

高速回転軸の振動に及ぼす回転板の ジャイロ作用について(1報)

山 田 嘉 久

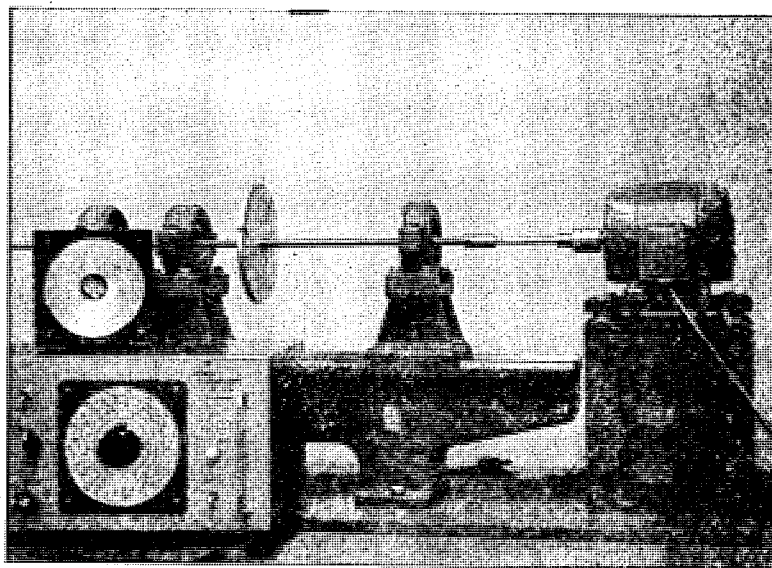
1. 緒 言

技術の進歩と共に各種の機械類は益々精巧高速化され、それに伴って機械振動の問題は一段と重要性を増しつつある。著者⁽¹⁾は以前から高速回転機械における軸系の振動に関する研究を続けて来たが、ここには主として回転板のジャイロ作用が回転軸の振動ならびに危険速度に及ぼす影響について、理論的ならびに実験的研究の結果を報告する。

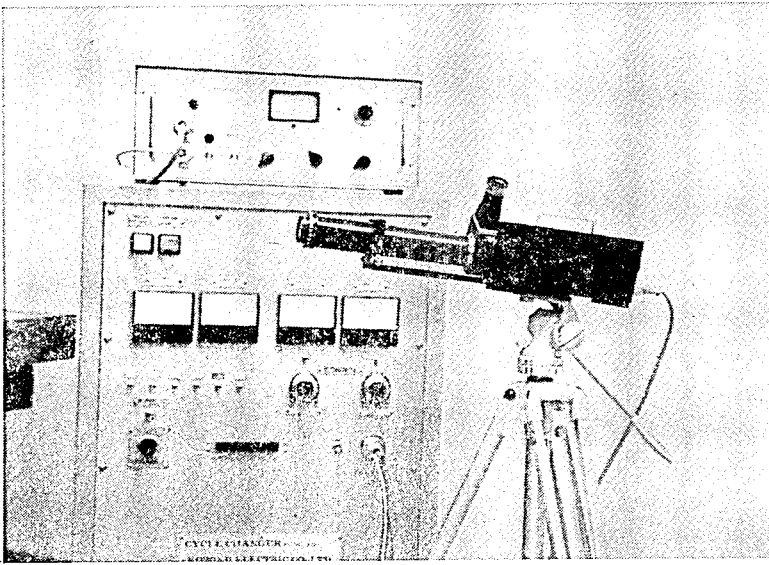
第1図は最近本学に設備された高速回転軸系試験装置を示す。片持軸及び両持軸の試験が可能であり、回転板は対称形及び非対称形のものが取付けられる。回転数は最低 1,000 r. p. m. から最高 20,000 r. p. m. まで自由に連続的に変化させることができる。

第2図は動力用高周波発生装置および電子光学式振動測定装置 (Optron 方式) を示す。これは回転板の振動を光学的にとらえ、それを電圧に変換して、シンクロスコープに表示するものである。

さて回転板のジャイロ作用は片持軸系の場合は両持軸系の場合に比し、著しく大きく現われる。しかも片持軸の応用される例は、蒸気タービン (特に二重回転式のもの)、ガスタービン、水車およびポンプ、船舶および航空機プロペラなどを始め 各種車輪、歯車およびブリー、工作機械のカッタおよび砥石その他あらゆる機種に亘り枚挙に暇ない程である。よって以下本論文では片持軸に重点を置いて述べることにする。



第1図 回転軸試験装置



第 2 図 動力用高周波発生装置と電子光学式振動測定装置

2. 使用記号

d cm = 回転軸の直径（断面は一樣な円形とする）

l cm = 片持軸の有効長さ

l_1, l_2 cm = 両持軸の各軸受から回転板中心までの長さ

J cm⁴ = 軸断面の 2 次モーメント

E kg/cm² = 軸材料の弾性係数

$M = W/g$ kg sec²/cm = 回転板の質量

k_0, k_1, k_2 cm = 回転板の主慣性モーメント軸に関する回転半径

$I_0 = Mk_0^2, I_1 = Mk_1^2, I_2 = Mk_2^2$ kg sec² cm = 回転板の主慣性モーメント

$a = (k_0/l)^2, b = (k_1/l)^2, c = (k_2/l)^2$ 片持軸の場合

$a = k_0^2/l_1l_2, b = k_1^2/l_1l_2, c = k_2^2/l_1l_2$ 両持軸の場合

ω rad/sec = 軸の回転角速度

λ_0 rad/sec = 回転板をそれと同質量の質点と見なした 場合の軸の静止時の自由振動角速度

p rad/sec = 回転軸と同速度で回転する回転座標系に関する軸の（相対）自由振動角速度

$\lambda_1 = \omega + p$ rad/sec 前進プレセッションにおける軸の（絶対）自由振動角速度

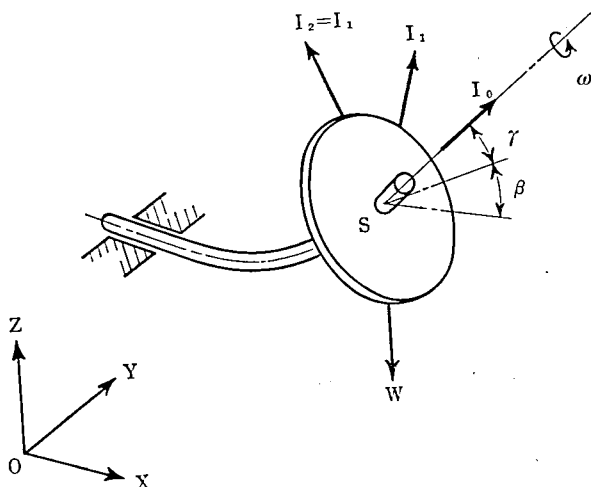
$\lambda_2 = \omega - p$ rad/sec 後進プレセッションにおける同上速度

$x = \omega/\lambda_0, y = p/\lambda_0, z_1 = \lambda_1/\lambda_0 = x + y, z_2 = \lambda_2/\lambda_0 = x - y$

3. 理論的根拠

回転板のジャイロ作用を始めて理論的に取扱ったのは、蒸気タービンの権威 A. Stodola⁽²⁾であり、戦后には R. B. Green⁽³⁾の論文があり、最近の工業力学の教科書にはこの問題を取り入れたものが多い。なお回転軸系の安全性に関する論文⁽⁴⁾や著書⁽⁵⁾もいくつか出されている。

回転板または回転軸の剛性が非対称である場合の研究⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾も行なわれ、その際は問題は更に複雑化するのであるが、著者は実際の機械設計に直接役立たせる目的で研究を進めた。



第3図 回転軸系の模型

第3図は単純化された水平回転軸系の模型で、ここでは回転板の慣性モーメント I_0 の軸が回転軸の中心線と一致しておるものとし、その方向に静止座標系 $O-XYZ$ の OX 軸を選ぶ。

X, Y, Z = 回転板の重心 S の座標

β, γ = I_0 軸がそれぞれ ZOX 面および XOY 面となす角

P_y, P_z = 回転軸の弾性による Y および Z 軸方向の復元力

M_y, M_z = Y 軸および Z 軸の回りの復元モーメント

軸の質量は回転板の質量に比し無視し得るものとし、外部摩擦および内部粘性の影響、振り振動および重力による影響を無視する。

この回転系は4つの自由度を有し、 Y, Z および β, γ を微少量とすれば次の4個の運動方程式を得る。

3.1 対称回転板 ($I_1 = I_2$) の場合

$$I_1 \ddot{\beta} + I_0 \omega \dot{\gamma} = M_z \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$I_1 \ddot{\gamma} - I_0 \omega \dot{\beta} = M_y \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$M \ddot{Y} = P_y \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$M \ddot{Z} = P_z \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } M_z &= m' Y + n' \beta, & M_y &= m' Z + n' \gamma \\ P_y &= m Y + n \beta, & P_z &= m Z + n \gamma \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{いま } Y &= r \cos \lambda t, & Z &= r \sin \lambda t \\ \beta &= \varphi \cos \gamma t, & \gamma &= \varphi \sin \gamma t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

とおけば、(1), (2), (3) および (4) の4式は次の2式となる。

$$\left. \begin{aligned} (I\lambda^2 - I_0\omega\lambda)\varphi + n'\varphi - m'r &= 0 \\ n\varphi + (m + M\lambda^2)r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

この2式から r と φ を消去して次の λ と ω との関係式を得る。

$$MI_0\lambda^4 - MI_0\omega\lambda^3 + (mI_0 + n'M)\lambda^2 - mI_0\omega\lambda + m'n - mn' = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

静止時において回転板の位置における軸のたわみ量を δ とすれば

$$\lambda_0 = \sqrt{g/\delta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

この値は回転板が質点と考えられる場合は回転数の如何にかかわらず回転軸の自由振動速度を表わす。

3.1.1 片持軸の場合

$$\left. \begin{aligned} \delta &= WL^3/3EJ, \quad \lambda_0 = \sqrt{3EJ/ML^3} \\ m' &= +6EJ/l^2, \quad n' = -4EJ/l \\ m &= -12EJ/l^3, \quad n = m' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

であるから式(8)は第2節に記した a, b および x, z を用いると次式となる。

$$bz^4 - az^3x - 4(b+1/3)z^2 + 4axx + 4/3 = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

これが基本式であるが、変数 z と x との4次式であるから、このままでは解き難い。しかし次のパラメタ s を用い、

$$s = \omega/\lambda \quad -\infty < s < +\infty \quad \dots\dots\dots(12)$$

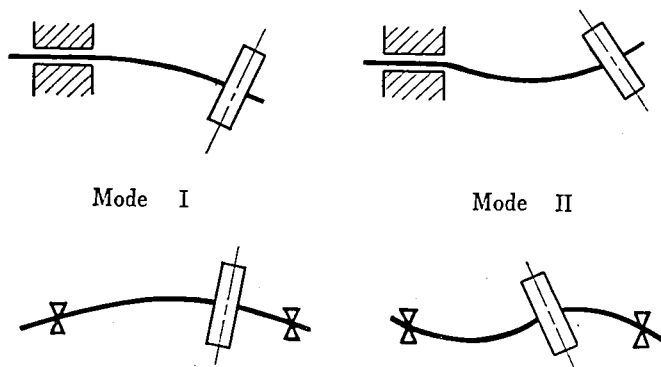
$$\text{かつ} \quad h = b - sa \quad \dots\dots\dots(13)$$

と置けば式(11)は次の如く z^2 の2次式となる。

$$hz^4 - 4(h+1/3)z^2 + 4/3 = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{よって} \quad z^2 = 2[(h+1/3) \pm \sqrt{h^2 + h/3 + 1/9}]/h \quad \dots\dots\dots(15)$$

この際符号(±)のうち一方はモードI振動、他方はモードII振動に相当する(第4図参照)。

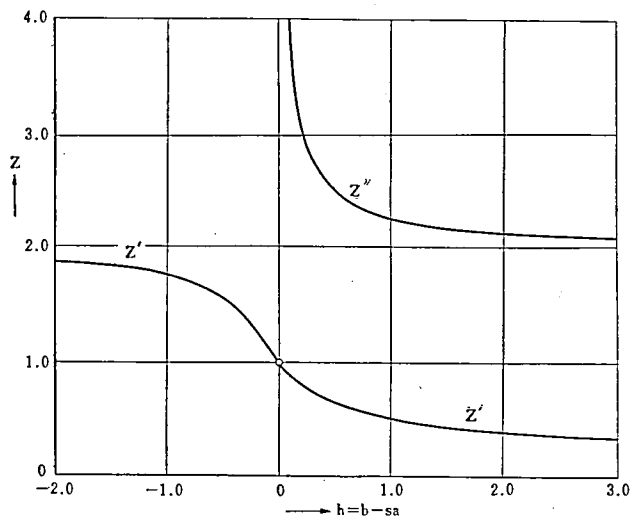


第4図 モードIおよびII振動

s には(±)の整数または簡単な整数比を選ぶ。 $s=0$ は静止状態を表わし $z-x$ 線図で z 軸に相当する。 s が(+)の場合は前進プレセッションに相当し、 $z-x$ 線図の第1象限に

表われる。 s が(−)の場合は後進プレセッションに相当し $z-x$ 線図の第2象限に表われるのであるが、本稿では便宜上 z 軸で折返して第1象限に重ねて示す。

一般に式(15)はある回転速度に対して4種の自由振動値を与える。その値に一致する回転数では共振を起し、いわゆる危険速度となる。さて z は h だけの関数であるから h の(±)の種々の値に対し z の値を与える数表または線図を作っておけば便利である。第I表はその雛形であり、第5図はそれを図示したものである。



第5図 $z-h$ 図 線

第I表 自由振動速度表

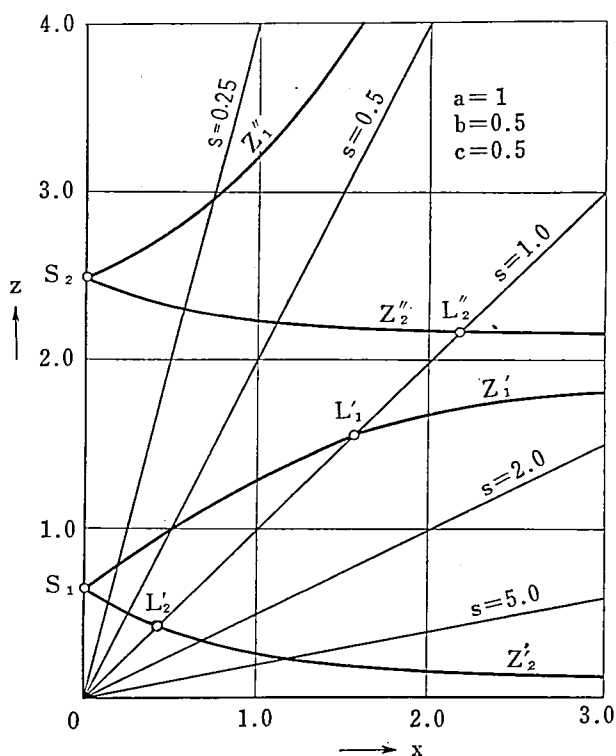
h	z'	z''	h	z'
0	1.0000	∞	0	1.000
0.1	0.8982	4.065	− 0.1	1.120
0.2	0.8165	3.162	− 0.2	1.254
0.3	0.7510	2.807	− 0.3	1.378
0.4	0.6978	2.617	− 0.4	1.480
0.5	0.6538	2.498	− 0.5	1.559
0.6	0.6168	2.417	− 0.6	1.620
0.7	0.5852	2.358	− 0.7	1.668
0.8	0.5579	2.314	− 0.8	1.705
0.9	0.5339	2.280	− 0.9	1.735
1.0	0.5128	2.252	− 1.0	1.760
1.5	0.4350	2.168	− 1.5	1.837
2.0	0.3841	2.126	− 2.0	1.877
3.0	0.3199	2.084	− 3.0	1.917
4.0	0.2799	2.063	− 4.0	1.938
5.0	0.2519	2.050	− 5.0	1.950
6.0	0.2309	2.042	− 6.0	1.959
8.0	0.2010	2.031	− 8.0	1.969
10.0	0.1803	2.025	− 10.0	1.975

この表は後に述べる非対称回転板の場合にも利用できる。

ここで対称回転板 ($I_1 = I_2$) の形状を特徴づけるため次の μ を用いる。

$$\mu = I_0/I_1 = k_0^2/k_1^2 = a/b \quad \dots\dots\dots(16)$$

この μ は極めて薄い回転板では 2, 極めて細長い円筒では ∞ , 球形に近いものでは 1 に近づく。



第 6 図 対 称 軸 系 の z - x 線 図

第 6 図は $a=1$, $b=1/2$ ($\mu=2$) の場合の z - x 線図で, 縦法および横法の値にそれぞれ $30\lambda_0/\pi$ を乗ずれば毎分当りの振動数および回転数となる。

モード I 前進プレセッション曲線 Z_1' は $\omega=0$ の時, 点 S_1 から出発し, 回転数と共に次第に上昇し, モード I 主危険速度 L_1' を通り, それ以後は漸近線 $z=2.00$ に近づく。

モード I 後進プレセッション曲線 Z_2' は同じく S_1 から出発し, 回転数と共に次第に下降しモード I 副危険速度 L_2' を通り, 以後は漸次線 $z=0$ に近づく。

モード II 前進プレセッション曲線 Z_1'' は静止の時, 点 S_2 から出発し, ω と共に急に上昇する。本例ではモード II 主危険速度は存在しない。

モード II 後進プレセッション曲線 Z_2'' は同じく S_2 から出発し, ω と共に次第に下降しモード II 副危険速度 L_2'' を通り, 以後は漸近線 $z=2.00$ に近づく。

L_1' , L_2' , L_2'' のうち L_1' は常に極めて危険な点であるが, 他の点ではある条件の下で危険性が発生する。

3.1.2 両持軸——両端の軸受は支持状態と仮定し、回転板は一方の軸受から l_1 、他方の軸受から l_2 ($l_1 > l_2$) の位置に取付けられたものとする。この場合は

$$\left. \begin{aligned} \delta &= Wl_1^2 l_2^2 / 3EJ(l_1 + l_2), & \lambda_0 &= \sqrt{3EJ(l_1 + l_2) / Ml_1^2 l_2^2} \\ m' &= -3EJ(l_1^2 - l_2^2) / l_1^2 l_2^2, & n' &= -3EJ(l_1 + l_2) / l_1 l_2 \\ m &= -3EJ(l_1^3 - l_2^3) / l_1^3 l_2^3, & n &= m' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

であり、

$$A = (l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2) / l_1 l_2 \dots\dots\dots(18)$$

と置けば、式 (8) は次式となる。

$$bz^4 - az^3x - (Ab + 1)z^2 + Aaxx + 1 = 0 \dots\dots\dots(19)$$

さらに式 (13), $h = b - sa$ を用い、

$$hz^4 - (Ah + 1)z^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots(20)$$

$$\text{よって } z^2 = [(Ah + 1) \pm \sqrt{(Ah + 1)^2 - 4h}] / 2h \dots\dots\dots(21)$$

この場合は変数が A と h と 2 個あるから、第 I 表のような簡単な表は作れないが、回転板が両軸受のほぼ中央にある場合すなわち A が 1 に近い時は、ジャイロ作用は殆んど表われない。

3.2 非対称回転板の場合 ($l_1 > l_2$)

3.2.1 片持軸の場合——この場合は式 (11) を組合せて次の運動方程式を作る。

$$\begin{aligned} & [bz_1^4 - az_1^3x - 4(b + 1/3)z_1^2 + 4az_1x + 4/3] \\ & \times [cz_2^4 - az_2^3x - 4(c + 1/3)z_2^2 + 4az_2x + 4/3] \\ & + [cz_1^4 - az_1^3x - 4(c + 1/3)z_1^2 + 4az_1x + 4/3] \\ & \times [bz_2^4 - az_2^3x - 4(b + 1/3)z_2^2 + 4az_2x + 4/3] = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(22)$$

これは z と x との複雑な 8 次式となるが、次の新しいパラメタ T を用いると x^2 または y^2 の 2 次式 (24) または (25) となる。

$$T = z_1 z_2 = x^2 - y^2, \quad -\infty > T > +\infty \dots\dots\dots(23)$$

この T は $y-x$ 平面または $z-x$ 平面で双曲線群を表わす。

$$\begin{aligned} & 16d(aT + 2/3)x^4 - [adT^3 + 8\{d(a + 1/3) + 2bc\}T^2 \\ & + 8\{2d(a + 2/3) + 5a/3\}T + 32/3 \cdot (d + 2/3)]x^2 \\ & + \{bT^2 + 4(b + 1/3)T + 4/3\} \{cT^2 + 4(c + 1/3)T + 4/3\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(24)$$

$$\begin{aligned} & 16d(aT + 2/3)y^4 - [adT^3 + 8\{d(-3a + 1/3) + 2bc\}T^2 \\ & + 8\{2d(a - 2/3) + 5a/3\}T + 32/3 \cdot (d + 2/3)]y^2 \\ & + \{(b - a)T^2 - 4(b - a + 1/3)T + 4/3\} \{(c - a)T^2 - 4(c - a + 1/3)T + 4/3\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(25)$$

この何れかの式において T に $-\infty$ から $+\infty$ の間の適当な値を選んで $y^2 - x^2$ 線図を描くことができる。それにより第 6 図に対応する $z-x$ 線図が得られる。

ここに注意すべきことは $x=0$ の場合は $T = -y^2$ で、式 (24) は

$$[by^4 - 4(b+1/3)y^2 + 4/3][cy^4 - (c+1/3)y^2 + 4/3] = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

この式は静止時の自由振動速度を与えるが、式の形が式(14)と全く同形であるから、第I表または第5図がそのまま利用できる。

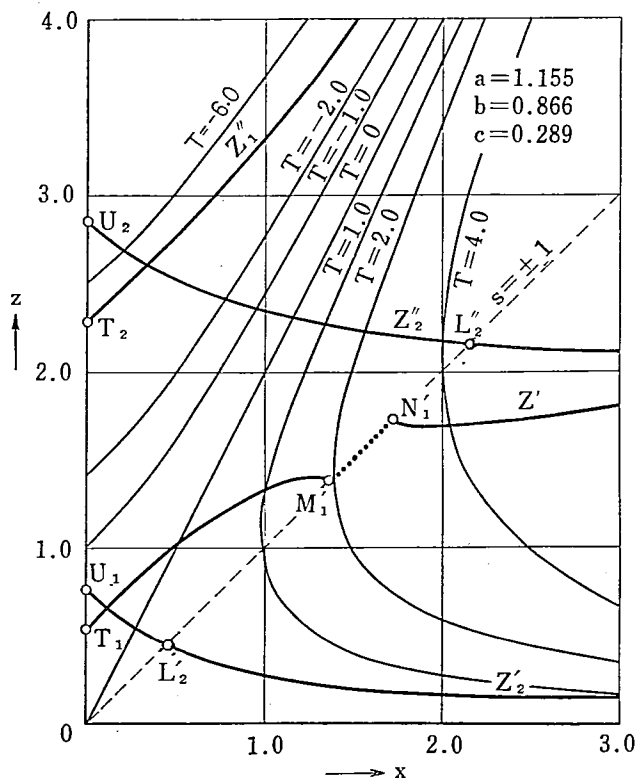
また $y=0$ の場合は $T=x^2$ で、式(25)は

$$[(b-a)x^4 - 4(b-a+1/3)x^2 + 4/3][(c-a)x^4 - 4(c-a+1/3)x^2 + 4/3] = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

この式は危険速度を与えるが、やはり、式(14)と全く同形である。

このように式(24)または(25)は完全に解かなくても、静止時の振動速度および主危険速度は容易に求まるから実用上は大変便利である。

さて式(24)または式(25)は (1) $a > b > c$, (2) $b > a > c$, (3) $b > c > a$ の3つの場合に依じて、それぞれ異なる解を与えるが、ここにはその詳細な解析を省略して、ただ1例を示す。

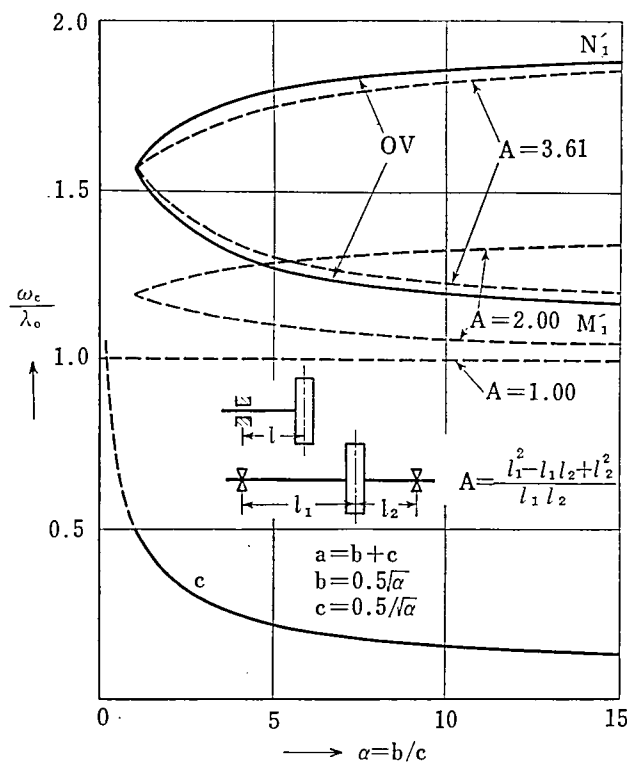


第7図 非対称軸系の $z-x$ 線図

第7図は回転板の重量を第6図の場合と同一とし、形状を非対称とした薄板($a=1.155$, $b=0.866$, $c=0.289$, $\mu=2a/(b+c)=2$)の場合につき $z-x$ 線図を示す。第6図と異なる点は静止時の出発点がモードIおよびII共に T_1 , U_1 および T_2 , U_2 とそれぞれ2点であり、前進曲線は下方の点から、後進曲線は上方の点から出発すること、モードIの前進ブレースション曲線では主危険速度点が M_1' と N_1' と2個あり、その中間は不安定帯であることである。

ここで回転板の非対称の程度を示す指数として次式の α を用いることにする。

$$\alpha = b/c \quad \dots\dots\dots(28)$$



第 8 図 非対称度に対する危険速度の変化

第 8 図には同一軸に同一重量で、非対称度 α の異なる薄い回転板を取付けた場合に、不安定帯 M'_1 N'_1 の変化を OV と記した実線で示す。

3.2.2 両持軸の場合——この場合は式 (19) の組合せにより (22) と同様に次式を作る。

$$\begin{aligned} & [bz_1^4 - az_1^3x - (Ab+1)z_1^2 + Aaz_1x + 1] \\ & \times [cz_2^4 - az_2^3x - (Ac+1)z_2^2 + Aaz_2x + 1] \\ & + [cz_1^4 - az_1^3x - (Ac+1)z_1^2 + Aaz_1x + 1] \\ & \times [bz_2^4 - az_2^3x - (Ab+1)z_2^2 + Aaz_2x + 1] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(29)$$

よって式 (24) および (25) に対応して次の 2 式を得る。

$$\begin{aligned} & 4d[AaT+2]x^4 - [adT^3 + 2\{d(Aa+1) + 2Abc\}T^2 \\ & + \{d(A^2a+8) + 2a(A+1)\}T + 2(Ad+2)]x^2 \\ & + [bT^2 + (Ab+1)T + 1][cT^2 + (Ac+1)T + 1] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\begin{aligned} & 4d[AaT+2]y^4 - [adT^3 + 2\{d(-3Aa+1) + 2Abc\}T^2 \\ & + \{d(A^2a-8) + 2a(A+1)\}T + 2(Ad+2)]y^2 \\ & + [(b-a)T^2 - \{A(b-a) + 1\}T + 1] \\ & \times [(c-a)T^2 - \{A(c-a) + 1\}T + 1] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(31)$$

この両式の性質ならびに取扱いは全く前記 (24) および (25) と同様であるから詳細な説明を省略する。ただ前出の第 8 図に、極薄い回転板の場合において、それぞれ $A=1, 2$ および 3.61 のとき、不安定帯 $M_1' N_1'$ の変化を非対称度 α に対し、破線で示しておいた。

3.3 設計上の注意

非対称軸系は以上に述べたような欠陥があるから、それを出来るだけ避けて対称軸系に近似せしめるためには、 J_1, J_2, b および c を次の関係を満足するように選ぶとよい。

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{(c-a)}{(b-a)} \cdot \frac{(b-a) + 1/3 - \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)/3 + 1/9}}{(c-a) + 1/3 - \sqrt{(c-a)^2 + (c-a)/3 + 1/9}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに J_1 および J_2 は軸の最大および最小の断面 2 次モーメントで、これに回転板を取付けるには J_1 の軸と I_1 の軸とが平行なるようにする。

文 献

- (1) 山田嘉久：高速機械における回転円板の独奏作用の研究，山梨大学工学部研究報告 第 3 号，1952-3 その他
- (2) A. Stodola: Kreisel Wirkung von Rotierenden Scheiben, Zeits. ges. Turbinenwesen, 1917, p. 225
- (3) R. B. Green: Gyroscopic Effects on the Critical Speeds, J. Applied Mechanics, 1948-12
- (4) S. Crandl—P. Brosens: On the Stability of Rotation of Rotors, J. Applied Mechanics 1961, p. 567
- (5) M. Kushul: The Selfinduced Oscillations of Rotors, 1966, Consultant Bureau Enterprises Inc.
- (6) Y. Yamada: On the Critical Speeds of a Rotating System having an Asymmetrical Disc, Proc, 4th Japan Nat, Congress f. Applied Mechanics, 1954 p. 381
- (7) 相羽三良：回転軸の横振動に関する理論的研究 山梨大学工学部研究報告 第 4 号，1953-7
- (8) L. Ya. Banach—Dimentberg: Izgibnae Kolebaniya Vraschayuschegosya Vala, Mechanika i Machinostroenie No. 6, 1960
- (9) A. Tondl: Some Problems of Rotor Dynamics 1965, Czechoslovak Academy of Science.