$p\xi\ \cot p\xi=\frac{k_2a_1}{k_1a_2}\xi\ \tan\xi+\cot^{-1}p''\xi)+\frac{k_1-k_2}{a_1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

と書かえる。但し

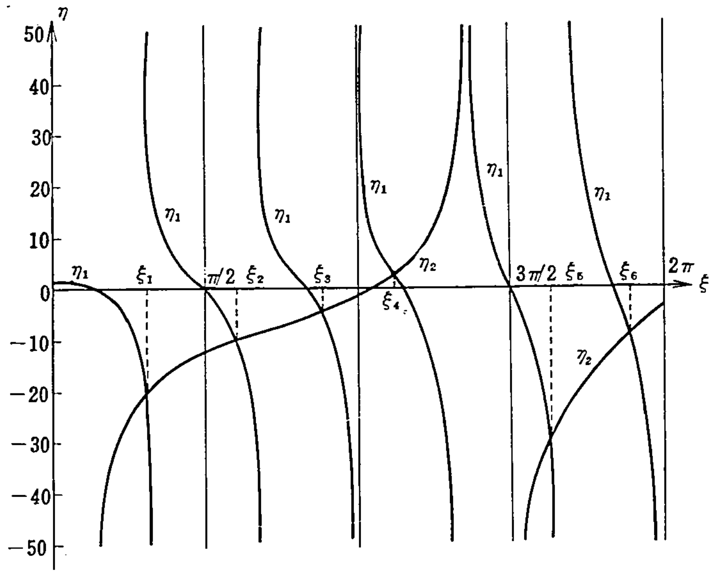
$$\kappa_1\alpha a_2=\xi,\ \frac{k_2a_1}{k_1a_2}=p\ ,\ \frac{a}{(+ah)a_2}=p''$$

と置いてある。

直交座標 ξ, η を用いて

$$\eta_1=p\xi\ \cot\xi,\quad \eta_2=\frac{k_2a_1}{k_1a_2}\tan\ (\xi+\cot^{-1}p''\xi)$$

なる二曲線を画いてみれば，その交点から(70)を満足する根が無数にあることが分る。第 3 図にはこれら二曲線が画いてある。(図では $p=p\xi$, $p''=1$, $a_2h=\dfrac{1}{3}$ としてある。)



第 3 図

(70)から決る正の ξ を大きさの順序に並べて s 番目のものを ξ_s とし，それに対する α を α_s と書き，v_1, v_2 を次のように書く

$$v_1=\sum_{s=1}^{\infty}E_s\ e^{-\kappa_1{}^2\kappa_2{}^2\alpha_s{}^2t}\ R_{1,s}(r),\qquad [0<r<a_1] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(71)$$

$$v_2=\sum_{s=1}^{\infty}E_s\, e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2 t}\, R_{2,s}(r), \qquad [a_1<r<a]. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

但し $R_{1,s}(r)$, $R_{2,s}(r)$ は次の式を表わす：

$$R_{1,s}(r)=\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)\sin\kappa_2\alpha_s r, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(73)$$

$$R_{2,s}(r)=\sin\kappa_2\alpha_s a_1\left(\sin\kappa_1\alpha_s\,(a-r)-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s(a-r)\right). \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

初期条件により

$$rf_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}E_s\,R_{1,s}(r), \qquad [a<r<a_1], \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(75)$$

$$rf_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}E_s\,R_{2,s}(r), \qquad [a_1<r<a] \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(76)$$

となるから，E_s を決定すれば，問題の解が得られる。

前同様に E_s を決定するために次の如き積分を作る：

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}rf_1(r)\,R_{1,m}(r)\,dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}rf_2(r)\,R_{2,m}(r)dr$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}E_s\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}(r)\,R_{1,m}(r)dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}(r)\,R_{2,m}(r)dr\right).$$

$s=m$ の場合には

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}(r)\,R_{1,m}(r)dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}(r)\,R_{2,m}(r)dr=0 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$

となることは前同様証明出来る。$s=m$ の場合には

$$k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}R_{1,s}^2(r)\,dr+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}R_{2,s}^2(r)dr$$

$$=\frac{\sin^2\kappa_2\alpha a_1}{2}\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)^2$$

$$\times\left(\frac{\kappa_1\kappa_2^2 a_1}{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1}+\frac{\dfrac{k_2\kappa_1^2}{1+ah}\left(\dfrac{k_1^2\alpha_s^2}{1+ah}a_2+aa_2h-a_1\right)^2}{\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\dfrac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_1\right)^2}-\frac{k_1-k_1}{\alpha_s^2 a_1}\right)\equiv V_s(\alpha_s) \qquad\cdots\cdots\cdots(78)$$

なる値となる。

従って $rf_1(r)$, $rf_2(r)$ の展開式は次の如くなる：

$$rf_1(r)=\sum_{s=1}^{\infty}R_{1,s}(r)\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\,R_{1,s}(\lambda)\,d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\,R_{2,s}(\lambda)d\lambda\right)\Big/V_s(\alpha_s),\qquad [0<r<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

$$rf_2(r)=\sum_{s=1}^{\infty}R_{2,s}(r)\left(k_1\kappa_2^2\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\,R_{1,s}(\lambda)d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\,R_{2,s}(\lambda)dr\right)\Big/V_s(\alpha_s),\qquad [a_1<r<a]. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(80)$$

又求める温度分布は次の如く与えられる：

$$u_1=\frac{2}{r}\sum_{s=1}^{\infty}\left(e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2t}\sin\kappa_1\alpha_s r\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)\right.$$

$$\times\left\{k_1\kappa_2^2\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_s\lambda d\lambda\right.$$

$$\left.+k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\left(\sin\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)-\frac{\kappa_1\alpha a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)\right)d\lambda\right\}$$

$$\div\left\{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)^2\left(\frac{k_1\kappa_2^2a_1}{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{k_2\kappa_1^2}{1+ah}\left(\frac{\kappa_1^2\alpha_s^2a^2a_2}{1+ah}+aa_2h-a_1\right)}{\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)^2}-\frac{k-k_2}{\alpha_s^2a_1}\right)\right\},\quad [0<r<a_1], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(81)$$

$$u_2=\frac{2}{r}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\kappa_1^2\kappa_2^2\alpha_s^2t}\left(\sin\kappa_1\alpha_s(a-r)-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s(a-r)\right)$$

$$\times\left[\sin\kappa_2\alpha_s\alpha_1\left\{k_1\kappa_2^2\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ak}\cos\kappa_1\kappa_s a_2\right)\int_0^{a_1}\lambda f_1(\lambda)\sin\kappa_2\alpha_s\lambda d\lambda\right.\right.$$

$$\left.\left.+k_2\kappa_1^2\sin\kappa_2\alpha_s a_1\int_{a_1}^{a}\lambda f_2(\lambda)\left(\sin\kappa_1\alpha_s(a-\lambda)-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s(\alpha-\lambda)\right)d\lambda\right\}\right]$$

$$\div\left\{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1\left(\sin\kappa_1\alpha_s a_2-\frac{\kappa_1\alpha_s a}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_s a_2\right)^2\left(\frac{\kappa_1\kappa_2^2a_1}{\sin^2\kappa_2\alpha_s a_1}\right.\right.$$

$$+\frac{\dfrac{k_2\kappa_2^2}{1+ah}\left(\dfrac{\kappa_1^2\alpha_s^2a^2a_2}{1+ah}+aa_2h-a_1\right)}{\left(\sin\kappa_1\alpha_sa_2+\dfrac{\kappa_1\alpha_sa}{1+ah}\cos\kappa_1\alpha_sa_2\right)^2}-\frac{k_1-k_2}{\alpha_s^2a_1}\Bigg)\Bigg\},\quad [a_1<r<a]. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(82)$$

この論文は昭和43年度の明星大学理工学部物理学科 4 年生の飯島愛三君が著者の指導の下に行なった卒業研究の一部分である。