

Sur une variété localement applicable dans l'espace projectif à dimension infinie

Jōyō Kanitani

Résumé.

Nous définissons d'abord, d'une manière géométrique, l'espace projectif S à dimension infinie et démontrons qu'il admet une base $\mathfrak{A} = (A_i) (i \in I)$, autrement dit, qu'il existe, pour un point quelconque P de S , une sous-famille finie (A_i, \dots, A_j) de \mathfrak{A} telle que $P \in (A_i \vee \dots \vee A_j)$. Ensuite, en associant à \mathfrak{A} une famille des points d'unité, nous introduisons les coordonnées homogènes $(x^i) (i \in I)$ du point $P (x^i = 0, \text{ sauf pour un nombre fini d'indices } i \in I)$, ainsi que les coordonnées normales au moyen desquelles nous donnons à S une topologie. Nous considérons enfin une variété différentiable dont les cartes locales sont des applications topologiques dans S . Bien que, pour un point, les coordonnées $\neq 0$ soient de nombre fini, les nombres des coordonnées $\neq 0$ pour les points dans un voisinage ne sont pas bornés quelque petit qu'on fasse le voisinage. Là, on rencontre quelques difficultés, si l'on veut généraliser pour la dite variété le vecteur tangent. L'objet principal de cet article est de décrire comment peut-on effectuer cette généralisation.

§1 Base de l'espace projectif réel à dimension infinie

1. Considérons un ensemble S ($\neq \emptyset$) et une famille \mathfrak{L} de parties de S satisfaisant aux axiomes suivants :

Axiome 1. Pour deux éléments quelconques de S , il existe une partie et une seule qui les contient et qui appartient à \mathfrak{L} .

Nous appelons un élément de S un point, et une partie appartenant à \mathfrak{L} une droite. Nous désignerons par $P \vee Q$ la droite contenant les points distincts P et Q .

Axiome 2. Une droite contient au moins trois points distincts.

Axiome 3. Soient A, B, C trois points distincts, et D, E deux points distincts tels que $D \in (A \vee B)$, $E \in (A \vee C)$. Il existe alors au moins un point commun aux deux droites $B \vee C$ et $D \vee E$.

On désigne par S^0 une partie dont l'élément est un point unique, et par S^i une droite. Etant donné une partie S^{i-1} ($i \geq 1$) et un point $A \in S^{i-1}$, on désigne par S^i l'ensemble des points P tels que $P \in (A \vee B)$ ($B \in S^{i-1}$).

Axiome 4. Pour tout S^i , le complément de S^i par rapport à S n'est pas vide.

Partant de ces axiomes, on peut démontrer qu'une famille finie formée de $r+1$ points indépendants (i. e. non contenus dans un S^{r-1}) de S détermine un S^r , plus précisément, qu'il existe un S^r et un seul qui contient ces $r+1$ points indé-

pendants.

On dit qu'une famille (P_α) ($\alpha \in J$) de points de S est *libre*, si toute sous-famille finie de (P_α) ($\alpha \in J$) est formée de points indépendants.

Soient maintenant (P_α) ($\alpha \in J$) une famille quelconque de points de S , et U la réunion des S^r dont chacun est déterminé par une sous-famille finie de (P_α) ($\alpha \in J$). On dit que la famille (P_α) ($\alpha \in J$) *engendre* l'ensemble U . En particulier, lorsque la famille (P_α) ($\alpha \in J$) est libre, on l'appelle base de U .

2. Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble S possède une base. Soit \mathfrak{S} l'ensemble des parties de S , dont chacune est engendrée par une famille libre de points de S . Il suffit de prouver que l'ensemble \mathfrak{S} , ordonné par inclusion, est inductif de sorte que \mathfrak{S} possède un élément maximal W en vertu du théorème de Zorn. En effet, s'il existait un point $P \notin W$ de S , on obtiendrait une famille libre à nouveau, en adjoignant P à la base de W . L'ensemble W' engendré par cette famille appartient à \mathfrak{S} et on a $W \leq W'$ d'où $W = W'$, car W est maximal. C'est absurde.

La démonstration se réduit ainsi à prouver que pour tout sous-ensemble \mathfrak{G} de \mathfrak{S} , totalement ordonné par inclusion, la réunion V des ensembles de \mathfrak{G} appartient à \mathfrak{S} . Soit F la réunion des familles libres de points de S , dont chacune engendre un ensemble de \mathfrak{G} . Comme tout point de V appartient à un S^r déterminé par une sous-famille finie de F , l'ensemble V est contenu dans l'ensemble engendré par F . Il suffit donc maintenant de vérifier que la famille F est libre, c'est-à-dire, que toute sous-famille finie Y de F est formée de points indépendants. Or, pour tout point P de Y , il existe un ensemble Z_P de \mathfrak{G} , dont la base appartient à F et renferme P comme un élément. Comme l'ensemble des Z_P ($P \in Y$) est fini et totalement ordonné par inclusion, il admet un plus grand élément Π qui contient les autres Z_P ($P \in Y$). La famille finie Y est donc une partie d'une base de Π de sorte qu'elle est formée de points indépendants.

§2 Coordonnées homogènes d'un point de S

3. En prenant d'abord, sur une droite ℓ , trois points distincts C, O, U et en définissant l'addition et la multiplication pour les points P ($P \in \ell, P \neq C$) par rapport au système $[C, O, U]$, on peut faire, de l'ensemble de ces points P , un corps K_ℓ où $P + O = P, P \times U = P$. Or, il existe une application qui est une composition d'applications perspectives de ℓ dans une autre droite ℓ' et qui, au système $[C, O, U]$ sur ℓ , fait correspondre un système $[C', O', U']$ préalablement donné sur ℓ' . Au moyen d'une telle application on peut établir un isomorphisme entre les deux corps K_ℓ et $K_{\ell'}$. Nous supposons, d'ore et déjà, que tout corps K_ℓ est isomorphe au corps R des nombres réels. Dans ce cas, l'ensemble S^r est dit l'espace projectif réel à dimensions r . Conformément à cette dénomination, nous appellerons S *espace projectif réel à dimension infinie*.

Soit $\mathfrak{A} = (A_i)$ ($i \in I$) une base de S . D'après le théorème de Zermelo, il existe un bon ordre sur la famille d'indices I . On le notera par le signe \leq . Le système formé

par une sous-famille finie (A_i, \dots, A_j) ($i < \dots < j$) de \mathfrak{A} et par un point $U_{i \dots j} \in (A_i \vee \dots \vee A_j)$ ($U_{i \dots j} \in \alpha_\kappa = A_i \vee \dots \vee \hat{A}_\kappa \vee \dots \vee A_j$ ($\kappa: i \rightarrow j$)), sera nommé un repère de sommets A_i, \dots, A_j et de *point d'unité* $U_{i \dots j}$. Ce repère sera dit *complet* lorsqu'à chaque sous-famille (A_s, \dots, A_t) de (A_i, \dots, A_j) , s'attache le point d'intersection

$$U_{s \dots t} = (A_s \vee \dots \vee A_t) \cap (A_p \vee \dots \vee A_q \vee U_{i \dots j})$$

comme point d'unité, où $s \dots t p \dots q$ est une permutation de $i \dots j$.

D'après cette définition, si les sous-repères frontières

$$[A_i, \dots, \hat{A}_\kappa, \dots, A_j; U_{i \dots \hat{\kappa} \dots j}] \quad (\kappa: i \rightarrow j),$$

où

$$U_{i \dots \hat{\kappa} \dots j} = \alpha_\kappa \cap (A_\kappa \vee U_{i \dots j})$$

sont tous complets, il en est de même pour le repère

$$[A_i, \dots, A_j; U_{i \dots j}].$$

4. Nous allons maintenant démontrer que nous pouvons associer, à la base \mathfrak{A} , une famille $\mathfrak{U} = (U_t)$ ($t \in T$) de points de S de manière à avoir un système de repères complets par attacher, à chaque sous-famille finie de \mathfrak{A} , un et un seul point de \mathfrak{U} . Lorsqu'une telle correspondance se trouve entre chaque sous-famille finie de (A_i) ($i \in [\iota, \beta] \subset I$) et un point de la sous-famille homologue de \mathfrak{U} , où ι est le plus petit élément de I , nous dirons que la relation $R_{\{\beta\}}$ est vérifiée. Il suffit maintenant de prouver que

$$(\beta \in I \text{ et } \forall \gamma (\gamma \in I \text{ et } \gamma < \beta) \Rightarrow R_{\{\gamma\}}) \Rightarrow R_{\{\beta\}}.$$

En supposant que $R_{\{\gamma\}}$ est vrai pour $\gamma \in [\iota, \beta[$, on prend comme point $U_{\iota, \beta}$ un point quelconque de la droite $A_\iota \vee A_\beta$, qui est différent de A_ι et de A_β .

Nous désignerons désormais un tel point simplement par $U_{\iota\beta}$. À la sous-famille finie $[A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}, A_\beta]$ ($i_0 < i_1 < \dots < i_r \in [\iota, \beta[$) de $\{A_i\}$ ($i \in [\iota, \beta] \subset I$), on associe le point $U_{i_0 i_1 \dots i_r \beta}$ déterminé de la manière suivante :

1°. Lorsque $i_0 = \iota$, en utilisant le point $U_{i_1 \dots i_r}$ qui est déjà connu d'après $R_{\{\gamma\}}$, on fait

$$U_{i_1 \dots i_r \beta} = (A_\beta \vee U_{i_1 \dots i_r}) \cap (U_{\iota\beta} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r}).$$

2°. Lorsque $\iota < i_0$, en introduisant d'abord le point

$$U_{i_0 \dots i_r \beta} = (A_\beta \vee U_{i_0 \dots i_r}) \cap (U_{\iota\beta} \vee A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r}),$$

on fait

$$U_{i_0 i_1 \dots i_r \beta} = (A_\iota \vee U_{i_0 \dots i_r \beta}) \cap (A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r} \vee A_\beta).$$

On démontre maintenant que le repère $[A_{i_0}, \dots, A_{i_r}, A_\beta; U_{i_0 \dots i_r \beta}]$ est complet. Or, en faisant

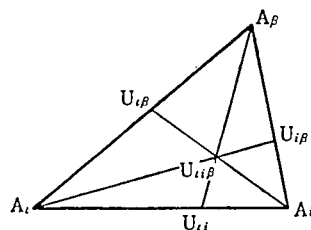
$$U_{i\beta} = (A_\beta \vee U_{i\iota}) \cap (U_{\iota\beta} \vee A_i) \quad (\iota < i < \beta),$$

$$U_{i\beta} = (A_\iota \vee U_{i\beta}) \cap (A_\iota \vee A_\beta),$$

on obtient les repères complets

$$[A_\iota, A_\beta; U_{\iota\beta}], [A_i, A_\beta; U_{i\beta}].$$

Il suffit donc de prouver que si cela arrive pour toute sous-famille $(A_{j_0}, A_{j_1}, \dots, A_{j_s}, A_\beta)$ ($s < r$) de $(A_{i_0}, \dots, A_{i_r}, A_\beta)$, il en est de même pour chaque sous-famille



$A_{k_0}, A_{k_1}, \dots, A_{k_{s+1}}, A_\beta$ de $(A_{i_0}, \dots, A_{i_r}, A_\beta)$. Envisageons une sous-famille $(A_{k_0}, \dots, A_{k_{s+1}}, A_\beta)$. Supposons d'abord que $\ell < k_0$. Parmi $A_{k_0}, \dots, A_{k_{s+1}}$ prenons un point A_j . Soient A_{j_0}, \dots, A_{j_s} les autres points. Puisque $j_0 \dots j_s j$ est une permutation de $k_0 \dots k_{s+1}$ et que $R_1 \gamma$ est vrai, le plan $\pi = U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}} \vee A_j \vee A_\beta$ coupe l'hyperplan $\alpha_j = A_i \vee A_{j_0} \vee \dots \vee A_{j_s} \vee A_\beta$ (dans $S^{s+3} = A_i \vee A_{k_0} \vee \dots \vee A_{k_{s+1}} \vee A_\beta$) le long d'une droite ℓ qui contient les points A_β , $U_{i_0} \dots U_{i_s}$ et le point d'intersection

$$P = (A_j \vee U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}) \cap (U_{i_\beta} \vee (A_{j_0} \vee \dots \vee A_{j_s})),$$

car ces trois points se trouvent évidemment dans le plan π et aussi dans l'hyperplan α_j . Donc, ce point P est en coïncidence avec le point

$$U_{i_0} \dots U_{i_s} = (A_\beta \vee U_{i_0} \dots U_{i_s}) \cap (U_{i_\beta} \vee A_{j_0} \vee \dots \vee A_{j_s}).$$

D'autre part, il est le point d'intersection des deux droites $A_\beta \vee U_{i_0} \dots U_{i_s}$, $A_j \vee U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}$ dans le plan π . Donc, la droite joignant A_j avec $U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}$ rencontre l'hyperplan α_j au point $U_{i_0} \dots U_{i_s}$. Par la projection du point A_i sur l'hyperplan $\alpha_i = A_{k_0} \vee \dots \vee A_{k_{s+1}} \vee A_\beta$, les points $U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}$ et $U_{i_0} \dots U_{i_s}$ sont portés respectivement, d'après définition, aux points $U_{k_0} \dots U_{k_{s+1}}$ et $U_{j_0} \dots U_{j_s}$. On a donc

$$U_{j_0} \dots U_{j_s} = (A_j \vee U_{k_0} \dots U_{k_{s+1}}) \cap (A_{j_0} \vee \dots \vee A_{j_s}),$$

ce qui nous montre que $[A_{j_0}, \dots, A_{j_s}, A_\beta; U_{j_0} \dots U_{j_s}]$ est un sous-repère frontière de $[A_{k_0}, \dots, A_{k_{s+1}}, A_\beta; U_{k_0} \dots U_{k_{s+1}}]$. Le premier est complet d'après l'hypothèse. Le point A_j pouvant être un point quelconque de $(A_{k_0}, \dots, A_{k_{s+1}})$, le repère $[A_{k_0}, \dots, A_{k_{s+1}}, A_\beta; U_{k_0} \dots U_{k_{s+1}}]$ est complet d'après ce que nous avons remarqué au n° 3.

Supposons ensuite que $k_0 = \ell$. Si l'on fait $j = k_0$, il vient

$$(j_0, \dots, j_s) = (k_1, \dots, k_{s+1}),$$

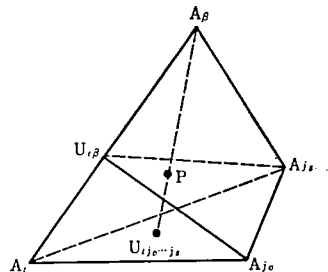
$$U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}} = (A_\beta \vee U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}) \cap (U_{i_\beta} \vee A_{k_1} \vee \dots \vee A_{k_{s+1}})$$

et, par suite, le sous-repère frontière $[A_{k_1}, \dots, A_{k_{s+1}}, A_\beta; U_{k_1} \dots U_{k_{s+1}}]$ est en coïncidence avec le repère $[A_{j_0}, \dots, A_{j_s}, A_\beta; U_{j_0} \dots U_{j_s}]$ qui est complet d'après l'hypothèse. Lorsque $j \neq k_0$, on a $j_0 = \ell$,

$$U_{i_0} \dots U_{i_s} = (A_\beta \vee U_{i_0} \dots U_{i_s}) \cap (U_{i_\beta} \vee A_{j_1} \vee \dots \vee A_{j_s}),$$

et $j_1 \dots j_s j$ devient une permutation de $k_1 \dots k_{s+1}$. Comme nous l'avons remarqué plus haut, la droite $A_j \vee U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}$ contient le point $U_{i_0} \dots U_{i_s}$. C'est le point d'intersection de $A_j \vee U_{i_0} \dots U_{i_{s+1}}$ avec l'hyperplan $A_i \vee A_{j_1} \vee \dots \vee A_{j_s} \vee A_\beta$ dans l'espace $S^{s+2} = A_i \vee A_{k_1} \vee \dots \vee A_{k_{s+1}} \vee A_\beta$. Nous voyons ainsi que, dans ce cas aussi, tout sous-repère frontière de $[A_{k_0}, \dots, A_{k_{s+1}}, A_\beta; U_{k_0} \dots U_{k_{s+1}}]$ est complet.

5. Une famille \mathfrak{U} de points de S étant associée à la base \mathfrak{A} de S de la manière dont nous venons de mentionner, on peut introduire les coordonnées homogènes d'un point P de $S^r = A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r}$ par rapport au repère $[A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}; U_{i_0 i_1} \dots i_r]$. Soit P maintenant un point quelconque de S . Envisageons l'ensemble \mathfrak{S} des sous-familles finies de \mathfrak{A} dont chacune détermine un espace projectif contenant P . Soient L_1 et L_2 deux éléments de \mathfrak{S} , S^r l'espace projectif déterminé par $L_1 \cup L_2$, et



$x^{i\kappa} (\kappa=0, 1, \dots, r)$ les coordonnées homogènes de P par rapport au repère $[A_{i0}, \dots, A_{ir}; U_{i0}, \dots, U_{ir}]$. On a alors $x^{is}=0$, lorsque le sommet A_{is} n'est pas contenu dans L_1 ou dans L_2 . Donc, $L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{S}$. Nous pouvons ainsi prendre, à partir de L_1 et en diminuant proche en proche le nombre de sommets structuraux, un sous-ensemble qui détermine un espace projectif contenant le point P . Mais ce nombre n'est pas moindre que 1. On finit donc par arriver le plus petit élément $M=(A_{j0}, \dots, A_{jm})$ de \mathfrak{S} , car on a $M \subset (L_1 \cap L)$, L étant un élément quelconque de \mathfrak{S} .

Si l'on regard le point P comme un point dans l'espace projectif $S(P)$ déterminé par A_{j0}, \dots, A_{jm} , on obtient ses coordonnées homogènes qui sont toutes différentes de zéro. On peut donc représenter ce point P par les coordonnées $x=(x^i) (i \in I)$ telles que $x^i=0$, à l'exception de susdites coordonnées x^{j0}, \dots, x^{jm} .

Nous appelons l'ensemble $\overset{\circ}{S}^r$ des points de $S^r = A_{i0} \vee A_{i1} \vee \dots \vee A_{ir}$, dont les coordonnées homogènes x^{i0}, \dots, x^{ir} sont toutes différentes de zéro intérieur de S^r par rapport au système $(A_{i0}, A_{i1}, \dots, A_{ir})$, car il est déterminé indépendamment du choix de la famille \mathfrak{L} des points d'unité: le point P se trouve dans l'intérieur de $S(P) = A_{j0} \vee \dots \vee A_{jm}$.

6. Etant donné un point $x=(x^i) (i \in I)$ de S , on appelle $x^i / \sum_i |x^i|$ les *coordonnées normales* de x . Nous désignerons désormais et sauf mention expresse du contraire par $(x^i) (i \in I)$ les coordonnées normales du point x . De plus, lorsque x^{j0}, \dots, x^{jm} ($j_0 < \dots < j_m$) sont les coordonnées normales $\neq 0$ du point x , nous conviendrons de faire $x^{j0} > 0$ de sorte qu'on ait $0 < x^{j0} = 1 - |x^{j1}| - \dots - |x^{jm}|$.

Nous avons alors, pour un point de S , un et un seul système de coordonnées normales. En particulier, la seule coordonnée normale $\neq 0$ d'un point de la base \mathfrak{U} est égale à 1.

Prenons un point $a=(a^i) (i \in I)$ de S . Soient L la sous-famille finie de \mathfrak{U} , qui détermine l'espace $S(a)$, et ρ un nombre positif moindre que les valeurs absolues des coordonnées normales $\neq 0$ de ce point a . On a alors $0 < \rho < 1$, et $0 < a^i - \rho < a^i + \rho$ ou $a^i - \rho < a^i + \rho < 0$ selon que $a^i > 0$ ou $a^i < 0$. Etant donné un nombre positif λ moindre que ρ , considérons un point t dont les coordonnées homogènes $(t^i) (i \in I)$ satisfont aux inégalités

$$|t^i - a^i| < \delta \quad (i \in I, 0 < \delta < \rho).$$

Puisque

$$a^i - \delta < t^i < a^i + \delta,$$

on a, d'après ce que nous venons de remarquer, $S(a) \subset S(t)$ et

$$|a^i| - \delta < |t^i| < |a^i| + \delta,$$

Prenons le point t sur un espace $S^n (n > 0)$ déterminé par une sous-famille finie quelconque $L' \supset L$ de \mathfrak{U} . Soit $0 < \delta < \frac{1}{n}$. En sommant par rapport aux coordonnées homogènes $\neq 0$ de t , on a

$$1 - n\delta < \sum_i |t^i| < 1 + n\delta$$

et, par suite,

$$\frac{a^i - \delta}{1 + n\delta} < \frac{t^i}{\sum_s |t^s|} < \frac{a^i + \delta}{1 - n\delta}$$

ou

$$\frac{a^i - \delta}{1 - n\delta} < \frac{t^i}{\sum_s |t^s|} < \frac{a^i + \delta}{1 + n\delta}$$

selon que $t^i > 0$ ou $t^i < 0$. Donc, étant donné un entier positif n , nous pouvons déterminer un nombre positif δ de manière à avoir

$$(|t^i - a^i| < \delta) \Rightarrow \left(\left| \frac{t^i}{\sum_s |t^s|} - a^i \right| < \lambda \right).$$

En effet, il suffit de faire $\delta < \lambda/3n$.

Nous appelons l'ensemble des points x dont les coordonnées normales $(x^i) (i \in I)$ satisfont aux inégalités

$$|x^i - a^i| < \lambda \quad (i \in I)$$

cube projectif de centre a et de largeur λ , et nous le désignerons par $\mathfrak{G}(a, \lambda)$.

7. Prenons un point $x \in \mathfrak{G}(a, \sigma) : |x^i - a^i| < \sigma (i \in I)$. Puisque $x^i - a^i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i , on peut prendre un nombre positif τ de manière à avoir

$$\tau < \sigma - |x^i - a^i| \quad (i \in I)$$

et, par suite,

$$y \in \mathfrak{G}(x, \tau) \Rightarrow |y^i - a^i| < \sigma \quad \text{i. e.} \quad \mathfrak{G}(x, \tau) \subset \mathfrak{G}(a, \sigma).$$

Il en suit que l'intersection de deux cubes projectifs s'exprime comme une réunion de cubes projectifs. Nous pouvons donc donner une topologie à S pour laquelle l'ensemble des cubes projectifs devienne une base (au sens topologique).

Cela étant fait, l'espace S n'est pas compact. En effet, nous ne pouvons pas choisir du recouvrement ouvert

$$\{\mathfrak{G}(x, \lambda)\} \quad (x \in S)$$

un recouvrement $(\mathfrak{G}(x_1, \lambda), \dots, \mathfrak{G}(x_r, \lambda))$, car il existe un indice κ tel qu'on a $x_1^\kappa = \dots = x_r^\kappa = 0$, ce qui nous montre que le point A_κ se trouve à l'extérieur de ces r cubes.

Mais l'espace projectif S^r à dimension finie est compact. Supposons d'abord que $S^r = A_{i_0} \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_r}$. Soit $\{U_\alpha\} (\alpha \in \mathfrak{a})$ un recouvrement ouvert de S^r . Puisque l'espace S^r admet une base dénombrable, de démontrer qu'on peut extraire de $\{U_\alpha\} (\alpha \in \mathfrak{a})$ un recouvrement fini se ramène à dire que toute famille infinie $(x_l) (l \in J)$ de points de S^r admet un point d'accumulation dans S^r . Or, pour chaque point de la famille $(x_l) (l \in J)$, nous pouvons prendre, dans l'espace cartésien E^{r+1} , comme son image le point $T(x_l)$ dont les coordonnées cartésiennes sont en coïncidence avec ses coordonnées normales. Les points $T(x_l) (l \in J)$ se trouvent dans le pavé fermé $R : |u^{i_\kappa}| \leq 1 \quad (\kappa = 0, 1, \dots, r)$. Il existe, dans R , un point u_0 tel qu'on puisse trouver, pour un nombre positif quelconque ε , un point $T(x_l)$ satisfaisant aux inégalités

$$|x^{i\epsilon} - u_0^{i\epsilon}| < \varepsilon \quad (\kappa=0, 1, \dots, r), \quad \sum_{\epsilon} |x^{i\epsilon}| = 1.$$

Ainsi les coordonnées $u_0^{i\epsilon}$ ne sont pas tous nulles. Si l'on prend ε de manière qu'il soit moindre que les valeurs absolues des coordonnées $\neq 0$ de u_0 , il vient

$$|u_0^{i\epsilon}| - \varepsilon < |x^{i\epsilon}| < |u_0^{i\epsilon}| + \varepsilon$$

d'où

$$|1 - \sum_{\epsilon} |u_0^{i\epsilon}| < (r+1)\varepsilon \quad \text{i. e.} \quad \sum |u_0^{i\epsilon}| = 1,$$

ce qui nous montre que $T^{-1}u_0 \in S^r$.

Soit maintenant S^r un espace projectif quelconque à dimensions r . Il existe un espace projectif $S^n = A_{i_0} \vee \dots \vee A_{i_n}$ contenant l'espace S^r . Celui-ci est une partie relativement fermée à S^n . Or, S^n est compact. Il en est donc de même pour S^r .

8. Soient $\mathcal{U}' = (A'_j)$ ($j \in J$) une autre base de S , et p_j^i ($i \in I$) les coordonnées homogènes du point A'_j par rapport à la base $\mathcal{U} = (A_i)$ ($i \in I$) (l'indice j étant donné, on a $p_j^i = 0$ sauf pour un nombre fini $\neq 0$ d'indices i). Les coordonnées d'un point quelconque de S , rapportées à la base \mathcal{U} s'expriment sous la forme

$$x^i = \sum_j \lambda^j p_j^i \quad (i \in I),$$

où $\lambda^j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices j . D'une manière précise, si $(A'_{j_0}, \dots, A'_{j_m})$ est la sous-famille finie de \mathcal{U}' qui détermine l'espace projectif $S'(x)$ on a $\lambda^j = 0$ à l'exception de $\lambda^{j_0}, \dots, \lambda^{j_m}$ qui sont tous différents de zéro. Nous avons aussi $\sum_j \lambda^j p_j^i = 0$, sauf pour un nombre fini $\neq 0$ d'indices i .

Le point d'unité $U'_{j_0 \dots j_m}$ associé à l'espace $S'(x) = A'_{j_0} \vee \dots \vee A'_{j_m}$ peut s'écrire

$$\sum_{s=0}^m \kappa^{j_s} p_{j_s}^i$$

de sorte que les coordonnées homogènes $\neq 0$ du point x par rapport au repère $[A'_{j_0}, \dots, A'_{j_m}; U'_{j_0 \dots j_m}]$ sont données par

$$\frac{x'^{j_0}}{\frac{\lambda^{j_0}}{\kappa^{j_0}}} = \dots = \frac{x'^{j_m}}{\frac{\lambda^{j_m}}{\kappa^{j_m}}} = \frac{1}{\rho}$$

Nous avons donc

$$\rho x^i = \sum_j x'^j \kappa^j p_j^i.$$

La transformation projective est une application bijective $S \rightarrow S$ qui donne lieu à la correspondance univoque entre des droites de la manière que la relation d'incidence soit conservée. Elle conserve donc, concernant l'ensemble des points sur une droite, la propriété d'être les points d'intersection des six côtés d'un quadrangle complet avec la droite en question et, par suite, elle conserve le rapport anharmonique des quatre points sur une droite. Ainsi, les coordonnées homogènes d'un point P , rapportées à la base $\mathcal{U} = (A_i)$ ($i \in I$) deviennent celles du point $P' = TP$ rapportées

à la famille libre $L = (TA_i)$ ($i \in I$), où T est une transformation projective. D'autre part, il existe une partie L' de \mathfrak{A} telle que $\mathfrak{A}' = L \cup L'$ soit une base de S et que $L \cap L' = \emptyset$ (la famille \mathfrak{A}' est l'élément maximal de l'ensemble des familles libres dont chacune est formée par L et par une partie de \mathfrak{A}). La transformation T s'exprime donc par

$$\rho x'^i = \sum_j x^j \kappa^j p_j^i \quad (i \in I)$$

d'après ce nous avons remarqué plus haut.

En particulier, l'involution T_k qui permute A_k, A_i , où l'indice i est l'élément le plus petit de I , et qui laisse invariant les autres points de \mathfrak{A} et tous les points d'unité s'exprime par

$$\rho x'^i = x^k, \quad \rho x'^k = x^i, \quad \rho x'^i = x^i \quad (i \neq i, i \neq k).$$

Si l'on prend pour coordonnées du point x et de son image x' les coordonnées normales, il vient

$$|\rho| = |\rho| \sum |x'^i| = \sum |x^i| = 1.$$

Pour un point tel que $x^k > 0$, il vient $\rho = 1$.

Envisageons maintenant un cube projectif $\mathfrak{E}(b, \lambda)$, où $S(b) = A_k \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m}$ ($k < i_1 < \dots < i_m$). D'après la convention faite au 6° on a $b^k > 0$ et, par suite, $x^k > 0$ pour tout x dans $\mathfrak{E}(b, \lambda)$, comme nous l'avons remarqué au n° 6. Donc, l'involution T_k transforme $\mathfrak{E}(b, \sigma)$ en $\mathfrak{E}(b', \sigma)$, où $S(b') = A_i \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m}$.

§4 Carte locale de M dans S

9. Soient M un espace de Hausdorff, et $\{U_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathfrak{a}$) un recouvrement ouvert de M . Supposons qu'il existe, pour chaque U_α , une application topologique φ_{U_α} de U_α dans une partie ouverte $\varphi_{U_\alpha}(U_\alpha)$ de l'espace projectif réel S à dimension infinie. Soient $\mathfrak{A} = (A_i)$ ($i \in I$) une base de S .

Prenons un point $x_0 \in M$. Supposons que $x_0 \in U_\alpha$ et que $S(\sigma_0) = A_h \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m}$ ($\sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} x_0$). Nous pouvons trouver un nombre positif λ tel que le cube projectif $\mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda)$ soit contenu dans $\varphi_{U_\alpha}(U_\alpha)$. Comme nous l'avons remarqué plus haut, par l'involution T_h ce cube $\mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda)$ devient $\mathfrak{E}(u_0, \lambda)$ ($u_0 = T_h \sigma_0 = T_h \varphi_{U_\alpha} x_0$) dans lequel u^i est positif pour tout point u . Les coordonnées normales u^i ($i \in I - i$) du point $u = T_h \varphi_{U_\alpha} x \in \mathfrak{E}(u_0, \lambda)$ seront dites les coordonnées locales du point x dans le voisinage cubique $V_{x_0} = \varphi_{U_\alpha}^{-1} \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) = (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} \mathfrak{E}(u_0, \lambda)$, u^i étant regardé comme une fonction de u^i ($i \in I - i$), à savoir, $u^i = 1 - \sum |u^i|$.

10. Supposons ensuite que les deux domaines U_α, U_β de la carte se coupent. Prenons un point $x_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$. Soient

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \varphi_{U_\alpha} x_0, \quad S(\sigma_0) &= A_h \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m}, \quad \mathfrak{E}(\sigma_0, \lambda) \subset \varphi_{U_\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta), \\ \tau_0 = \varphi_{U_\beta} x_0, \quad S(\tau_0) &= A_k \vee A_{j_1} \vee \dots \vee A_{j_n}, \quad \mathfrak{E}(\tau_0, \mu) \subset \varphi_{U_\beta}(U_\alpha \cap U_\beta) \\ &\quad (h < i_1 < \dots < i_m; k < j_1 < \dots < j_n). \end{aligned}$$

L'intersection $V_{x_0} = \varphi_{U_\alpha}^{-1} \mathfrak{U}(\sigma_0, \lambda) \cap \varphi_{U_\beta}^{-1} \mathfrak{U}(\tau_0, \mu)$ est un voisinage du point x_0 . Les deux domaines

$$\Omega_{\alpha, \beta} = T_h \varphi_{U_\alpha} V_{x_0}, \quad \Omega_{\beta, \alpha} = T_k \varphi_{U_\beta} V_{x_0}$$

sont homeomorphes. Les deux systèmes de coordonnées locales $(u^i), (v^j)$ ($i, j \in I - \iota$) du point $x \in V_{x_0}$, qui sont respectivement les coordonnées normales du point $u = T_h \varphi_{U_\alpha} x$ et celles du point $v = T_k \varphi_{U_\beta} x$ se relient au moyen d'équations de la forme

$$\left. \begin{aligned} v^j &= P^j(\dots, u^i, \dots) & (i, j \in I - \iota), \\ 0 < v^i &= P^i = 1 - \sum |P^j|, \\ u^i &= Q^i(\dots, v^j, \dots) & (i, j \in I - \iota), \\ 0 < u^i &= Q^i = 1 - \sum |Q^j|. \end{aligned} \right\} \dots\dots (10.1)$$

Si l'on se donne un point u (resp. un point v), on a $u^i = 0$ ($v^j = 0$) sauf pour un nombre fini des d'indices $i \in I - \iota$ ($j \in I - \iota$), et on a aussi $P^i = 0$ ($Q^i = 0$) sauf pour un nombre fini d'indices $j \in I - \iota$ ($i \in I - \iota$).

De $v = T_k \varphi_{U_\beta} (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} T_h \varphi_{U_\alpha} (T_k \varphi_{U_\beta})^{-1} v$ on déduit

$$v^j = P^j(\dots, Q^i(\dots, v^t, \dots), \dots) \quad (v \in \Omega_{\beta, \alpha}; i, j, t \in I - \iota). \quad \dots\dots (10.2)$$

De même, on a

$$u^i = Q^i(\dots, P^j(\dots, u^s, \dots), \dots) \quad (u \in \Omega_{\alpha, \beta}; i, j, s \in I - \iota). \quad \dots\dots (10.3)$$

Soient u un point de $\Omega_{\alpha, \beta}$, et σ un nombre positif quelconque tel que $\mathfrak{U}(u, \sigma) \subset \Omega_{\alpha, \beta}$. Soient $v = T_k \varphi_{U_\beta} (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} u$. Il existe alors $\tau > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(v, \tau) &\subset \Omega_{\beta, \alpha} \text{ et } (v_1 \in \mathfrak{U}(v, \tau) \Rightarrow u_1 \in \mathfrak{U}(u, \sigma)) \\ (u_1 &= T_h \varphi_{U_\alpha} (T_k \varphi_{U_\beta})^{-1} v_1). \end{aligned} \quad \dots\dots (10.4)$$

De même, étant donné un point $v \in \Omega_{\beta, \alpha}$ et un nombre positif τ tel que $\mathfrak{U}(v, \tau) \subset \Omega_{\beta, \alpha}$, nous pouvons trouver $\sigma > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(u, \sigma) &\subset \Omega_{\alpha, \beta} \text{ et } (u_1 \in \mathfrak{U}(u, \sigma) \Rightarrow v_1 \in \mathfrak{U}(v, \tau)) \\ (v &= T_k \varphi_{U_\beta} (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} u, \quad v_1 = T_k \varphi_{U_\beta} (T_h \varphi_{U_\alpha})^{-1} u_1). \end{aligned} \quad \dots\dots (10.5)$$

11. Soient $x \in V_{x_0} \subset (U_\alpha \cap U_\beta)$, $u(x) \in \Omega_{\alpha, \beta}$, $v(x) \in \Omega_{\beta, \alpha}$. En prenant les nombres τ, σ de la manière désignée par (10.4), fixons l'indice $j_1 \in I - \iota$. Prenons, dans $\mathfrak{U}(v, \tau) \subset \Omega_{\beta, \alpha}$, un point v_1 tel que

$$v_1^{j_1} \neq v^{j_1}, \quad v_1^j = v^j \quad (j \neq j_1) \quad (j, j_1 \in I - \iota).$$

Posons

$$\eta(t) = t v_1 + (1 - t) v \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Puisque

$$\begin{aligned} |\eta^k(t) - v^k| &= t |v_1^k - v^k| < \tau \quad (k \in I), \\ \sum_s |\eta^s(t)| &= t \sum_s |v_1^s| + (1 - t) \sum_s |v^s| = t + 1 - t = 1, \end{aligned}$$

le point $\eta(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) décrit un segment dans $\mathfrak{U}(v, \tau)$ de sorte que le point $\xi(t) = T_h \varphi_{U_\alpha} (T_k \varphi_{U_\beta})^{-1} \eta(t)$ engendre un arc dans $\mathfrak{U}(u, \sigma)$. Si les fonctions $\xi^i(t)$ ($i \in I - \iota$) sont continuellement différentiables dans $(0 \leq t \leq 1)$, en particulier,

$$\forall s > 0 \exists t_0 < 1 \forall t (|t| < t_0 \Rightarrow |\xi'^i(t) - u'^i| < \delta)$$

$$(i \in I - \iota; \xi'^i(t) = \frac{d\xi^i}{dt}, u'^i = \xi'^i(0)),$$

et que la borne inférieure σ des valeurs absolues de $u'^i \neq 0$ et 1 est positive, on dit que cet arc est régulier au point $u(x)$. Dans ce cas, si $u'^i \neq 0$, il existe pour $\delta = \frac{1}{2}\sigma$ un nombre positif t_0 tel que $\xi'^i(t) \neq 0$ dans $(0 \leq t \leq t_0)$ et, par suite, que $\xi^s(t) - u^s \neq 0$, car

$$\xi^s(t) - u^s = t\xi'^s(t_1) \quad (0 < t_1 < t).$$

Il résulte de là que

$$Q_{j_1}^i(\dots, v^i, \dots) = 0 \quad (Q_{j_1}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial v^j}; (i, j \in I - \iota), \dots) \quad (11.1)$$

sauf pour un nombre fini d'indices i qui dépendent de choix de l'indice j_1 .

Nous désignerons, par $S(\theta_{j_1})$, l'espace $S(u) \vee S(u')$ qui est déterminé uniquement par la tangente θ_{j_1} à l'arc en question au point $u(x)$.

De même, en prenant $\sigma > 0$, $\tau > 0$ de la manière désignée par (10.5), et en faisant l'indice i_1 fixe, on considère un point $u_1 \in \mathcal{G}(u, \sigma) \subset \Omega_{\alpha, \beta}$ tel que

$$u_1^{i_1} \neq u^{i_1}, \quad u_1^i = u^i \quad (i \neq i_1) \quad (i, i_1 \in I - \iota),$$

le segment décrit par le point $\tilde{\xi}(t) = tu_1 + (1-t)u$ ($0 \leq t \leq 1$), et l'arc décrit par le point $\tilde{\eta}(t) = T_{k\varphi_{U\beta}}(T_{h\varphi_{U\alpha}})^{-1}\tilde{\xi}(t)$. Si cet arc est régulier au point $v(x)$, on a

$$P_{i_1}^j(\dots, u^s, \dots) = 0 \quad (P_{i_1}^j = \frac{\partial P^j}{\partial u^i}; i, j \in I - \iota), \dots \quad (11.2)$$

sauf pour un nombre fini d'indice j qui dépendent de choix de l'indice i_1 .

En vertu de (11.1), (11.2), on peut tirer de (10.2), (10.3)

$$\delta_{j_1}^j = \sum_s (P_s^i)_{u(x)} (Q_{j_1}^s)_{v(x)}, \quad \delta_{i_1}^i = \sum_t (Q_t^i)_{v(x)} (P_{i_1}^t)_{u(x)}, \dots \quad (11.3)$$

où les sommations \sum_s et \sum_t sont étendues à un nombre fini d'indices respectifs.

Si ces régularités sont vérifiées toutes les deux pour tout point $x \in V_0$ indépendamment de choix des indices i_1, j_1 fixés auparavant, et aussi indépendamment de choix du point $x_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$, on dit que les cartes locales $\varphi_{U_\alpha}, \varphi_{U_\beta}$ se relient différemmentiellement. Si cela arrive, comme nous le supposons désormais, pour toute couple de cartes locales dont les domaines se coupent, l'espace M est dit variété différentiable.

§5 Vecteur tangent

12. Soient $f(x)$ une fonction définie dans une partie ouverte U de M . Prenons un point $x_0 \in U$. Supposons que $x_0 \in U_\alpha$. Soient

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \varphi_{U_\alpha} x_0, & S(\sigma_0) &= A_h \vee A_{i_1} \vee \dots \vee A_{i_m}, & \mathcal{G}(\sigma_0, \lambda) &= \varphi_{U_\alpha}(U \cap U_\alpha), \\ V(x_0) &= \varphi_{U_\alpha}^{-1} \mathcal{G}(\sigma_0, \lambda), & T_h \mathcal{G}(\sigma_0, \lambda) &= \mathcal{G}(u_0, \lambda). \end{aligned}$$

Introduisons la fonction $f^*(\dots, u^i, \dots)$ ($u \in \mathcal{G}(u_0, \lambda)$, $i \in I - \iota$) telle que

$$f(x) = f^*(\dots, u^i(x), \dots), \\ (x \in V_{x_0}, u(x) = T_h \varphi_{U_\alpha} x).$$

Si cette fonction f^* est différentiable dans $\mathcal{G}(u_0, \lambda)$, on dit que $f(x)$ est différentiable en point x_0 , et si cela arrive pour tout point x_0 de U , la fonction $f(x)$ est dite différentiable dans U .

C'est une propriété de $f(x)$ indépendante de choix de la carte locale dont le domaine contient le point x_0 . En effet, lorsque $x_0 \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta$, en prenant $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ à la place de $U_\alpha \cap U_\beta$, nous pouvons introduire comme tout à l'heure les domaines $\Omega_{\alpha, \beta}, \Omega_{\beta, \alpha}$ qui se trouvent dans un cube $\mathcal{G}(A, \rho)$, et les deux systèmes de coordonnées locales $(u^i), (v^j)$ ($i, j \in I - \iota$) du point $x \in V_{x_0}$ qui se relient par d'équations de la forme (10.1). Prenons, dans $\Omega_{\beta, \alpha}$, un point quelconque v . Soit u son image dans $\Omega_{\alpha, \beta}$. On a alors, l'indice j étant fixé,

$$Q_j^i(\dots, v^j, \dots) = 0$$

sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I - \iota$.

Or, on a aussi une fonction $f^{**}(\dots, v^j, \dots)$ ($v \in \Omega_{\beta, \alpha}$) tel que

$$f(x) = f^{**}(\dots, v^i(x), \dots).$$

D'autre part,

$$f(x) = f^*(\dots, u^i(x), \dots) = f^*(\dots, Q^i(\dots, v^j(x), \dots), \dots).$$

On a donc

$$f^{**}(\dots, v^j, \dots) = f^*(\dots, Q^i(\dots, v^j, \dots), \dots),$$

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial v^j} = \sum_s \frac{\partial f^*}{\partial u^s} Q_j^s, \quad \dots\dots (12.1)$$

où la sommation \sum_s est étendue pour un nombre fini d'indices $s \in I - \iota$.

De même, on tire

$$\frac{\partial f^*}{\partial u^i} = \sum_t \frac{\partial f^{**}}{\partial v^t} P_i^t. \quad \dots\dots (12.2)$$

13. Considérons une famille $\{f\}$ des fonctions différentiables dont chacune est définie dans une partie ouverte de M contenant un voisinage du point $x \in M$. Soient θ une application linéaire de couple (x, f) ($f \in \{f\}$) dans \mathbf{R} (réels). Si l'on définit

$$(\theta + \theta')(x, f) = \theta(x, f) + \theta'(x, f), \quad (\alpha\theta)(x, f) = \alpha\theta(x, f)$$

où α est un nombre réel, l'ensemble $\mathfrak{X}(x)$ de telles applications devient un espace vectoriel dans le corps de nombres réels.

En supposant maintenant que les fonctions de la famille $\{f\}$ sont définies dans un voisinage du point $x_0 \in M$ et que $x_0 \in U_\alpha$, prenons un voisinage cubique V_{x_0}

comme tout à l'heure. Soient $x \in V_{x_0}$, $u = T_h \varphi_{U_a} x$. Désignons par $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ($i \in I - \iota$) l'application qui fait correspondre le nombre réel $\left(\frac{\partial f^*}{\partial u^i}\right)_u$ à (x, f) . La famille $\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$ ($i \in I - \iota$) est libre et engendre un sous-espace vectoriel $T(x)$ de $\mathfrak{X}(x)$. On l'appelle l'espace tangent à M au point x . D'après (12.1), il est déterminé indépendamment de choix de coordonnées locales.

Tout élément ∇ de $T(x)$ est muni des propriétés suivantes :

1° $\nabla u^i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I - \iota$, car ∇ est une combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial u^i}$.

2° ∇ est une différentiation, à savoir,

$$\nabla(x, fg) = f(x)\nabla(x, g) + g(x)\nabla(x, f).$$

Réciproquement, un élément ∇ de $\mathfrak{X}(x)$ muni de ces propriétés est un vecteur tangent. En effet, prenons un cube $\mathfrak{G}(u, \sigma) \subset \mathfrak{G}(u_0, \lambda)$ et un point $v \in \mathfrak{G}(u, \sigma)$. Le point $w = (1-t)u + tv$ ($0 \leq t \leq 1$) se trouve dans $\mathfrak{G}(u, \sigma) \cap \mathcal{S}(v)$. Si l'on pose

$$F(t) = f^*(\dots, w^i, \dots) \quad (f \in \{f\}),$$

il vient

$$F(0) = f^*(\dots, u^i, \dots),$$

$$F(1) = f^*(\dots, v^i, \dots)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} f^*(\dots, v^i, \dots) \\ = f^*(\dots, u^i, \dots) + \sum_s (v^s - u^s) \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial w^s} dt, \end{aligned}$$

où la sommation \sum_s est étendue à un nombre fini d'indices s . Si l'on regard $f^*(\dots, w^i, \dots)$ comme une fonction de v^i , t en laissant le point u fixe, la fonction

$$g_t^*(\dots, v^i, \dots) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f^*}{\partial w^i} \right)_{w=u+(v-u)t} dt$$

est différentiable dans $\mathfrak{G}(u, \sigma)$. Posons

$$g_i(y) = g_t^*(\dots, v^i(y), \dots) \quad (y \in (T_h \varphi_{U_a})^{-1} \mathfrak{G}(u, \sigma),$$

$$\nabla(y, v^i) = \lambda^i(y).$$

Si les conditions 1°, 2° sont vérifiées, on a d'abord $\lambda^i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I - \iota$ et puis

$$\nabla(y, f) = \sum_i \lambda^i(y) g_i(y) + \sum_s (v^s(y) - u^s) \nabla(y, g_s),$$

où les sommations \sum_i et \sum_s sont étendues à un nombre fini d'indices respectifs. En particulier, lorsque $y = x$, il vient

$$\nabla(x, f) = \sum_i \lambda^i(x) \frac{\partial f^*}{\partial u^i} = \sum_i \left(\lambda^i(x) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) f^*$$

ce qui nous montre que ∇ est un vecteur tangent au point x .

D'après (12.1), (12.2), on a

$$\frac{\partial}{\partial v^t} = \sum_s Q_{t^s} \frac{\partial}{\partial u^s}, \quad \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_t P_k^t \frac{\partial}{\partial v^t}. \quad \dots\dots(13.1)$$

Références

- I. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Première Partie, Livre I, Chapitre III.
- II. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Première Prartie, Livre II, Chapitre II.
- III. A. Lichnerowitz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*.
- IV. O. Veblen and J. W. Young, *Projective geometry*.
- V. E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli inerspazi*.